

ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

田中 健太郎^{†1} 宮崎 浩 一^{†1}

本研究では、オプションのデルタヘッジ戦略への利用をふまえて、将来の実現ボラティリティを予測するモデルを提案し、既存モデルに基づく場合とデルタヘッジ戦略の収益性を比較検討する。提案モデルは、実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比に関する時系列データを利用したものであり、デルタヘッジ戦略の収益性は、既存モデルによるものよりも高い。実証分析では、この結果がどのようなメカニズムから生じるかについても詳細に検討する。

Volatility Forecasting and Profitability of Delta Hedging Strategy

KENTARO TANAKA^{†1} and KOICHI MIYAZAKI^{†1}

In this research, we propose a new volatility forecasting model to utilize it for delta hedging strategy and then examine its profitability in comparison with various kinds of existing models. The building block of our model is time series data of ratio of implied volatility to realized volatility. The profitability of the delta hedging strategy adopting our model is superior to those utilizing prominent existing models. In empirical analyses, we examine where the superiority of our model comes from in detail.

1. はじめに

デルタヘッジとは、オプション（金融商品の1つであり、所定の期日（満期）に原資産（株式や債券）をあらかじめ定められた価格（権利行使価格）で売買する権利）の価格変動リスクを、原資産（株式など）の売買によって回避（ヘッジ）する方法である。このデルタ

ヘッジによって得られるオプションと原資産のポートフォリオには価格変動リスクがないため、そのリターンは無リスク金利に等しくなるという無裁定条件に基づいてオプションの価格付けがなされている。原資産の変動に幾何ブラウン運動を仮定してオプションの評価式を導出したものが著名なブラックショールズ¹⁾（以下、BS と略す）モデルである。

BS モデルを用いると、オプション価格は、無リスク金利、現在の原資産価格、残存期間（現時点から満期までの期間）、権利行使価格、原資産の満期までの価格変動性（以下、ボラティリティと呼ぶ）の5つのパラメータをインプットすることで得られる。これら5つのパラメータのうち、初めの4つはオプションの価格付けを行う時点で既知のパラメータであり、ボラティリティのみが未知パラメータである。よって、オプション市場価格は、原資産の満期までの価格変動性に市場が織り込む値（インプライドボラティリティ）を用いて値付けされたオプション価格である。3.2節で詳しく述べるが、インプライドボラティリティが満期までの期間における原資産の価格変動から実現したボラティリティ（以下、適宜、実現ボラティリティと呼ぶ）よりも高い場合には、オプションを売却してデルタヘッジ（株式のデルタ量の購入）を行えば収益が得られ、逆に、低い場合にはオプションを購入してデルタヘッジ（株式のデルタ量の売却）を行えば収益が得られる。よって、オプション市場においてデルタヘッジから収益を得るためには、満期までの期間における実現ボラティリティの的確な予測が鍵を握る。

日本の株式オプション市場の価格データを用いたデルタヘッジ戦略に関連する実証的研究は数少なく、著者らの知る範囲では、淵江²⁾、矢萩ら³⁾、星加ら⁴⁾、加藤ら⁵⁾、内田ら⁶⁾にとどまる。この中で、特に、BS モデルの枠組みでオプションのデルタヘッジの収益性を検証した淵江や矢萩らの研究においても、デルタヘッジ戦略を行う時点では、未知となる満期までの期間における実現ボラティリティを事後的に用いて上記のデルタヘッジ戦略を行った場合には理論どおりに収益が得られるが、予測ボラティリティを用いた場合にはデルタヘッジ戦略の収益が負となる確率が高くなっており、適切なボラティリティ予測モデルの重要性が指摘されている。

ボラティリティの予測モデルとして、著名なものに ARCH モデルや GARCH モデルなどの時系列モデルがある。これらの時系列モデルのファイナンスへの応用もさかんに研究されており、これらの時系列モデルを仮定したオプション評価モデルの構築（Heston⁷⁾）や先物ダイナミックヘッジにおけるヘッジ比率の導出（商品先物（Baillie⁸⁾、Bera ら⁹⁾、Myers¹⁰⁾）、為替先物（Kroner ら¹¹⁾）、金利先物（Gagnon ら¹²⁾）、株価指数先物（Park ら¹³⁾、Tong¹⁴⁾、程島ら¹⁵⁾）などがあげられる。また、時系列モデル以外にもボラティリティを予測する研

^{†1} 電気通信大学

The University of Electro-Communications

2 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

究としてインプライドボラティリティを用いた Campbell ら¹⁶⁾ や三井ら¹⁷⁾ があげられる。三井らの研究では日経 225 オプションを用いて、インプライドボラティリティが将来のボラティリティを予測するのに有効であることを示している。しかしながら、オプションのデルタヘッジにおけるボラティリティの指標としての利用は見あたらない。

本研究では、満期までの期間における実現ボラティリティをデルタヘッジ戦略の開始時点ですべて予測する新たなモデルを提案し、提案モデルに基づくデルタヘッジ戦略の収益性を既存の著名なモデルに基づくものと比較する。さらに、提案モデルの有効性がどのようなメカニズムによってもたらされるのかについて詳細に検証する。提案モデルは、インプライドボラティリティとそれに対応する実現ボラティリティとの比に着目してモデル化を行っている点で既存の予測モデルとは異なる。この比が 1 より大きければオプションは割高、逆に 1 より小さければ割安であることを示す。日経 225 オプションのインプライドボラティリティをその期間に実現したボラティリティで割った比をプロットすると、平均回帰性が観測される。この平均回帰性を表現するために本研究では AR モデルと AR モデルにボラティリティに関する投資家の予想を加えた予測モデルを提案する。既存の予測モデルに基づくデルタヘッジ戦略と比較検証する際には、原資産価格に最も近いアットザマネー (ATM) オプションだけでなく、権利行使価格が原資産価格よりも高いアウトオブザマネー (OTM) のコールオプションも分析対象に加え、オプションの権利行使価格による影響も検討する。

本論文の構成は以下のとおりである。次章では、日経 225 インデックスに関するボラティリティについて確認する。3 章では、ボラティリティに関する定義を 3 通り与え、デルタヘッジ戦略とボラティリティ予測モデルについて取り上げる。4 章では、実証分析としてデルタヘッジ戦略の収益性を検証する。最終章では、まとめと結語を与える。

2. 日経 225 インデックスに関するボラティリティ

本章では、2003 年から 2010 年までの期間において、日経 225 インデックスオプション市場価格 (残存期間が 20 営業日) から導出したインプライドボラティリティとオプションの残存期間における日次リターンから導出したボラティリティ (実現ボラティリティと呼ぶ) との推移 (図 1) と本研究におけるボラティリティのモデル化の基礎となるインプライドボラティリティと実現ボラティリティとの比の推移 (図 2) について確認する。図 1 から、両ボラティリティはともに 20% 前後で推移しているが、2008 年 9 月周辺に急上昇している。この時期はリーマンブラザーズが破綻したことであり、日経 225 インデックスの株価が 1 日に数百円動くことが数日にわたって観測され、また、この実現ボラティリティの急騰にとも

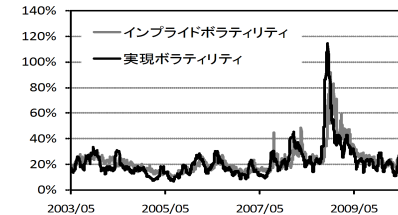


図 1 日経 225 オプションのインプライドボラティリティと実現ボラティリティの推移
Fig. 1 Implied and actual volatilities of Nikkei 225 option.

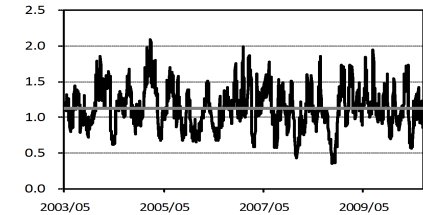


図 2 インプライドボラティリティと実現ボラティリティの比の推移
Fig. 2 The ratio of Nikkei 225 implied volatility to corresponding actual volatility.

なって、インプライドボラティリティも急上昇した。このように両ボラティリティは概して同じ水準ではあるが、時点によっては相応の乖離が見られる。この点を図 2 からより詳細に確認する。

図 2 から、インプライドボラティリティと実現ボラティリティとの比には、(1) 強い平均回帰性が見られること、(2) この比の平均値はわずかながら 1 を上回ること、が確認される。(1) から、ある時点ではオプションを売却して株式をデルタ量購入するデルタヘッジ戦略が有効であり (比が 1 より大)、別の時点では、オプションを購入して株式をデルタ量売却するデルタヘッジ戦略が有効である (比が 1 より小) ことが分かり、しかしながら、(2) から、おしなべてみると、オプションを売却して株式をデルタ量購入するデルタヘッジ戦略の有効性が高いことが想定される。このことは、オプション評価モデルとして確率ボラティリティモデルを利用した場合に観測されるボラティリティリスクプレミアムが正であるとする内田らの研究と整合的である。

3. 3通りのボラティリティ、デルタヘッジ戦略とボラティリティ予測モデル

3.1 3通りのボラティリティ

3通りのボラティリティとして、インプライドボラティリティ、実現ボラティリティ、予測ボラティリティについて説明する。各ボラティリティが対応する期間に関しては図 3 に示した。図 3 において 20 営業日を 1 つの区切りとしているのは、本研究のデルタヘッジ戦略が残存期間 20 営業日のオプションを対象としているためである。また本研究では、実行開始時点が t から $t+1$ にずれれば、時点 $t+1$ から残存期間が 20 営業日のオプションを用いて新しくデルタヘッジ戦略を実行する。そのため各ボラティリティも t 時点から 1 日ず

3 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

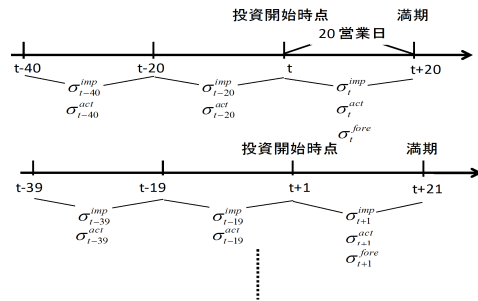


図3 本研究の各ボラティリティに対応する期間の概略
Fig.3 Conceptual figures for periods of volatilities.

れたものを計測または予測する。

3.1.1 インプライドボラティリティ σ_t^{imp}

インプライドボラティリティは、「1.はじめに」で説明したとおり、オプション市場価格に織り込まれる原資産の満期までの価格変動性のことであり、既知パラメータである無リスク金利、現在の原資産価格、残存期間（現時点から満期までの期間）、権利行使価格の4つのパラメータ値をBSモデルに与えたうえで、BSモデル価格が市場価格と一致するようにして求められる。デルタヘッジ開始時点 t におけるインプライドボラティリティ σ_t^{imp} は、時点 t におけるオプション市場価格（満期が20営業日のもの）から導出され、時点 t において市場参加者が実現するであろうと想定する時点 t から満期 $t+20$ までのボラティリティである。

3.1.2 実現ボラティリティ σ_t^{act}

実現ボラティリティとは、株価リターンの実現値から計測されるボラティリティのことである。本研究では1年間を252営業日として式(1)を用いて日次の実現ボラティリティを導出し年率換算している。ここで x_j は j 日における日次の株式リターンを表す ($x_j = \frac{S_j - S_{j-1}}{S_{j-1}}$)。

$$\sigma_{t-i}^{act} = \left(E \left[(x - E[x])^2 \right] * 252 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} (x_{t-i+j} - E[x])^2 * 252 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

ここで、記法について確認しておく。時点に関する表現はインプライドボラティリティの場合に揃え、 σ_t^{act} は時点 t から時点 $t+20$ までの実現ボラティリティ、 σ_{t-20}^{act} は時点 $t-20$ から時点 t までの実現ボラティリティを表す。デルタヘッジ開始時点 t までに既知となる実

現ボラティリティは $i=20$ の σ_{t-20}^{act} までである。 t 時点でデルタヘッジ戦略を決定する際には、 σ_t^{imp} に対応する t 時点から $t+20$ 時点までの実現ボラティリティ σ_t^{act} を予測する必要がある。

3.1.3 予測ボラティリティ σ_t^{fore}

予測ボラティリティとはデルタヘッジ開始時点 t からオプション満期時点 $t+20$ までの実現ボラティリティ σ_t^{act} を予測した値であり、デルタヘッジ戦略を実行する際には予測ボラティリティを用いてデルタヘッジを実行する。このボラティリティは3.3節のモデルを用いて予測される。

3.2 デルタヘッジの考え方とデルタヘッジ戦略

3.2.1 デルタヘッジの考え方

デルタヘッジの考え方を、コールオプションを売却し、株式を購入して無リスクポートフォリオを構築する場合に関して説明する。BSモデルでは、株価が従う確率過程として、式(2)の幾何ブラウン運動を仮定する。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (2)$$

ここで、 S は原資産価格、 μ は株価リターンの期待値、 σ は株価リターンのボラティリティ（実現ボラティリティに対応する $\sigma = \sigma_t^{act}$ ）、 dW_t はウィナー過程である。原資産価格 S が式(2)に従うときに、現時点におけるコールオプション価格を $f(t, S)$ で表すと、伊藤の公式から $f(t, S)$ が従う過程は式(3)で与えられる。

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t \quad (3)$$

式(2)をみると株価の確率的振舞いを示す部分は $\sigma S dW_t$ であり、コールオプション価格の確率的振舞いを示す部分は式(3)の $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t$ である。そこで、コールオプションを1単位売却するとともに原資産株式をデルタ $\frac{\partial f}{\partial S}$ (BSモデルを用いて計算すると $\frac{\partial f}{\partial S} = \Phi(d_1)$ になる)単位購入することによって、オプションの売却にともなう価格変動リスクをヘッジすることができる。ここで Φ と d_1 はそれぞれ式(4)、式(5)である。

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (5)$$

4 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

デルタヘッジにより価格変動リスクをヘッジした無リスクポートフォリオを構築し、偏微分方程式を導き解くことで式 (6) の BS モデルのコールオプション価格を導出することができる。

$$f = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (6)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (7)$$

この BS モデルにオプション市場価格 f 、株価 S 、権利行使価格 K 、残存期間 $T-t$ 、無リスク金利 r を代入して σ を逆算することによりインプライドボラティリティ σ^{imp} を求めることができる。

3.2.2 デルタヘッジ戦略

デルタヘッジを行うことで、株式と銀行預金（収益率は無リスク金利）とのポートフォリオによってオプションの価値を複製することができる。オプション価格（式 (6)）はボラティリティが大きいほど高くなるため、図 1 に示したようにインプライドボラティリティ σ_t^{imp} と実現ボラティリティ σ_t^{act} の大きさが違う場合には、市場オプションは割高や割安な状態で取引されていたことになる（デルタヘッジのコストは式 (6) のボラティリティが σ_t^{act} のときのコールオプション価格（ $f(\sigma_t^{act})$ ）であるため）。そのためインプライドボラティリティ σ_t^{imp} が実現ボラティリティ σ_t^{act} よりも大きい場合（ $\sigma_t^{imp} > \sigma_t^{act}$ ）には、割高なコールオプション（ $f(\sigma_t^{imp})$ ）を売却して実現ボラティリティ σ_t^{act} から計算されるデルタ（ $\frac{\partial f}{\partial S}$ ）に基づくデルタヘッジ（コストは $f(\sigma_t^{act})$ ）を行うことで収益をあげることができる。この取引は割高な市場オプションを売却し、割安な複製オプションを購入するといった反対売買をすることになるので、無リスクでオプション市場価格とデルタヘッジコストの差を収益として得ることができる（ $f(\sigma_t^{imp}) - f(\sigma_t^{act}) > 0$ ）。

しかしながら、現実のデルタヘッジ戦略では、開始時点 t では実現ボラティリティ σ_t^{act} の値を知ることができないため無リスクで収益が得られるようなデルタヘッジ戦略は存在せず、その収益性はどの程度正確に実現ボラティリティ σ_t^{act} を時点 t で予測できるかにかかっている。本研究では実現ボラティリティを 3.3 節のモデルから予測（ σ_t^{fore} ）し、オプション市場価格が割高（割安）と判断されるならば（ $\sigma_t^{imp} > \sigma_t^{fore}$ ）オプションを売却（購入）して予測ボラティリティ σ_t^{fore} に基づきデルタヘッジを行う。予測ボラティリティ σ_t^{fore} が実現ボラティリティ σ_t^{act} の完全な予測である場合には、オプション市場価格 $f(\sigma_t^{imp})$ とボラティリティを σ_t^{fore} （ $= \sigma_t^{act}$ ）としたときのコールオプション価格 $f(\sigma_t^{fore})$ との差がデルタヘッジ戦略の収益として得ることができる。

3.3 予測モデル

本研究ではインプライドボラティリティと実現ボラティリティの比に着目した予測モデルを提案する。図 2 で確認したように、残存期間 20 営業日のオプションのインプライドボラティリティをその期間に対応する実現ボラティリティで割った比（ $\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}$ ）の時系列には平均回帰性が観測される。この点に焦点を当てて、本研究ではこの比を AR モデル（3.3.1 項）を用いてモデル化する。加えて、AR モデルにボラティリティに関する投資家の予想を加えた予測モデル（3.3.2 項）も提案する。提案モデルの比較対象となるモデルとして、3.3.3 項から 3.3.6 項には既存の予測モデルを導入する。本研究ではデルタヘッジ開始時点から満期までが 20 営業日のオプションを対象とするためデルタヘッジ開始時点から 20 営業日後までのボラティリティを予測することになる。また、実現ボラティリティの時系列に単位根の存在が確認されたため、デルタヘッジ開始時点までに観測できる比（ $\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}}$ ）や実現ボラティリティ σ_{t-20}^{act} の変化量を予測するモデルを構築する。各予測モデルのパラメータ（ α_t 、 β_t^i 、 γ_t^i 、 ϕ_t ）やラグ数（ $p = 1, \dots, 8$ 、 $q = 0, \dots, 7$ ）は実行開始時点までに利用可能なデータから AIC をもとに決める。

3.3.1 実現ボラティリティ・インプライドボラティリティ比モデル 1

本モデルは、インプライドボラティリティと対応する実現ボラティリティの比の変動に注目し、AR モデルを用いて予測する（式 (8)）。まず、式 (8) に基づき、過去における比の変化量のデータ $X_{t-i} = \Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right)$ から、将来の比の変化量 $\hat{X}_t = \Delta\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)$ を予測する。ここで、 $\Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right)$ は 20 営業日ごとの階差 $\Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right) = \frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}} - \frac{\sigma_{t-20i-20}^{imp}}{\sigma_{t-20i-20}^{act}}$ 、 $\Delta\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)$ は比の変化量の推定値を表す。本モデルと 3.3.2 項の予測モデルでは、式 (8) で予測した変化量 $\Delta\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)$ を取引開始時点に観測される比 $\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}}$ に加算して実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比を予測する（式 (9)）。この式 (9) を変形した式 (10) から予測ボラティリティ σ_t^{fore} を求める。

$$\hat{X}_t = \alpha_t + \sum_{i=1}^p \beta_t^i X_{t-i} \quad (8)$$

$$\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}} = \frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}} + \Delta\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right) \quad (9)$$

$$\sigma_t^{fore} = \widehat{\sigma}_t^{act} = \sigma_t^{imp} \left(\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}} + \Delta \left(\frac{\widehat{\sigma}_t^{imp}}{\widehat{\sigma}_t^{act}} \right) \right)^{-1} \quad (10)$$

3.3.2 実現ボラティリティ・インプライドボラティリティ比モデル 2

投資家はオプションを評価する際に実現ボラティリティの情報に今後のボラティリティの予想を加えていると考えられる。もし時点 t のインプライドボラティリティ σ_t^{imp} が時点 t までの株価から計算される実現ボラティリティ σ_{t-20}^{act} の値よりも大きい ($\sigma_t^{imp} - \sigma_{t-20}^{act} > 0$) ならば、投資家は時点 $t-20$ から時点 t のボラティリティよりも時点 t から時点 $t+20$ までのボラティリティが大きくなる予想をしていることになる。実現ボラティリティがこの投資家の予想どおりに変化するならば、分母にある将来の実現ボラティリティ σ_t^{act} が大きくなり比の値は小さくなるため、投資家の予想ファクタ ($\sigma_t^{imp} - \sigma_{t-20}^{act}$) と比の変動量 $\widehat{\Delta} \left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}} \right)$ には負の相関が現れると考えられる。本モデルではインプライドボラティリティと実現ボラティリティの差 ($\sigma_t^{imp} - \sigma_{t-20}^{act}$) の直近 20 営業日の平均を投資家の予想としてとらえ、3.3.1 項の AR モデルに投資家の予想を加えた予測モデルを提案する。

$$\Delta \left(\frac{\widehat{\sigma}_t^{imp}}{\widehat{\sigma}_t^{act}} \right) = \alpha_t + \sum_{i=1}^p \beta_t^i \Delta \left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}} \right) + \phi_t \left(\frac{1}{20} \sum_{j=0}^{19} (\sigma_{t-j}^{imp} - \sigma_{t-20-j}^{act}) \right) \quad (11)$$

3.3.3 AR 型モデル

本モデルは式 (8) の AR モデルを $\widehat{X}_t = \widehat{\Delta\sigma}_t^{act}$, $X_{t-i} = \Delta\sigma_{t-20i}^{act}$ としてボラティリティを予測する。3.3.3 項から 3.3.6 項の予測モデルではボラティリティの変化量 $\Delta\sigma_t^{act}$ を予測し、デルタヘッジ開始時点に観測されるボラティリティ σ_{t-20}^{act} に加算して予測ボラティリティ σ_t^{fore} を求める (式 (12))。

$$\sigma_t^{fore} = \widehat{\sigma}_t^{act} = \sigma_{t-20}^{act} + \widehat{\Delta\sigma}_t^{act} \quad (12)$$

3.3.4 ARCH 型モデル

一般的に株価リターンの時系列には、絶対値の大きなリターンの後には同じように絶対値の大きなリターンがともない、ボラティリティが大きくなる傾向が知られている。ARCH 型モデルとは、その傾向を表現するために予測モデルにリターンの 2 乗を組み入れ、ボラティリティを予測するモデルである。ここで用いるリターンは 20 営業日のリターンから導出している ($\mu_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-20}}$)。

$$\widehat{\Delta\sigma}_t^{act} = \alpha_t + \sum_{i=1}^p \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum_{j=0}^q \gamma_t^j \mu_{t-20j}^2 \quad (13)$$

3.3.5 GJR 型モデル

株式市場では、株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者にボラティリティの上昇傾向があることが知られている。Glosten ら¹⁸⁾ は、このボラティリティの非対称性をとらえるためにリターンが負であれば 1、それ以外では 0 になるダミー変数 D_t を用いることによってボラティリティを予測している。本研究では、GJR 型モデルとして式 (13) の ARCH 型モデルにダミー変数 D_t を加えた式 (14) を用いる。ここで D_t は $\mu_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-20}}$ が負であれば 1、それ以外では 0 となる変数である。

$$\widehat{\Delta\sigma}_t^{act} = \alpha_t + \sum_{i=1}^p \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum_{j=0}^q \gamma_t^j \mu_{t-20j}^2 + \phi_t D_t \quad (14)$$

3.3.6 ヒストリカル・インプライド並列モデル

本モデルは、オプション市場価格から得られるインプライドボラティリティの変動をヒストリカルボラティリティの変動に加えて将来の実現ボラティリティを予測するモデルである。本研究における提案モデルの比モデルと予測に利用するデータは同じであるが、その利用法は異なる。

$$\widehat{\Delta\sigma}_t^{act} = \alpha_t + \sum_{i=1}^p \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum_{j=0}^q \gamma_t^j \Delta\sigma_{t-20j}^{imp} \quad (15)$$

4. 実証分析

4.1 分析の目的

本研究の目的は次の 3 つである。

(1) 第 1 の目的は、提案モデルに基づいてデルタヘッジ戦略の収益性が既存の予測モデルに基づくものよりもおしなべて高くなるかどうかを検証することである。つまり、提案モデルの有用性に関する総合的な検証である。

(2) 第 2 の目的は、分析期間を分けたいうで、オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行う場合と、オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行う場合の提案モデルの有用性を検証することである。これは (1) において提案モデルがおしなべて有効であるとの結論を得た

6 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

場合に、サブプライム問題発生以前の市場が安定していた時期と以降の市場が混乱していた時期に分け、市場環境によらず提案モデルが有効であるのか、また、2通り（オプションを売却・購入する場合）のデルタヘッジ戦略のどちらにおいて有用性が顕著に見られるかについて検証することである。

(3) 第3の目的は、予測モデルに基づくデルタヘッジ戦略の収益性が権利行使価格が異なるオプションを用いることによってどの程度の影響を受けるかについて検証することである。これは、オプション市場において通常観測されるスマイル現象（ATM オプションのインプライドボラティリティよりも OTM オプションのインプライドボラティリティの方が高い）がデルタヘッジ戦略の収益性に影響を与えると考えられるからである。

4.2 分析手法

デルタヘッジ戦略の収益性を検証する際に注目する項目は、(1) 勝率、(2) デルタヘッジ戦略の実行回数、(3) デルタヘッジ戦略1回あたりの収益、(4) 総収益、の4項目である。この中で(2) デルタヘッジ戦略の実行回数について説明しておく。第1の目的を検証する際には、すべての時点においてデルタヘッジ戦略を行うわけであるからすべての予測モデルで同じ回数（分析対象期間の全時点）となるが、第2の目的を検証する際には、予測モデルに応じて、オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行うかオプションを購入してデルタヘッジ戦略を行うかについての判断が異なるため、この項目の回数が各予測モデルで異なることになる。もちろん、売却・購入のどちらかの回数が多ければ収益性が高まるといったものではなく、予測モデルの予測精度を高めて、デルタヘッジ戦略を実行する時点でどちらの戦略を行うかについて的確に判断することが収益性の向上につながる。これらをふまえたうえで、第1、第2の目的を検証するために、ATM オプションを対象に以下のStepに基づいて検証する。また、第3の目的を検証するために、OTM オプションを対象に同Stepを実行する。

Step1

各デルタヘッジ開始時点において、各予測モデルのパラメータ値やラグ数 ($p = 1, \dots, 8$, $q = 0, \dots, 7$) を AIC に基づいて推定し、予測ボラティリティを導出する。

Step2

デルタヘッジ開始時点で予測したボラティリティとインプライドボラティリティの比 $\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{fore}}$ を求め、この比が1を上回ればオプションを売却するデルタヘッジ戦略を行い、1を下回ればオプションを購入するデルタヘッジ戦略を行う。各時点から開始するデルタヘッジ戦略が、売却・購入のどちらであったか、また、その戦略を採用した場合に得られる収益および

その収益が正・負のどちらであったかを記録する。

Step3

第1の目的を検証するために、分析対象期間の全時点に関して、Step2で得られた分析結果を集計する。第2の目的を検証するために、各分析対象期間において予測モデルがオプションを売却してデルタヘッジを行うよう指示したデルタヘッジ戦略と購入してデルタヘッジを行うよう指示したデルタヘッジ戦略に分けて Step2で得られた分析結果を集計する。

4.3 データと分析設定

実証分析に用いるデータは、日経 225 インデックス（日本経済新聞社が制定した東京証券取引所第一部に上場する 225 銘柄の株価指数）の終値と大阪証券取引所が公表している 2003 年 5 月から 2010 年 8 月までに満期を迎える日経 225 コールオプションとプットオプションデータである。日経 225 オプションは各月に満期が1つ設定されているが、これだけではサンプル数が数十個程度しか確保できないため、本研究では残存期間 20 営業日のオプション価格データを線形補間によって構築する。具体的には各営業日で取引された残存期間の短い（5 営業日から 20 営業日）オプションと残存期間が 20 営業日より長いオプションのインプライドボラティリティを線形補間し、残存期間が 20 営業日のオプション価格を構築する。なお本研究における無リスク金利は 0 と設定した。これらのオプションデータを用いて 2004 年 12 月 10 日から 2010 年 7 月 14 日までの 1371 営業日において開始するデルタヘッジ戦略の収益性の検証を行う。分析期間中にはサブプライム問題の期間を含んでおり、デルタヘッジ戦略の収益性が変化することが考えられるため、2004 年 12 月 10 日から 2007 年 8 月 8 日の前半期とパリバショックが起きた 2007 年 8 月 9 日から 2010 年 7 月 14 日までの後半期に分けた分析も行う。また、本研究では各予測モデルのパラメータを推定するために 2003 年 5 月 1 日からデルタヘッジ開始時点までの全データ（デルタヘッジ開始時点によってデータ数は変わる）を用いた。大阪証券取引所では 2003 年から 2008 年 9 月 11 日までは権利行使価格が 500 円刻み、2008 年 9 月 12 日からは 250 円刻みで設定されたオプションが売買されている。本研究では、原資産価格に最も近い権利行使価格の OTM オプションを ATM オプション、ATM オプションから権利行使価格が 500 円高い（低い）オプションを OTM コール（プット）オプションと定義する。

4.4 分析結果

本研究のデルタヘッジ戦略は、各実行開始時点においてパラメータを AIC に基づき推定するため、各予測モデルにおいて 1371 時点に関するパラメータが存在する。予測モデルごとに各時点で得られたパラメータの平均値を表 1 に示した。比モデル 1, 2 と並列モデルで

7 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

表 1 予測モデルのパラメータの平均値
Table 1 Average parameter values of forecasting model.

		α	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	γ_0	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	ϕ	
比 1	call ATM	0.00	-0.78	-0.65	-0.76	-0.73	-0.35	-0.18	-0.15	-0.05										
	put ATM	0.01	-0.80	-0.68	-0.79	-0.74	-0.33	-0.19	-0.14	-0.04										
	call OTM	0.00	-0.73	-0.60	-0.72	-0.65	-0.29	-0.15	-0.15	-0.10										
	put OTM	0.02	-0.74	-0.63	-0.73	-0.67	-0.27	-0.14	-0.12	-0.02										
比 2	call ATM	0.01	-0.77	-0.61	-0.71	-0.69	-0.32	-0.17	-0.13	-0.04										-0.48
	put ATM	0.01	-0.80	-0.68	-0.79	-0.74	-0.33	-0.18	-0.13	-0.04										0.09
	call OTM	0.00	-0.71	-0.55	-0.66	-0.60	-0.26	-0.12	-0.11	-0.08										-0.63
	put OTM	0.02	-0.74	-0.62	-0.73	-0.67	-0.27	-0.13	-0.11	-0.01										-0.04
AR		0.04	0.52	-0.01	-0.04	-0.06	0.31	0.02	-0.07	0.14										
ARCH		0.00	-0.67	-0.59	-0.58	-0.62	-0.35	-0.28	-0.27	-0.31	2.12	0.06	0.32	-0.04	-0.67	0.15	-0.50	-1.06		
GJR		0.00	-0.67	-0.59	-0.58	-0.62	-0.35	-0.28	-0.27	-0.31	2.12	0.08	0.31	-0.05	-0.67	0.14	-0.50	-1.35	0.03	
並列	call ATM	0.00	-0.54	-0.41	-0.37	-0.39	-0.07	0.02	-0.07	0.07	0.32	0.18	0.22	0.45	0.01	0.13	0.28	0.12		
	put ATM	0.00	-0.82	-0.91	-1.00	-1.07	-0.62	-0.41	-0.32	-0.13	0.66	0.77	0.88	0.96	0.65	0.32	0.08	0.01		
	call OTM	0.00	-0.49	-0.34	-0.35	-0.38	-0.05	0.03	-0.08	0.07	0.25	-0.13	0.44	0.63	0.11	0.27	0.18	0.10		
	put OTM	0.00	-0.71	-0.74	-0.80	-0.86	-0.44	-0.28	-0.23	-0.09	0.52	0.52	0.60	0.66	0.42	0.22	0.01	0.08		

表 2 デルタヘッジの収益性 (全体)
Table 2 Profitability of delta hedging strategy (total).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
call	勝率	87.1%	60.7%	61.1%	57.5%	55.8%	56.1%	58.0%
	収益 (1 回)	67.8	17.1	17.3	3.8	4.2	4.6	7.0
	総収益	92978	23392	23689	5149	5728	6335	9589
put	勝率	91.0%	66.9%	66.6%	60.4%	56.4%	56.7%	57.6%
	収益 (1 回)	72.6	14.1	13.1	6.1	1.6	2.1	5.0
	総収益	99597	19351	17895	8315	2154	2830	6884

表 3 ATM コールオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (前半期)
Table 3 Profitability of delta hedge strategy with ATM call option (Former half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	89.5%	62.9%	63.2%	57.3%	56.5%	57.3%	59.7%
	実行回数	655	655	655	655	655	655	655
	収益 (1 回)	53.3	12.9	11.0	1.5	0.8	1.7	7.0
売却	総収益	34902	8426	7235	996	511	1114	4566
	勝率	91.7%	72.3%	72.3%	68.6%	69.3%	70.0%	71.2%
	実行回数	445	505	509	500	485	486	479
購入	収益 (1 回)	49.2	22.2	20.9	15.7	15.5	16.1	20.3
	総収益	21884	11191	10632	7846	7522	7804	9741
	勝率	84.8%	31.3%	31.5%	20.6%	20.0%	20.7%	28.4%
	実行回数	210	150	146	155	170	169	176
	収益 (1 回)	62.0	-18.4	-23.3	-44.2	-41.2	-39.6	-29.4
	総収益	13019	-2765	-3397	-6850	-7011	-6690	-5175

は推定に用いるオプションに応じて予測ボラティリティの値が変わるため、分析対象ごとにパラメータが異なる。

次に、本研究の第 1 の分析目的に関する分析結果を表 2 に、第 2 の分析目的に関する分析結果を表 3、表 4、表 5、表 6 に示した。また、第 3 の分析目的に関する分析結果を表 7、表 8、表 9、表 10 にまとめた。

まず、表 2 に着目する。表 2 にあるインサンプルの列は、デルタヘッジ戦略を行う期間における実現ボラティリティをデルタヘッジ戦略開始時点において既知であるとした場合の結果を示す。3.2.2 項で述べたように、デルタヘッジ開始時点においてデルタヘッジ戦略を行う期間における実現ボラティリティが既知であれば、デルタヘッジ戦略を採用すると、現

実の株価過程が幾何ブラウン運動に近い場合には、収益はほとんどの場合にプラスになり勝率は 1 に近くなる。各表においてインサンプルの列の勝率が 1 より小さくなっているのは、現実の株価過程が幾何ブラウン運動でとらえきれない部分があること、デルタヘッジのリバランスの間隔が日次であり連続的なデルタヘッジができないことなどによる。しかしながら、やはり、インサンプルデータを用いたデルタヘッジ戦略の収益性をみるとコール、プツ

8 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

表 4 ATM プットオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (前半期)

Table 4 Profitability of delta hedge strategy with ATM put option (Former half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	92.4%	71.3%	71.0%	59.8%	59.2%	60.3%	65.2%
	実行回数	655	655	655	655	655	655	655
	収益 (1 回)	55.8	12.0	11.6	-0.7	2.1	3.1	13.5
	総収益	36548	7836	7597	-436	1391	2057	8869
売却	勝率	92.8%	76.1%	76.1%	69.2%	68.9%	69.5%	74.8%
	実行回数	469	540	535	523	514	518	461
	収益 (1 回)	50.1	15.6	15.6	8.5	11.7	12.3	21.5
	総収益	23517	8433	8355	4466	6003	6350	9913
購入	勝率	91.4%	48.7%	48.3%	22.7%	24.1%	25.5%	42.3%
	実行回数	186	115	120	132	141	137	194
	収益 (1 回)	70.1	-5.2	-6.3	-37.1	-32.7	-31.3	-5.4
	総収益	13031	-597	-758	-4902	-4612	-4293	-1044

表 5 ATM コールオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (後半期)

Table 5 Profitability of delta hedge strategy with ATM call option (Latter half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	84.9%	58.7%	59.2%	57.7%	55.2%	55.0%	56.4%
	実行回数	716	716	716	716	716	716	716
	収益 (1 回)	81.1	20.9	23.0	5.8	7.3	7.3	7.0
	総収益	58076	14966	16453	4153	5217	5221	5023
売却	勝率	82.4%	64.4%	64.8%	69.2%	66.0%	66.0%	67.4%
	実行回数	482	542	540	413	359	356	396
	収益 (1 回)	62.2	28.9	30.3	28.0	35.1	35.5	28.8
	総収益	29979	15680	16351	11584	12615	12627	11413
購入	勝率	90.2%	40.8%	42.0%	41.9%	44.3%	44.2%	42.8%
	実行回数	234	174	176	303	357	360	320
	収益 (1 回)	120.1	-4.1	0.6	-24.5	-20.7	-20.6	-20.0
	総収益	28097	-714	102	-7431	-7398	-7406	-6391

トオプションともに勝率は高く、戦略 1 回あたりの収益も大きい。この結果は、予測モデルが完全に将来の実現ボラティリティを予測できた場合にデルタヘッジ戦略からどの程度の収益が得られるかを示す指標であり、いわば予測モデルの目標値といえる。

表 2 から、提案モデルの収益性を既存モデルと比較すると、勝率で 3% から 10% 上回り、1 回あたりの収益や総収益は 3 倍程度となり、おしなべて見た場合に提案モデルの有効性が確認される。

次に、表 3 から表 6 の分析結果から、第 2 の分析目的に関する分析結果を検討する。ま

表 6 ATM プットオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (後半期)

Table 6 Profitability of delta hedge strategy with ATM put option (Latter half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	89.7%	62.8%	62.6%	60.9%	53.8%	53.4%	50.7%
	実行回数	716	716	716	716	716	716	716
	収益 (1 回)	88.1	16.1	14.4	12.2	1.1	1.1	-2.8
	総収益	63049	11515	10299	8751	763	773	-1984
売却	勝率	90.1%	67.5%	67.4%	72.0%	67.1%	66.8%	65.4%
	実行回数	543	650	645	500	425	422	433
	収益 (1 回)	73.6	25.6	24.7	30.4	29.1	29.3	25.3
	総収益	39940	16635	15941	15225	12350	12348	10937
購入	勝率	88.4%	16.7%	18.3%	35.2%	34.4%	34.0%	28.3%
	実行回数	173	66	71	216	291	294	283
	収益 (1 回)	133.6	-77.6	-79.5	-30.0	-39.8	-39.4	-45.7
	総収益	23109	-5120	-5642	-6474	-11587	-11575	-12922

表 7 OTM コールオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (前半期)

Table 7 Profitability of delta hedge strategy with OTM call option (Former half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	91.0%	70.4%	73.3%	64.4%	63.2%	63.1%	64.1%
	実行回数	655	655	655	655	655	655	655
	収益 (1 回)	35.7	0.1	3.8	-7.5	-8.4	-8.9	-10.4
	総収益	23405	87	2507	-4928	-5483	-5831	-6793
売却	勝率	94.4%	79.6%	80.5%	76.3%	77.3%	77.0%	76.9%
	実行回数	447	500	523	486	467	469	459
	収益 (1 回)	30.6	8.7	10.7	3.2	3.6	3.2	1.9
	総収益	13693	4336	5590	1576	1679	1497	888
購入	勝率	83.7%	40.6%	44.7%	30.2%	28.2%	28.0%	34.2%
	実行回数	208	155	132	169	188	186	196
	収益 (1 回)	46.7	-27.4	-23.4	-38.5	-38.1	-39.4	-39.2
	総収益	9712	-4250	-3083	-6504	-7162	-7328	-7681

ず表 3、表 4 の前半期における ATM オプションを売却した結果から、提案モデルの勝率は既存モデルを上回り、収益もほとんどの場合で既存予測モデルを上回っていることが分かる。次にオプションを購入するデルタヘッジ戦略に着目すると、勝率が既存予測モデルよりも 10% 以上も上回っている。また、1 回あたりの収益や総収益は、いずれの予測モデルを利用した場合でもマイナスとなるものの、提案モデルによるマイナス幅は既存モデルによるマイナス幅の半分以下となっている。オプションを売却するデルタヘッジ戦略の結果と合わせると、オプションを売却、購入するどちらの場合でも、提案モデルは既存モデルよりも精度

9 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

表 8 OTM プットオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (前半期)

Table 8 Profitability of delta hedge strategy with OTM put option (Former half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	89.5%	76.9%	76.9%	71.3%	71.3%	70.7%	67.0%
	実行回数	655	655	655	655	655	655	655
	収益 (1 回)	36.0	7.1	7.0	-4.0	-6.9	-6.6	-3.6
	総収益	23576	4649	4617	-2592	-4544	-4313	-2341
売却	勝率	88.8%	80.1%	80.2%	76.0%	76.8%	76.9%	73.0%
	実行回数	507	579	575	575	557	553	519
	収益 (1 回)	31.6	6.3	6.3	-1.7	-5.2	-5.0	-3.3
	総収益	15998	3671	3641	-978	-2901	-2774	-1724
購入	勝率	91.9%	52.6%	53.8%	37.5%	39.8%	37.3%	44.1%
	実行回数	148	76	80	80	98	102	136
	収益 (1 回)	51.2	12.9	12.2	-20.2	-16.8	-15.1	-4.5
	総収益	7578	977	976	-1614	-1643	-1538	-617

表 9 OTM コールオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (後半期)

Table 9 Profitability of delta hedge strategy with OTM call option (Latter half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	85.5%	66.6%	67.6%	60.8%	56.6%	56.8%	59.5%
	実行回数	716	716	716	716	716	716	716
	収益 (1 回)	63.3	12.3	20.0	-0.9	-2.8	-3.1	3.0
	総収益	45353	8791	14341	-612	-2027	-2233	2169
売却	勝率	88.2%	76.0%	74.0%	80.3%	70.0%	70.6%	73.2%
	実行回数	381	408	450	335	283	282	298
	収益 (1 回)	46.9	26.1	30.0	25.9	27.3	27.2	26.6
	総収益	17882	10638	13494	8679	7732	7661	7927
購入	勝率	82.4%	54.2%	56.8%	43.6%	47.8%	47.9%	49.8%
	実行回数	335	308	266	381	433	434	418
	収益 (1 回)	82.0	-6.0	3.2	-24.4	-22.5	-22.8	-13.8
	総収益	27471	-1847	847	-9290	-9759	-9894	-5758

良くボラティリティを予測することができていたのではないかと考えられる。

続いて、表 5、表 6 から後半期における売買によるデルタヘッジ戦略の収益の違いを検証する。ATM オプションを売却するデルタヘッジ戦略の勝率や 1 回あたりの収益は、提案モデルが既存モデルに若干劣るものの、戦略の実行回数が提案モデルでは既存モデルよりも 3、4 割程度多くなるため、総収益では既存モデルを上回っている。次に、表 5 の ATM コールオプションを購入するデルタヘッジ戦略の勝率に着目すると、唯一比モデル 2 だけが、プラスの収益を得ていることが確認できる。また、表 6 の ATM プットオプションを

表 10 OTM プットオプションを用いたデルタヘッジ戦略の収益性 (後半期)

Table 10 Profitability of delta hedge strategy with OTM put option (Latter half).

		インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
合計	勝率	93.7%	77.4%	76.3%	67.9%	63.0%	62.6%	56.1%
	実行回数	716	716	716	716	716	716	716
	収益 (1 回)	86.6	32.1	26.9	11.3	4.3	3.6	-3.2
	総収益	61970	22990	19229	8058	3044	2551	-2286
売却	勝率	94.2%	78.1%	77.7%	74.2%	74.8%	74.6%	72.2%
	実行回数	605	708	701	604	523	520	496
	収益 (1 回)	75.6	34.2	31.9	24.0	26.3	25.9	23.6
	総収益	45723	24235	22349	14470	13729	13465	11724
購入	勝率	91.0%	12.5%	6.7%	33.9%	31.1%	30.6%	20.0%
	実行回数	111	8	15	112	193	196	220
	収益 (1 回)	146.4	-155.6	-208.0	-57.3	-55.4	-55.7	-63.7
	総収益	16247	-1245	-3120	-6412	-10685	-10914	-14010

購入する場合に着目すると、提案モデルの勝率や 1 回あたりの収益は小さくなるが、総収益のマイナス幅でみると、提案モデルによるマイナス幅は既存モデルによるマイナス幅の 2 分の 1 程度となっている。これは、提案モデルに基づく場合にオプションを購入してデルタヘッジ戦略を採用するように指示する実行回数が既存モデルに基づく場合より 200 回程度少ないことによるものと考えられる。プットオプションを売却する場合と合わせると、既存予測モデルでは、本来オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行うのが望ましい場合に、オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行うことをしばしば指示していたのではないかと考えられる。

また、各予測モデルの前半期と後半期の収益性を比較すると後半期の勝率が前半期を下回るが、デルタヘッジ戦略 1 回あたりの収益は後半期の方が大きくなっていることが分かる。これはサブプライム問題などで将来のボラティリティを予測することが難しくなっていたため後半期の勝率は下がるが、インプライドボラティリティが上昇しオプション価格が前半に比べ高くなったため、戦略 1 回あたりの収益が大きくなったと考えられる。

次に表 7 から表 10 の OTM オプションのデルタヘッジ戦略の収益性から第 3 の分析目的に関する分析結果を検討する。前半期、後半期ともにインサンプルにおいて 1 回あたりの収益が ATM オプションの場合に比べて低下している。これは、OTM オプションの価格自体が ATM オプションよりも小さくなるため、それにともない市場オプションと複製オプションの価格差も小さくなるためである。各予測モデルでもこの傾向はあり、OTM オプションのデルタヘッジ戦略の収益は、ATM オプションを用いた場合に比べて小さくなって

いる。しかし、後半期における OTM プットオプションと ATM プットオプションの収益を比較すると OTM オプションを用いた場合の方が大きくなっている。これは、サブプライム問題などでボラティリティスキューが強く現れ、OTM プットオプションのインプライドボラティリティが高く、オプション価格が比較的高かったことや ATM オプションに比べて OTM オプションを用いた場合の勝率が高いことなどが考えられる。また、提案モデルと既存モデルの収益性を比較すると既存モデルでは収益が負になる場合が多くなっているが、提案モデルではいずれの場合も正の収益を得ることができており、提案モデルの優位性が増している。この理由としては、ATM オプションの場合と同様に、既存予測モデルでは、本来オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行うのが望ましい場合に、オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行うことをしばしば指示していたことが考えられる。

4.5 分析結果の考察

ここでは、前節の分析結果に関する考察として、どのような理由から提案モデルに基づくデルタヘッジ戦略が既存モデルに基づくものよりも優れた収益性を得ることができたかについて考察する。また、2つの比モデルを比較のうえ、利点や特徴についても最後に議論する。考察に先立って前節の分析結果から、(1) 提案モデルの予測精度が既存モデルのものよりも高い、(2) 提案モデルではオプションを売却してデルタヘッジ戦略を指示する場合が既存モデルの場合よりも多い、ため、提案モデルは既存モデルよりも高い収益性を生み出したことが想定される。まず、概念モデルを用いて、(1)、(2)の場合に、デルタヘッジ戦略において高い収益性が得られることを確認しておく。

3.2節において述べたように、デルタヘッジ開始時点においてインプライドボラティリティが予測ボラティリティよりも大きい場合に ($\sigma_t^{fore} < \sigma_t^{imp}$) オプションを売却して予測ボラティリティ σ_t^{fore} に基づきデルタヘッジを行う。逆に、デルタヘッジ開始時点においてインプライドボラティリティが予測ボラティリティよりも小さい場合に ($\sigma_t^{fore} > \sigma_t^{imp}$) オプションを購入して予測ボラティリティ σ_t^{fore} に基づきデルタヘッジを行う。ここで、予測ボラティリティやインプライドボラティリティと実現ボラティリティとの関係を整理しておく。これらの関係は、

$$\sigma_t^{fore} = \sigma_t^{act} + \varepsilon_t^{fore} \quad (16)$$

$$\sigma_t^{imp} = \sigma_t^{act} + \varepsilon_t^{imp} \quad (17)$$

と表せる。ここで、式 (16) における ε_t^{fore} と式 (17) における ε_t^{imp} はともに実現ボラティリティを推定する際の誤差であるがまったく意味合いは異なる。 ε_t^{fore} は、予測モデルの精度を

高めることで原理的にいくらかでも小さくすることが可能な推定誤差である。一方、 ε_t^{imp} はオプション市場価格から得られたインプライドボラティリティと実現ボラティリティとの乖離であるため、オプション市場が将来の実現ボラティリティについて誤った見込みをしていた大きさを表すものである。この乖離が大きければ的確に推定した予測ボラティリティを用いたデルタヘッジ戦略を行うことで大きな収益をあげることができる。ちなみに、この推定誤差は大きな正のバイアスを持つ ($E[\varepsilon_t^{imp}] > 0$) ことが、図 2 に示したインプライドボラティリティと実現ボラティリティとの比の平均値が 1 を上回ることから見て取れる。

この点をふまえたうえで、 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の結合分布、デルタヘッジ戦略を行う領域とその勝敗に関する概念図を図 4 に示した。デルタヘッジ開始時点において、オプションを売却して予測ボラティリティ σ_t^{fore} に基づきデルタヘッジを行うのは、 $\sigma_t^{fore} < \sigma_t^{imp}$ の場合、推定誤差で表現すると $\varepsilon_t^{fore} < \varepsilon_t^{imp}$ の場合であるから、図 4 の 1 と 2 の領域で、オプションを売却するデルタヘッジ戦略を行うことになる。このとき、1 では将来の実現ボラティリティよりもインプライドボラティリティが高い場合にオプションを売却することになるので正の収益が得られるが、2 では将来の実現ボラティリティよりもインプライドボラティリティが低い場合にオプションを売却することになるのでデルタヘッジ戦略の収益は負となる。次に、オプションを購入するデルタヘッジ戦略を行うのは、図 4 の 3 と 4 の領域である。3 では将来の実現ボラティリティよりもインプライドボラティリティが高い場合にオプションを購入することになるのでデルタヘッジ戦略の収益は負となるが、4 では将来の実現ボラティリティよりもインプライドボラティリティが低い場合にオプションを購入することになるので収益は正となる。

これらのことを把握したうえで、予測モデルの精度が向上した場合に図 4 の概念図がどのように変化するかについて確認する。図 5 には、図 4 よりも精度が高い予測モデルを採用した場合の概念図を示した。予測モデルの精度が高まると、領域 1 の確率が領域 2 の確率より大きい度合いが図 4 の場合よりも際立つ。同様に、領域 4 の確率が領域 3 の確率より大きい度合いが図 4 の場合よりも際立つ。つまり、予測モデルの精度を高めることで、収益性の向上につながる事が確認される。

次に、予測モデルの推定誤差 ε_t^{fore} とインプライドボラティリティの推定誤差 ε_t^{imp} に正の相関がある場合について検討する。この点に着目する理由は、提案モデルが将来の実現ボラティリティとインプライドボラティリティとの比に基づいて構築されているため、株価のみの時系列データに基づく既存モデル(並列型以外の予測モデル)よりも両者の相関が高くなると考えられるからである。そこで、予測モデルの推定誤差 ε_t^{fore} とインプライドボラティ

11 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

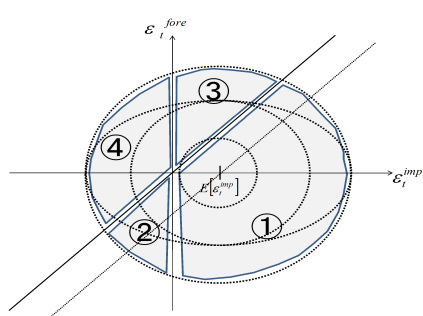


図4 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の結合分布
Fig. 4 Joint distribution of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} .

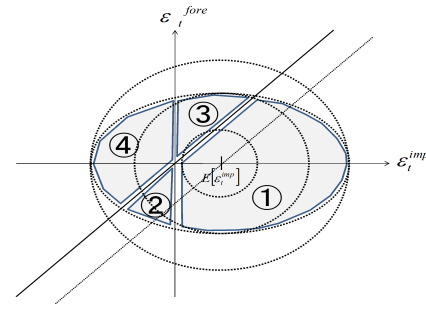


図5 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の結合分布 (ε_t^{fore} が小さい場合)
Fig. 5 Joint distribution of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (with smaller ε_t^{fore}).

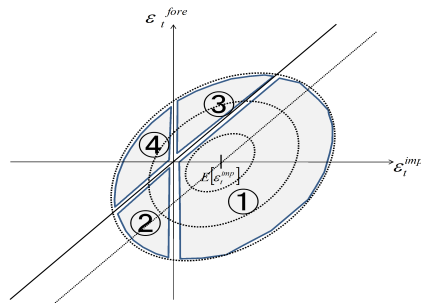


図6 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の結合分布 (正の相関がある場合)
Fig. 6 Joint distribution of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (with positive correlation in ε_t^{fore} and ε_t^{imp}).

リティの推定誤差 ε_t^{imp} に正の相関がある場合の模式図を図6に示した。図6と図4を比較すると、オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行う領域(領域1, 領域2)の確率は、推定誤差に正の相関がある場合の方(図6)が無相関の場合(図4)よりも大きいことが分かる。その裏返しとして、オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行う領域(領域3, 領域4)の確率は、推定誤差に正の相関がある場合の方(図6)が無相関の場合(図4)よりも小さいことが分かる。市場がインプライドボラティリティを将来の実現ボラティリティよりも割高に評価する傾向にあり推定誤差 ε_t^{imp} が正のバイアスを持つ場合には、オプションを売却してデルタヘッジを行う戦略の方が収益性は高い。つまり、提案モデルでは、この戦

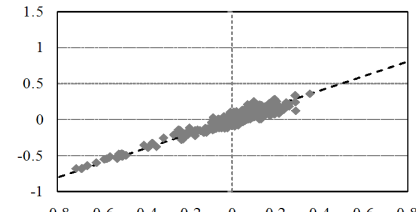


図7 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図(比モデル1)
Fig. 7 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (Ratio model 1).

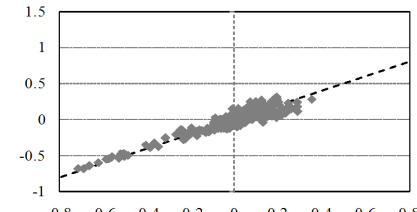


図8 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図(比モデル2)
Fig. 8 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (Ratio model 2).

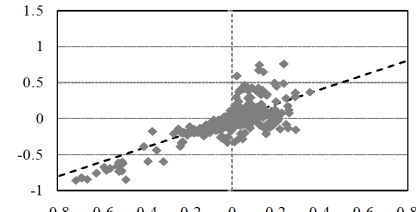


図9 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図(ARモデル)
Fig. 9 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (AR model).

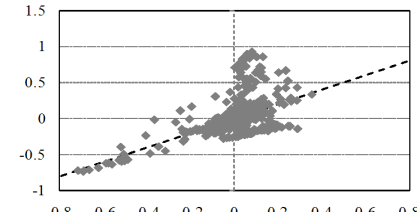


図10 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図(ARCHモデル)
Fig. 10 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (ARCH model).

略を既存モデルよりも数多く指示するため、収益性が高まることになる。

それでは、実証分析期間における予測モデルの推定誤差 ε_t^{fore} とインプライドボラティリティの推定誤差 ε_t^{imp} との関係はどのようになっていたのだろうか。提案モデルである比モデル1, 比モデル2, 既存モデルであるAR型モデル, ARCH型モデル, GJR型モデル, 並列モデルを採用し, ATMコールオプションを用いた場合の, ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図(プットオプション, OTMオプションの場合も同様の傾向であった)をそれぞれ図7, 図8, 図9, 図10, 図11, 図12に示した。まず, 予測精度に関して図7, 図8に示す比モデル1, 2と図9から図12に示す既存モデルを比較しよう。縦軸が ε_t^{fore} の散らばりを表す予測精度である。比モデルでは $-0.7 \sim 0.4$ 程度で分布しているのに対して, 既存モデルでは最も予測精度が高いAR型モデルでも $-0.8 \sim 0.8$ 程度で分布しており, ARCH型, GJR型では $-0.8 \sim 1.0$ 程度, 並列型では $-0.8 \sim 1.4$ 程度となっていることが分かる。これらの分析結果から比モデルの予測精度の高さがうかがえる。次に, ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の相関について確認する。比モデルの散布図(図7, 図8)では, 傾き1の回帰直線からそれほど乖離することなくプ

12 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

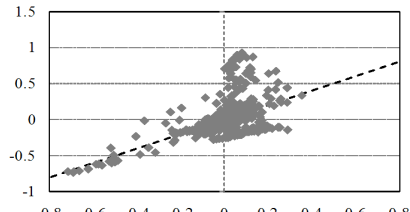


図 11 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図 (GJR モデル)
Fig. 11 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (GJR model).

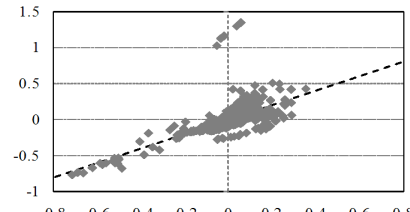


図 12 ε_t^{fore} と ε_t^{imp} の散布図 (並列モデル)
Fig. 12 Scatter chart of ε_t^{fore} and ε_t^{imp} (Parallel model).

ロットされているのに対して、既存モデルではプロットが回帰直線から大きく乖離していることが見て取れる。つまり、提案モデルでは、予測モデルの推定誤差 ε_t^{fore} とインプライドボラティリティの推定誤差 ε_t^{imp} との正の相関は既存モデルよりも強いことが分かる。このように、提案モデルの収益性が既存モデルの収益性が高い理由が、おおむね先に示した 2 つの要因によるものであることが裏付けられた。

最後に 2 つの提案モデルの特徴について述べる。デルタヘッジ戦略の収益を見るとコールオプションを用いた場合には比モデル 2 が、プットオプションを用いた場合には比モデル 1 の収益が良くなっている。今回提案した比モデル 2 は比モデル 1 にインプライドボラティリティと実現ボラティリティの差を投資家の予想として加えたモデルである。もしも投資家の予想どおりに実現ボラティリティが変化し、投資家の予想と比に負の相関があるならば、その関係をとらえることができる比モデル 2 は比モデル 1 よりも精度良く実現ボラティリティを予測することができる。表 1 の比モデル 2 のパラメータ ϕ を見るとコールオプションの場合には係数がマイナスになっていることが分かる。コールオプションを用いた場合には投資家の予想ファクタと予測する比に負の相関があり、そういった関係をとらえることができた比モデル 2 の収益が比モデル 1 よりも大きくなったと考えられる。しかし、プットオプションの場合には、パラメータの絶対値が小さくなっており、投資家の予想と比には相関関係が現れない場合も存在した。

5. まとめと結語

本研究では、オプションのデルタヘッジ戦略への利用をふまえて、将来の実現ボラティリティを予測するモデルを提案し、既存モデルに基づく場合とデルタヘッジ戦略の収益性を比較検討した。提案モデルは、実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比に関する

る時系列データを利用したものであり、株価のみの時系列データを利用した既存モデルやインプライドボラティリティを株価データに加える形で利用した既存モデルとは異なる。提案モデルに基づくデルタヘッジ戦略の収益性は、既存モデルに基づくものより高くなる。この要因を探るため、予測ボラティリティやインプライドボラティリティの推定誤差に注目して詳細に検討したところ、(1) 提案モデルの予測精度が既存モデルのものよりも高い、(2) 提案モデルではオプションを売却してデルタヘッジ戦略を指示する場合は既存モデルの場合よりも多い、ため、提案モデルは既存モデルよりも高い収益性を生み出したことが裏付けられた。

ボラティリティの計測や予測におけるサンプリング間隔に依存して、提案モデルの予測精度がどのような影響を受けるかなどに関する詳細な検証は今後の課題としたい。

謝辞 初稿を改善するために有益なコメントをくださった 2 人の査読者には心から御礼申し上げます。本研究は科研費（基盤研究（C）22510143）の助成を受けたものである。

参 考 文 献

- 1) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637–654 (1973).
- 2) 淵江哲郎：日経平均株価オプションのダイナミック・ヘッジング, 日本経営財務研究会第 26 回全国大会第 8 セッション第 2 報告書 (2002).
- 3) 矢萩一樹, 宮崎浩一：デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル, 情報処理学会論文誌：数理モデル化と応用, Vol.46, No.SIG10 (TOM12), pp.158–171 (2005).
- 4) 星加裕文, 宮崎浩一：日経 225 オプションのデルタヘッジに関する一考察, 京都大学数理解析研究所講究録, 1548, pp.218–225 (2007).
- 5) 加藤 明, 宮崎浩一：日本株式市場局面とインプライド・ボラティリティ, 京都大学数理解析研究所講究録, 1548, pp.210–217 (2007).
- 6) 内田康嗣, 宮崎浩一：日経 225 オプション市場のボラティリティ・リスク・プレミアム, 現代ファイナンス, Vol.23, pp.35–59 (2008).
- 7) Heston, S.L.: A Closed-form GARCH option valuation model, *Review of Financial and Studies*, Vol.13, pp.585–625 (2000).
- 8) Baillie, R.R.: Bivariate GARCH Estimation of the Commodity Futures Hedge, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.6, pp.109–124 (1991).
- 9) Bera, A.K., Garcia, P. and Roh, J.S: Estimation of Time-Varying Hedge Ratios for Corn and Soybeans: BGARCH and Random Coefficient Approaches, *Economics Working Paper Archive at WUSTL*, pp.39–53 (1997).
- 10) Myers, R.: Estimating timevarying optimal hedge ratios on futures markets, *Econometric Theory*, Vol.11, pp.39–53 (1991).

13 ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

- 11) Kroner, K.F. and Sultan, J.: Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.28, pp.535-551 (1993).
- 12) Gagnon, L. and Lypny, G.: Hedging short term interest risk under time varying distributions, *Journal of Futures Markets*, Vol.15, pp.767-783 (1995).
- 13) Park, T. and Switzer, N.: Bivariate GARCH estimation of the optimal hedge ratios for stock index futures, A note, *Journal of Futures Markets*, Vol.15, pp.61-67 (1995).
- 14) Tong, W.: An examination of dynamic hedging, *Journal of International Money and Finance*, Vol.15, pp.19-35 (1996).
- 15) 程島次郎, 芦谷政浩: 東証株式指数の時変ヘッジ比率の推定, *オイコノミカ*, Vol.3-4, No.6, pp.1-17 (2003).
- 16) Campbell, R.H. and Robert, E.W.: Market volatility prediction and the efficiency of the SP 100 index option market, *Journal of Financial Economics*, Vol.31, pp.43-73 (1992).
- 17) 三井秀俊, 竹内明香: ヒストリカル・ボラティリティとインプライドボラティリティの予測精度に関する検証, *日本大学経済学部産業経営研究*, Vol.26, pp.85-101 (2004).
- 18) Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D.E.: On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *The Journal of Finance*, Vol.48, pp.1779-1801 (1993).

(平成 22 年 11 月 16 日受付)

(平成 22 年 12 月 25 日再受付)

(平成 23 年 1 月 24 日採録)



田中健太郎

昭和 61 年生．平成 21 年電気通信大学システム工学科卒業．同年電気通信大学大学院システム工学専攻修士課程入学，現在に至る．



宮崎 浩一（正会員）

昭和 42 年生．平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了．博士（経営学）．電気通信大学システム工学科専任講師等を経て，平成 19 年度から電気通信大学システム工学科准教授，現在に至る．日本オペレーションズ・リサーチ学会，JAFEE，日本応用数理学会，応用統計学会等各会員．