

常微分方程式のある解法について*

伊藤直人** 竹内敬治** 北原紀之**

Abstract

This paper presents a method of successive approximation for integrating a given ordinary differential equation

$$y' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = \alpha_0.$$

The solution curve is approximated by discrete values, each of which is a mean value for the very small interval. Firstly, numerical integration formulas are derived from a given initial value α_0 and two functions predetermined by integrating the function $f(x, y)$ both once and twice with respect to x with y fixed. Secondly, we estimate the local and accumulated truncation errors.

This algorithm is easily programmable, which can deal with some nonlinear differential equations and certain differential equations not approachable by the Runge-Kutta-Gill method, such as $y' = y \cdot \log x$.

1. ま え が き

現在、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = \alpha_0 \quad (1)$$

を数値計算によって解く方法が種々提案されている。たとえば、一段階法では、Euler 法および Runge-Kutta-Gill 法が著名である。これらは、解曲線の勾配を計算し、解曲線を順次延長していく方法である。この勾配を求めるとき、区間内では数回の、とくに、Euler 法ではわずか一回の計算を行うだけでよく、計算量において有利な方法である。

我々は、区間内で y を定数と見なしたとき、 x に関する $f(x, y)$ の積分が初等関数で表わされる場合に、初期値問題 (1) を解く方法を開発した。

まず、 x 軸上に基点 x_j ($j=0, 1, 2, \dots, n$) をとる。区間 $D_j = \{x; x_{j-1} < x \leq x_j\}$ の幅は一定である必要はないが、簡単のため、すべての j について定数 h であるとする。正数 K, L, M によって決まる領域 $R = \{(x, y); x_0 \leq x \leq x_0 + K, \alpha_0 - L \leq y \leq \alpha_0 + M\}$ で

* A Method of Numerical Integration of Ordinary Differential Equations by Naoto ITO Keiji TAKEUCHI and Noriyuki KITAHARA (Maizuru Technical Collage).

** 舞鶴工業高等専門学校

x を固定し、 y を区間 $S = \{y; \alpha_0 - L \leq y \leq \alpha_0 + M\}$ で動かしたとき

$$A(x) = \max_{y \in S} |f(x, y)| \quad (2)$$

$$B(x) = \sup_{\substack{y \neq z \\ y, z \in S}} \left| \frac{f(x, y) - f(x, z)}{y - z} \right| \quad (3)$$

によって $A(x), B(x)$ を決める。このとき、

$$\int_{x_0}^{x_0 + K'} A(t) dt \leq \max(L, M) \quad (4)$$

をみたす正数 $K' < K$ があるとする。 $x_{n+1}^* = x_n^* \leq K'$ となるようにとる。区間の幅 h を十分小さくすれば

$$B_j = \int_{D_j} B(t) dt \ll 1 \quad (5)$$

が成り立つとする。

今、 y を定数とみなして

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= \int_{x_0}^x f(t, y) dt \\ F_2(x, y) &= \int_{x_0}^x F_1(t, y) dt \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とすると、つぎの漸化式を得る。

$$\left. \begin{aligned} y_j^* &= \alpha_{j-1} + \frac{1}{h} \{F_2(x_j, \alpha_{j-1}) - F_2(x_{j-1}, \alpha_{j-1})\} \\ &\quad - F_1(x_{j-1}, \alpha_{j-1}) \\ \alpha_j &= \alpha_{j-1} + F_1(x_j, y_j^*) - F_1(x_{j-1}, y_j^*) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

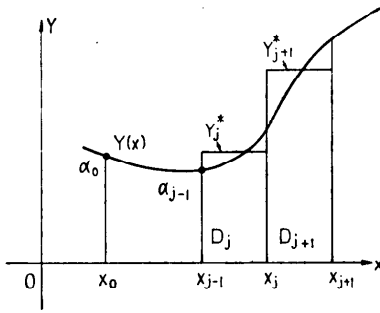


Fig. 1 Numerical approximations by a sequence of mean values.

$$(j=1, 2, 3, \dots, n)$$

この y_j^* は、区間 D_j での $y(x)$ の平均値を近似するものであり、 α_j は基点 x_j での $y(x)$ の値を近似するものである (Fig. 1).

この方法は、あらかじめ式 (6) によって x に関する $f(x, y)$ の積分が、手計算で求めることができるものに限られるが、他方 Lipschitz 条件が成り立たない式であっても、式 (4) 式 (5) が成り立てば、数値解を求めることができる。これにより、問題 (1) の解法としての適用分野の拡張が行われている。

以下、まず漸化式 (7) の構成を示す。つぎに、Picard の逐次近似法による厳密解と、われわれの数値解とを比較して、局所打ち切り誤差および累積打ち切り誤差の評価を行う。

$$A_j = \int_{D_j} A(t) dt \quad (8)$$

とおけば、数値解 α_n と厳密解 $y(x_n)$ との差は

$$\prod_{j=1}^n A_j B_j \prod_{k=1}^n (1 - B_k)^{-1} \quad (9)$$

を越えないことを示すことができる。ただし、計算誤差は考えないことにする。最後に具体例を若干述べる。

2. 漸化式の構成

関数 $y(x)$ の区間 D_j における平均値を \bar{y}_j とする。

$$\bar{y}_j = \frac{1}{h} \int_{D_j} y(t) dt \quad (10)$$

問題 (1) を積分方程式として表現すれば

$$y(x) = \alpha_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (11)$$

であるから、式 (11) を式 (10) に代入し、 $y(x)$ が各区間 D_j で平均値 \bar{y}_j に等しいとみなせば

$$\begin{aligned} \bar{y}_j &= \frac{1}{h} \int_{D_j} \left\{ \alpha_0 + \int_{x_0}^{\xi} f(t, y(t)) dt \right\} d\xi \\ &\doteq \alpha_0 + \frac{1}{h} \int_{D_j} \sum_{k=1}^{j-1} \int_{D_k} f(t, \bar{y}_k) dt d\xi \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{D_j} \int_{x_{j-1}}^{\xi} f(t, \bar{y}_j) dt d\xi \\ &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{D_k} f(t, \bar{y}_k) dt + \frac{1}{h} \int_{D_j} \int_{x_{j-1}}^{\xi} f(t, \bar{y}_j) dt d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。さて

$$\beta_{j-1} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{j-1} \int_{D_k} f(t, \bar{y}_k) dt$$

は、区間 $[0, x_{j-1}]$ で決まる量であるが、これを使うと

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_j &= \beta_{j-1} + \frac{1}{h} \int_{D_j} \int_{x_{j-1}}^{\xi} f(t, \bar{y}_j) dt d\xi \\ \beta_j &= \beta_{j-1} + \int_{D_j} f(t, \bar{y}_j) dt \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

を得る。式 (13) の第 1 式の右辺の $[\bar{y}_j]$ を β_{j-1} で代用することによって、漸化式

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_j^* &= \alpha_{j-1} + \frac{1}{h} \int_{D_j} \int_{x_{j-1}}^{\xi} f(t, \alpha_{j-1}) dt d\xi \\ \alpha_j &= \alpha_{j-1} + \int_{D_j} f(t, y_j^*) dt \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

を得る。これを書き改めたものが式 (7) である。

3. 局所打ち切り誤差

岡村¹⁾によれば、 $f(x, y)$ は x を固定したとき、 y に関して区間 S で連続であり、 y を固定したとき、 x に関して区間 $T = \{x; x_0 \leq x \leq x_0 + K\}$ で可測関数²⁾であり、かつ $A(x)$, $B(x)$ が区間 T で積分可能²⁾ならば、区間 $T' = \{x; x_0 \leq x \leq x_0 + K'\}$ で唯一の解をもつ。 $f(x, y)$ に対する我々の条件、式 (4)、式 (5) が成り立っているとき、上記の岡村の条件は成り立つから、我々の考察している方程式 (1) には唯一の厳密解が存在している。

基点 x_{j-1} で初期値 α_{j-1} をとる Picard の i 回目の逐次近似解は

$$\left. \begin{aligned} y_j^{(i)}(x) &= \alpha_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^x f(t, y_j^{(i-1)}(t)) dt \\ (i=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

で与えられるから

$$|y_j^{(1)}(x) - \alpha_{j-1}| \leq \int_{x_{j-1}}^x A(t) dt \leq \int_{D_j} A(t) dt = A_j \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |y_j^{(i)}(x) - z_j^{(i)}(x)| &\leq \int_{x_{j-1}}^x |f(t, y_j^{(i-1)}(t)) \\ &\quad - f(t, z_j^{(i-1)}(t))| dt \\ &\leq \int_{D_j} B_j(t) |y_j^{(i-1)}(t) - z_j^{(i-1)}(t)| dt \end{aligned} \quad (17)$$

である。ここで、

$$\|y(x)\|_{D_j} = \sup_{x \in D_j} |y(x)| \quad (18)$$

というノルムを導入すると

$$\begin{aligned} \|y_j^{(i)}(x) - z_j^{(i)}(x)\| &\leq \int_{D_j} B_j(t) \|y_j^{(i-1)}(t) \\ &\quad - z_j^{(i-1)}(t)\|_{D_j} dt \\ &\leq B_j \|y_j^{(i-1)}(x) - z_j^{(i-1)}(x)\|_{D_j} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。Понтрягин³⁾によれば、

$$\|y_j^{(i+1)}(x) - y_j^{(i)}(x)\|_{D_j} \leq A_j B_j^i \quad (20)$$

であり、厳密解 $y_j(x)$ は、

$$y_j(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} y_j^{(i)}(x) \quad (21)$$

で与えられる。したがって、

$$\begin{aligned} |y_j(x_j) - y_j^{(2)}(x_j)| &\leq \sum_{i=2}^{\infty} |y_j^{(i+1)}(x_j) - y_j^{(i)}(x_j)| \\ &\leq \sum_{i=2}^{\infty} A_j B_j^i = \frac{A_j B_j^2}{1 - B_j} \end{aligned} \quad (22)$$

である。一方、式 (14) 式 (15) より部分積分を行えば、任意の $x \in D_j$ に対して

$$\begin{aligned} y_j^* - y_j^{(1)}(x) &= \frac{1}{h} \int_{D_j} \int_{x_{j-1}}^{\xi} f(t, \alpha_{j-1}) dt d\xi \\ &\quad - \int_{x_{j-1}}^x f(t, \alpha_{j-1}) dt \\ &= \frac{x_j}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t, \alpha_{j-1}) dt - \int_{D_j} \frac{\xi}{h} f(\xi, \alpha_{j-1}) d\xi \\ &\quad - \int_{x_{j-1}}^x f(t, \alpha_{j-1}) dt \\ &= \int_x^{x_j} \frac{x_j - \xi}{h} f(\xi, \alpha_{j-1}) d\xi \\ &\quad + \int_{x_{j-1}}^x \frac{x_j - \xi}{h} f(\xi, \alpha_{j-1}) d\xi \\ &\quad - \int_{x_{j-1}}^x \frac{x_j - x_{j-1}}{h} f(t, \alpha_{j-1}) dt \\ &= \int_x^{x_j} \frac{x_j - \xi}{h} f(\xi, \alpha_{j-1}) d\xi \\ &\quad - \int_{x_{j-1}}^x \frac{\xi - x_{j-1}}{h} f(\xi, \alpha_{j-1}) d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

を得るから

$$|y_j^* - y_j^{(1)}(x)| \leq \int_x^{x_j} |f(\xi, \alpha_{j-1})| d\xi$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{x_{j-1}}^x |f(\xi, \alpha_{j-1})| d\xi \\ &\leq \int_{D_j} |f(\xi, \alpha_{j-1})| d\xi \leq A_j \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。また式 (14) 式 (15) より

$$\begin{aligned} |\alpha_j - y_j^{(2)}(x_j)| &\leq \int_{D_j} |f(t, y_j^*) - f(t, y_j^{(1)}(t))| dt \\ &\leq \int_{D_j} B_j(t) |y_j^* - y_j^{(1)}(t)| dt \\ &\leq A_j \int_{D_j} B_j(t) dt = A_j B_j \end{aligned} \quad (25)$$

となり、式 (22) 式 (25) より

$$\begin{aligned} |\alpha_j - y_j(x_j)| &\leq |\alpha_j - y_j^{(2)}(x_j)| + |y_j^{(2)}(x_j) - y_j(x_j)| \\ &\leq A_j B_j + \frac{A_j B_j^2}{1 - B_j} = \frac{A_j B_j}{1 - B_j} \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。区間 D_j における局所打ち切り誤差は、式 (26) の右辺を越えることはない。

4. 累積打ち切り誤差

区間 D_j での2つの初期値 α_{j-1} , $\bar{\alpha}_{j-1}$ についての2つの厳密解をそれぞれ $y_j(x)$, $\bar{y}_j(x)$ とすれば、任意の $x_j \in D_j$ について式 (19) と同様にして

$$\begin{aligned} \|y_j(x) - \bar{y}_j(x)\|_{D_j} &\leq |\alpha_{j-1} - \bar{\alpha}_{j-1}| \\ &\quad + B_j \|y_j(x) - \bar{y}_j(x)\|_{D_j} \end{aligned} \quad (27)$$

を得るから

$$\|y_j(x) - \bar{y}_j(x)\|_{D_j} \leq \frac{|\alpha_{j-1} - \bar{\alpha}_{j-1}|}{1 - B_j} \quad (28)$$

となる。これより

$$|y_j(x_j) - \bar{y}_j(x_j)| \leq \frac{|\alpha_{j-1} - \bar{\alpha}_{j-1}|}{1 - B_j} \quad (29)$$

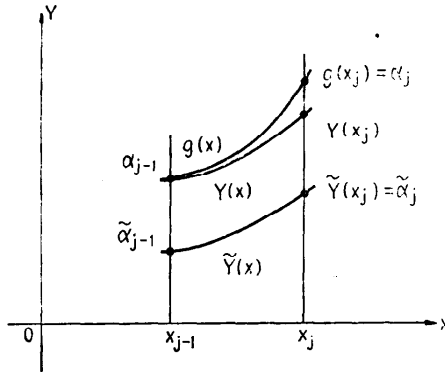
を得る。Fig. 2 (次頁参照) において、 α_{j-1} を数値解で得られた区間 D_j での初期値、 $\bar{\alpha}_{j-1} = y(x_{j-1})$ を厳密解の $x = x_{j-1}$ における値と考えれば、式 (26) 式 (29) により

$$\begin{aligned} |\bar{y}(x_j) - \alpha_j| &\leq |\bar{y}(x_j) - y_j(x_j)| + |y_j(x_j) - \alpha_j| \\ &\leq \frac{|\bar{\alpha}_{j-1} - \alpha_{j-1}|}{1 - B_j} + \frac{A_j B_j}{1 - B_j} \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。この漸化式 (30) をまとめて式 (9) を得る。累積打ち切り誤差は式 (9) の右辺を越えることはない。

5. 具体例

$\theta > 0$ として $y' = x^{\theta-1}y$, $y(0) = 1$ について考えてみよう。式 (6) より $F_1(x, y) = x^{\theta}y/\theta$, $F_2(x, y) = x^{\theta+1}y/\theta(\theta+1)$ であるので式 (7) により



Numerical solution $g(x) = \alpha_{j-1} + F_1(x, y_j^*) - F_1(x_{j-1}, y_j^*)$

Exact solution $y(x) = \alpha_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^x f(t, y(t)) dt$

Exact solution $\tilde{y}(x) = \tilde{\alpha}_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^x f(t, \tilde{y}(t)) dt$

Fig. 2 A diagram of solution of a differential equation to show the relations between exact and numerical solution.

$$\left. \begin{aligned} y_1^* &= 1 + \frac{h^\theta}{\theta(\theta+1)} \\ \alpha_1 &= 1 + \frac{h^\theta}{\theta} + \frac{h^{2\theta}}{\theta^2(\theta+1)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

を得る。厳密解は、 $y(x) = \exp(x^\theta/\theta)$ であるから

$$y(x_1) = 1 + \frac{h^\theta}{\theta} + \frac{h^{2\theta}}{2\theta^2} + O(h^{3\theta}) \quad (32)$$

である。よって

$$y(x_1) - \alpha_1 = \frac{\theta-1}{2\theta^2(\theta+1)} h^{2\theta} + O(h^{3\theta}) \quad (33)$$

を得る。これより θ が 0 に近いとき、誤差は大きくなるのがわかる。我々の数値解法は区間内で $y(x)$ を定数とみなすのであるから、当然の結果である。

いろいろ実験した結果、我々の手法は、Euler 法よりかなり正確であり、Runge-Kutta-Gill 法より、かなり不正確であることがわかった。Table 1, 2, 3 は 相対誤差 (= (厳密解 - 数値解) / 厳密解) によるこれらの方法との比較を示す。使用した計算機は TOSBAC 3400-31 である。Table 4, 5 は、Euler 法などに適用できない微分方程式の具体例であり、パラメータ h を変えた場合の相対誤差を計算したものである。

また $f(x, y)$ が変数 x について不連続である場合にも不連続点に特別な注意をすることなく、数値解を得ることができる。例えば $y(x) = \exp(|\sin ax|)$ を解とする微分方程式は

Table 1 Relative errors in integration $y' = y$, $y(0) = 1$, $h = 2^{-s}$ (exact solution $y(x) = e^x$)

| x | our method 10^{-4} | Euler 10^{-4} | R. K. G 10^{-3} | exact |
|------|----------------------|-----------------|-------------------|-------------|
| 0.25 | 0.10 | 19 | 0.48 | 1.284025417 |
| 0.50 | 0.23 | 39 | 0.92 | 1.648721271 |
| 0.75 | 0.30 | 58 | 1.3 | 2.117000017 |
| 1.00 | 0.40 | 77 | 1.8 | 2.718281823 |

Table 2 Relative errors in integration $y' = x \cdot y^2$, $y(0) = 0.2$, $h = 2^{-s}$

(exact solution $y(x) = (5 - \frac{1}{2}x^2)^{-1}$)

| x | our method 10^{-7} | Euler 10^{-3} | R. K. G 10^{-3} | exact |
|------|----------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 0.25 | 0.53 | 0.40 | 0.31 | 0.2012573616 |
| 0.50 | 2.4 | 0.83 | 0.63 | 0.2051282051 |
| 0.75 | 6.3 | 1.3 | 0.90 | 0.2119205293 |
| 1.00 | 14 | 1.9 | 1.2 | 0.2222222222 |

Table 3 Relative errors in integration

$y'' = 5y' - 6y + x^2 \cdot e^x$, $y(0) = 1.75$, $y'(0) = 2.25$, $h = 2^{-s}$

(exact solution $y(x) = e^{2x} - e^{2x} + \frac{1}{4}e^x(2x^2 + 6x + 7)$)

| x | our method 10^{-4} | Euler 10^{-3} | R. K. G 10^{-3} | exact |
|------|----------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 0.25 | 0.27 | -0.30 | -0.24 | 2.300401059 |
| 0.50 | -1.6 | -2.4 | -1.0 | 2.564486094 |
| 0.75 | -20 | -16 | -4.9 | 1.675734537 |
| 1.00 | 59 | 36 | 9.6 | -2.502923967 |

Table 4 The effect of parameter h on relative errors in integration $y' = y \cdot \log x$, $y(0) = 1$ (exact solution $y(x) = \exp(x \cdot \log x - x)$).

| x | $h = 2^{-5}, 10^{-3}$ | $h = 2^{-6}, 10^{-3}$ | $h = 2^{-7}, 10^{-3}$ | exact |
|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
| 0.25 | -2.6 | -0.73 | -0.21 | 0.55070 |
| 0.50 | -2.7 | -0.76 | -0.21 | 0.42838 |
| 0.75 | -2.7 | -0.77 | -0.21 | 0.38069 |
| 1.00 | -2.7 | -0.77 | -0.22 | 0.36788 |

Table 5 The effect of parameter h on relative errors in integration $y' = y/\sqrt{x}$, $y(0) = 1$ (exact solution $y(x) = \exp(2\sqrt{x})$)

| x | $h = 2^{-5}, 10^{-3}$ | $h = 2^{-6}, 10^{-3}$ | $h = 2^{-7}, 10^{-3}$ | exact |
|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|
| 0.25 | -0.89 | -0.60 | -0.37 | 2.718 |
| 0.50 | -0.88 | -0.60 | -0.37 | 4.113 |
| 0.75 | -0.87 | -0.60 | -0.37 | 5.652 |
| 1.00 | -0.87 | -0.60 | -0.37 | 7.389 |

$$\left. \begin{aligned} y' &= (-1)^{\left[\frac{ax}{\pi}\right]} ay \cos ax \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

である。ここで $[]$ はガウス記号である。このとき式 (6) より

$$F_1(x, y) = y |\sin ax| \quad (35)$$

$$F_2(x, y) = \frac{y}{a} \left\{ 1 + 2 \left[\frac{ax}{\pi} \right] - (-1)^{\left[\frac{ax}{\pi}\right]} \cos ax \right\} \quad (36)$$

であり、刻み幅などを考慮することなく、統一したア

ルゴリズムを用いることができる。

参考文献

- 1) H. Okamura: Sur l'approximation successive et l'unicité de la solution de $dy/dx=f(x,y)$, Mem. Sci. Kyoto. Imp. Univ, A (14) pp 85~96 (1931).

- 2) 溝畑 茂: ルベーク積分, p. 266, 岩波書店, 東京 (1966)
- 3) А. С. Понтрягин: Обыкновенные дифференциальные уравнения, p. 331, Наука, Москва (1965)

(昭和50年8月4日受付)

(昭和50年11月25日再受付)
