



## 論文

## 画像構造線の大域的性質に関する計算機実験とその考察\*

榎本 肇\*\* 片山 卓也\*\* 吉田 孝登志\*\*

## Abstract

Computer experiment on global properties of structure lines of images using graphic display is discussed.

The structure lines of images, which were introduced by the authors, are shown to be very useful in image processing and we have been studying their properties mathematically and their local properties are almost made clear so far.

As for their global properties, such as how they are connected or how an image or a curved surface is expressed by using them, they are very important in applications, but it is very difficult to know them mathematically. So we have done computer experiments by drawing structure lines on a graphic display and obtained results which seem reliable and useful.

## まえがき

平滑化された画像を表わす  $C^2$  級スカラー関数  $\varphi(x, y)$  は、曲面  $z = \varphi(x, y)$  を表現していると考えられるが、この曲面の構造を大域的に表現するものとして構造線が定義されている。構造線によって分離される各領域は、単調な曲面で近似でき、これらの曲面を貼り合わせると、元の曲面をかなり正確に表わすことができることが、実験的に確かめられる。このことから、構造線は画像の有力情報の抽出、画像再合成などのアプリケーションにとって有用であると考えられる。そのためにも、構造線の諸性質を明らかにすることが必要である。その局所的な性質については、既にほとんど明らかになっている。

一方、大域的性質に関しては、いくつかの性質が経験的に予想されているが、それらに対しては直観的な証明しか行われていないものが多い。というのも、一般に大域的な微分幾何学がまだ十分に確立されていないため、その成果を利用できないからである。しかしながら、構造線の有用性は特にその大域的な諸性質、つまり、元の曲面の復原力を持つのみならず、領域内

\* Computer Experiment on Global Properties of Structure Lines of Images using Graphic Display and its Considerations by Hajime ENOMOTO, Takuya KATAYAMA and Takatoshi YOSHIDA (Department of Computer Science, Faculty of Eng., Tokyo Institute of Technology).

\*\* 東京工業大学工学部情報工学科

の極値の数、それらの間の結びつきなどの曲面の位相情報をも表現できることにある。従って、構造線の大域的性質はぜひ明らかにしておかねばならない問題である。

以上の理由から、我々は構造線の大域的性質を幾つかの予想定理としてまとめ、それらがどの程度成立しているものかを、計算機によって実験的に確かめることにした。こうして現在まで数々の実験を重ねているが、まだ予想定理を覆す結果は得られておらず、予想定理に表わされる構造線の大域的性質は、かなり普遍的な広範囲な曲面の族に対して成立しているものと考えられる。

## 1. 構造線の定義と局所的性質

ここでは、構造線の定義<sup>1)</sup>を簡単に述べ、続いて本論の目的とする大域的性質の議論に必要な構造線の局所的性質を列挙する。証明は、紙面の都合で割愛する。

(定義 1.1) (構造線: Structure Line)

2次元ユークリッド空間上で定義される  $C^2$  級スカラー関数  $\varphi(x, y)$  に対して、次の3つの集合を考える。

$$S_1 = \{(x, y) | C[\varphi] = {}^t X^T H X = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y) | D[\varphi] = {}^t X^T H X^T = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y) | E[\varphi] = {}^t X H X = 0\}$$

$$\text{ただし } X = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}, X^T = \begin{pmatrix} -\varphi_y \\ \varphi_x \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

$${}^tX = (\varphi_x \varphi_y), \quad {}^tX^\perp = (-\varphi_y \varphi_x)$$

$S_1$  を特徴線 (C-line),  $S_2$  を分割線 (D-line),  $S_3$  を輪郭線 (E-line) とよび, これらを総称して構造線という。☒

なお, 以下において, 構造線の表わす曲面  $z = \varphi(x, y)$  上の曲線も, 混同がない場合構造線と呼ぶ。

また, 表記法として,  $\varphi(x, y)$  と書くときは通常の直交座標系による表現であり,  $\psi(u, v)$  と書くときは,  $\text{grad } \varphi$  方向を  $u$ , 等高線方向を  $v$  とする局所直交座標系による表現であるとする。

〔命題 1.1〕

$\text{grad } \varphi = 0$  のとき

$$C(\varphi) = 0 \iff \text{力線の曲率} = 0$$

$$D(\varphi) = 0 \iff \text{等高線の曲率} = 0$$

$$E(\varphi) = 0 \iff \text{力線方向の法曲率} = 0 \quad \square$$

〔定義 1.2〕 (縮退, 非縮退画像)

$\text{grad } \varphi = 0$  かつ  $|H| \neq 0$  なる点以外では, 同一構造線の接ベクトル方向は一意に定まる時,  $\varphi$  は非縮退画像であると言い, そうでない時,  $\varphi$  は縮退画像であると言う。☒

〔定義 1.3〕 (分割, 単分割領域)

分割線で区切られた, 内部に分割線を含まない領域を分割領域と言う。特に, 非縮退画像  $\varphi$  の場合, これを単分割領域と言う。☒

〔定義 1.4〕 (特異点, 特徴点)

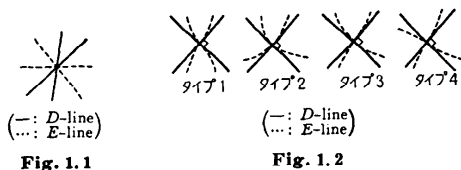
構造線の接ベクトル方向が一意的に決まらないような点を特異点と言う。  $\text{grad } \varphi = 0$  となる特異点を特徴点と言う。接ベクトル方向が 0 個の場合, 孤立特異点という。☒

〔補題 1.1〕 (特徴線の性質)

非縮退画像の特徴線の特異点はすべて特徴点であり孤立特異点である場合を除けば,  $\neg (\varphi_{xy} = 0 \wedge \varphi_{xx} = \varphi_{yy})$  のとき, 2 個の接ベクトル方向を持ち直交する。☒

〔補題 1.2〕 (分割線, 輪郭線の性質)

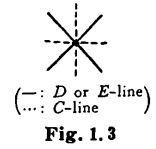
非縮退画像  $\varphi$  の分割線又は輪郭線の特異点はすべて特徴点であり, 孤立特異点を除けばすべて鞍部点である。鞍部点では接ベクトル方向は 2 個存在し,  $\Delta \varphi$



$\neq 0$  の時互いに他を分離し (Fig. 1.1),  $\Delta \varphi = 0$  の時各線は直交し, 両線は互いに接している (Fig. 1.2)。☒

〔補題 1.3〕 (特徴線と分割線輪郭線との関係)

鞍部点において, 特徴線は分割線輪郭線と互いに他を分離している。



(Fig. 1.3)。☒

〔補題 1.4〕 (曲面の凹凸と分割線輪郭線の関係)

分割線, 輪郭線で区切られた極小領域で,  $D(\varphi) < 0$  かつ  $E(\varphi) < 0$  の領域は凸面を完全に包含しており,  $D(\varphi) > 0$  かつ  $E(\varphi) > 0$  の領域は凹面を完全に包含している (Fig. 1.4~Fig. 1.7)。☒

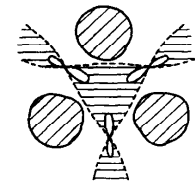
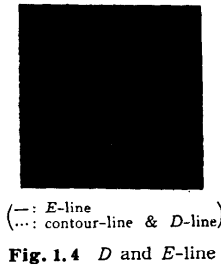


Fig. 1.5 Area of  $D(\varphi)$ ,  $E(\varphi) < 0$  (///) and that of  $D(\varphi)$ ,  $E(\varphi) > 0$  (〰)

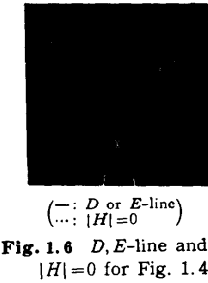


Fig. 1.6 D, E-line and  $|H| = 0$  for Fig. 1.4

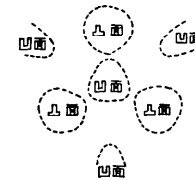


Fig. 1.7  $|H| = 0$  and convex-concave relationship of Fig. 1.4

分割線, 輪郭線は, 補題 1.4 から曲面の凹凸情報を含んでいると言える。以下, 両線によって決定される領域に, 次表の様なラベルを割り当てる (Table 1.1, Fig. 1.8)。☒

	$E(\varphi)$	$D(\varphi)$
ラベル1の領域	-	-
ラベル2の領域	-	+
ラベル3の領域	+	-
ラベル4の領域	+	+

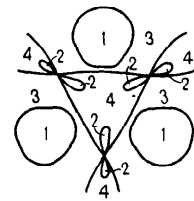


Fig. 1.8 Labeling of Fig. 1.4

〔定理 1.1〕 (鞍部点近傍の構造線の接続構造)

鞍部点近傍の構造線の接続構造は, Fig. 1.9 に示

す4タイプ(8個)のいずれかであり, ラベル2, 3の領域には極大点も極小点も存在し得ない.  $\square$

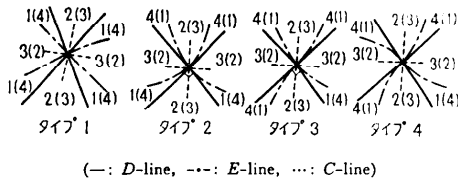


Fig. 1.9 Intersection of structure line in the neighbour of saddle points

〔命題 1.2〕(等高線と分割線)

鞍部点において, 等高線は分割線と接する.  $\square$

## 2. 構造線の大域的性質

ここでは, 本論の主目的である構造線の大域的性質に関する定理および予想定理を列挙する. 定理の証明と予想定理の直観的証明は 3. で, 予想定理を検証するグラフィック・ディスプレイを用いた計算機実験システムおよび実験結果は, それぞれ 4. と 5. で述べる.

〔定理 2.1〕(特徴線の性質)

分割線(輪郭線)を介して隣接する鞍部点間では, 重複(特徴線が接する場合)も含めると特徴線が奇数回分割線(輪郭線)と交叉する.  $\square$

〔予想定理 2.2〕(輪郭線の性質)

等高線が一般に閉路を成すという程度の意味で, 一般に輪郭線は閉路を成す.  $\square$

〔定理 2.3〕(分割領域と極値)

分割領域内の単一線分上に極大(小)点が2個以上存在することはあり得ない.  $\square$

〔予想定理 2.4〕(単分割領域内の極値数)

$D(\varphi) < 0 (> 0)$  なる単分割領域  $\sigma$  に存在し得る極大(小)点の数は, 領域境界  $|\sigma|$  に存在する鞍部点の数 (Fig. 2.1 のような自己閉路を持つ場合は, 鞍部点1個で2個とみなす) を越えない (Fig. 2.1).  $\square$

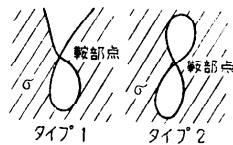


Fig. 2.1 Saddle points with self loop and simple area considered

〔定義 2.1〕(非縮退画像の単分割領域数)

自己閉路で, 最外殻の単分割領域と隣接しているものがあれば, 無限領域に延長 (Fig. 2.2 例1) した後, 各単分割領域  $\sigma$  について, 境界  $|\sigma|$  に存在する鞍部点数を,  $NSP(\sigma)$  とするとき

$NSP(\sigma) = 0 \rightarrow \sigma$ : 無視 (0個分と見る)

$NSP(\sigma) \geq 2 \rightarrow \sigma$ : 1個分と見る

$NSP(\sigma) = 1 \rightarrow$  その鞍部点 SP について

$\{ N\sigma(SP) = 1 \rightarrow \sigma$ : 自己閉路以外無視

$\{ N\sigma(SP) \geq 2 \rightarrow$  該当する  $\sigma$  を合わせて1個分と見る.

ただし,  $NSP(\sigma)$ :  $|\sigma|$  上の鞍部点数

$N\sigma(SP)$ :  $NSP(\sigma) = 1$  かつ,

$SP \in |\sigma|$  なる  $\sigma$  の数.

なる操作を全  $\sigma$  にわたって適用した後の  $\sigma$  の総数を非縮退画像  $\varphi$  の単分割領域の数  $NU(\varphi)$  と定義する (Fig. 2.2).  $\square$

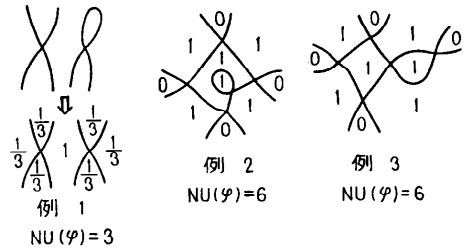


Fig. 2.2 Number of simple area

〔予想定理 2.5〕(単分割領域の数と極値の総数)

非縮退画像  $\varphi$  の, 極大点と極小点の総数は, 単分割領域の数  $NU(\varphi)$  と一致する.  $\square$

以上を考慮すると, 分割線輪郭線の接続構造の代表的パターンとして, 次の主構造を定義できる.

〔定義 2.2〕(主構造: Typical Structure)

画像  $\varphi$  の主構造とは, 次のような非縮退画像の分割線輪郭線接続構造のことである: 分割線は連結であり,  $D(\varphi) < 0$  なる単分割領域は極大点を1個含み,  $D(\varphi) > 0$  なる単分割領域は極小点を1個含む. さらに各単分割領域は, 自分と  $D(\varphi)$  の符号の異なる単分割領域と隣接している. 輪郭線は極大点の囲りに閉路を成すものと, 鞍部点において,  $D(\varphi) < 0$  なる単分割領域側に8の字型を描くものことから成る (Fig. 2.3).  $\square$

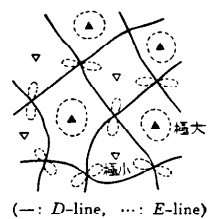


Fig. 2.3 Typical structure

〔予想定理 2.6〕(非縮退画像の主構造以外の輪郭線)

非縮退画像  $\varphi$  の輪郭線の主構造以外のパターンは, Fig. 2.4 に示す部分的パターンに分類できる (Fig. 2.4 (次頁参照)).  $\square$

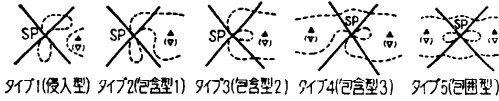


Fig. 2.4 Non-principal E-lines of non-degenerated images

〔予想定理 2.7〕 (E-変換)

輪郭線の任意の接続構造は、主構造に次の E-変換を繰り返すことで得られる (Fig. 2.5).

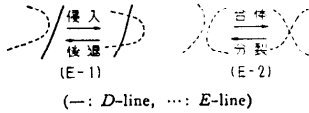


Fig. 2.5 E-transformation

5). □

〔予想定理 2.8〕 (閉輪郭線内の極値数)

閉輪郭線の囲む領域で、少なくとも  $|H| > 0$  なる部分を含んでいるものについて、領域内境界近傍で、 $E(\varphi) < 0$  である場合は、内部に存在する極大点数を  $N_M$ 、極小点数を  $N_{Hm}$  とし、 $E(\varphi) > 0$  である場合は内部に存在する極小点数を  $N_m$ 、極大点数を  $N_{HM}$  とし、いずれの場合も内部 (境界) の鞍部点数を  $N_{SP}$  とすると、次式が成立する。

$$N_M = N_{SP} - N_{Hm} + 1$$

$$N_m = N_{SP} - N_{HM} + 1 \quad \square$$

〔予想定理 2.9〕 (D-変換)

分割線の任意の接続構造は、主構造から次の D-変換を繰り返すことで得られる (Fig. 2.6). □

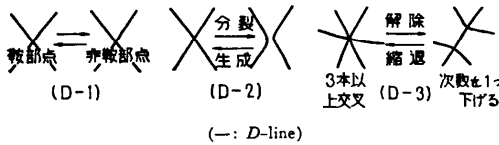


Fig. 2.6 D-transformation

〔予想定理 2.10〕 (主構造の代表的特徴線構造)

主構造を成す非縮退画像に、極大点と極小点だけは縮退を許すことにすれば、特徴線の代表的接続構造は次のように表現できる：分割線上、隣接鞍部点間には特徴線は 1 本交叉し、各単分割領域に存在する 1 個の極大 (小) 点からは、鞍部点と隣接鞍部点間の分割線上の 1 点へ 1 つ置きに線がのびている (Fig. 2.7). □

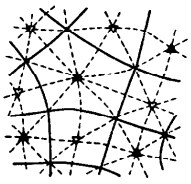


Fig. 2.7 Typical principal structure of C-line

〔予想定理 2.11〕 (C-変換)

特徴線の任意の接続構造は、主構造の代表的構造から

次の C-変換を繰り返すこと  
によって得られる (Fig. 2.8)  
□

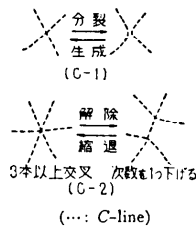


Fig. 2.8 C-transformation

3. 定理の証明

2. で列挙した定理の証明、および予想定理の直観的証明を行う。

〔定理 2.1 の証明〕

$C(\varphi) = \psi_u^2 \psi_v$  となることより、特徴線とは、 $\nabla\varphi = 0$  となるか、等高線上で  $\|\nabla\varphi\|$  が極値をとる所であるといえる。鞍部点では  $\nabla\varphi = 0$  であり、鞍部点近傍の特徴線上では  $\nabla\varphi \neq 0$  であるから、鞍部点近傍の特徴線上では等高線間隔は極大になっており、鞍部点から遠ざかる方向に  $\varphi$  が増加するか減少するかを考慮して、特徴線の枝は Fig. 3.1 のようにラベル付けできる。ただし、 $u$  は増加、 $d$  は減少することを、 $X$  は等高線間隔が極大になることを表わす。

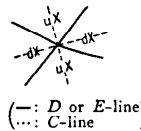


Fig. 3.1

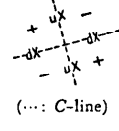


Fig. 3.2

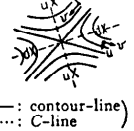


Fig. 3.3

特徴線で区切られる領域は、 $C(\varphi)$  が Fig. 3.2 の様な符号をとることが示せる。なぜなら、等高線が Fig. 3.3 の様になり、 $\psi_{uv}$  は  $\psi_u$  の  $v$  方向への変化を表わすからである。

従って、分割線または輪郭線を介する隣接鞍部点は、Fig. 3.4, Fig. 3.5 の様な関係にある。

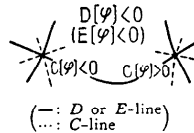


Fig. 3.4

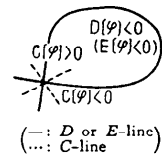


Fig. 3.5

これより、 $C(\varphi) = 0$  となる点は奇数個存在する。 □

〔予想定理 2.2 の直観的証明〕

非縮退画像  $\varphi$  においては、補題 1.2 より輪郭線の特異点で孤立していないのは鞍部点だけである。鞍部点に連なってない輪郭線は従って閉路を成すか、無限に続く 1 本の曲線となっている。後者の場合、 $\varphi$  は非常に変化の少ない土手の様なものが無限に続いていることになる。等高線の場合にも、これと同様なことが

あるわけで、一般に等高線が閉路を成しているという言い方を認めるとすれば、鞍部点に連なってない輪郭線は一般に閉路を成すということもできよう。また、鞍部点から出ている輪郭線も次のようにして閉路を成すと言える。つまり、鞍部点からラベル2の領域内に入る任意の力線を考える。鞍部点近傍では  $\psi_{uu} < 0$  であり鞍部点では  $\psi_u = 0$  であるから、 $\psi_{uu} > 0$  の単分割領域内で力線の行きつく所までの  $\psi$  の値は、最も自然な形として Fig.

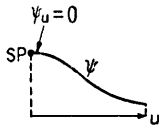
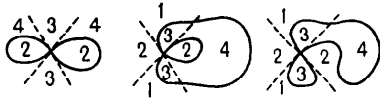


Fig. 3.6 Aspect of surface on line of force

3.6 のようになるであろう。従って、変曲点すなわち  $\psi_{uu} = 0$  となる所が途中で1個あり、輪郭線はここを通る。力線は任意にとっていることから、輪郭線は Fig. 3.7 の様に閉路を成す。



(-: D-line, ...: E-line)

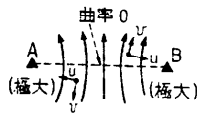
Fig. 3.7

ラベル3の領域側については、これと双対である。

縮退画像の場合にも本質的に同様で、閉路を成さない部分があると、無限まで続く単調な土手の様なものになり一般的ではなく、やはり閉路を成す。☒

(定理 2.3 の証明)

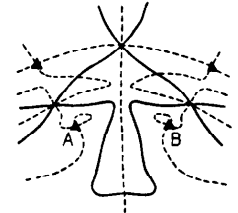
$D[\varphi] < 0$  なる単分割領域を考えて、この領域内で単一線分上に極大点が2個存在し得ないことを示せば十分である。いま、Fig. 3.8 の様に単一線分の両端 A, B に極大点が共存したとする。極大点の回りでは、等高線の曲率は負であるから、AB 上では  $v$  方向の曲率は負でなくてはならない。ところがAの近傍とBの近傍では Fig. 3.8 の様に  $v$  が逆方向にとられるわけだから、AB 間でB側を基準に取り、Fig. 3.8 の矢印の方向に関する等高線の曲率を考えると、正 (A近傍) から負 (B近傍) に変化している。従って、中間値の定理より、AB 間に必ず等高線の曲率が0となる部分が存在し、そこには分割線が通ることになる。これは分割領域内という仮定に反する。☒



(-: contour-line)

Fig. 3.8

(予想定理 2.4 の直観的証明)  
 $D[\varphi] < 0$  なる単分割領域  $\sigma$  で考えれば十分である。定理 2.3 より、 $\sigma$  内に任意に取った線分上には、



(-: D-line, ...: contour-line & C-line. 右図は、等高線を省いてあり、単分割領域内の A, B 点に極大点共存している)

Fig. 3.9 D and C-line

極大点は高々1個である。ところが、線分では結ぶことの出来ない2点には極大点の共存し得ることが実験的に確かめられている (Fig. 3.9)。

しかしながら、これは Fig. 3.10 に示す領域 A に限り、領域 B には極大点は存在し得ない。実際、もし極大点が存在したとすると、領域 B 内の等高線は Fig. 3.11 に示す2タイプのいずれかとなり、どちらも  $\times$  印の所が新しい鞍部点になり矛盾である。領域 A は  $\sigma$  の境界  $|\partial|$  上の鞍部点数しかないから、 $\sigma$  に存在し得る極大点の数は  $|\partial|$  上の鞍部点数を越えない。☒

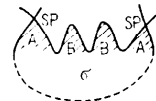


Fig. 3.10



(▲: 極大点, ×:  $|\partial|$  上で極大点)

Fig. 3.11

(予想定理 2.5 の直観的証明)

単分割領域は、 $\psi_{uu} > 0$  であるものと、 $\psi_{uu} < 0$  であるものの2種類あり、一般的には、どちらの単分割領域も  $\psi_{uu} > 0$ ,  $\psi_{uu} < 0$  の両方の部分領域を持つから、補題 1.4 より、 $\psi_{uu} > 0$  なる単分割領域は凹面を  $\psi_{uu} < 0$  なる単分割領域は凸面を含む。極大点は凸面に、極小点は凹面に存在することを考えると、最も標準的な場合、 $\psi_{uu} < 0$  の領域は極大点を1個、 $\psi_{uu} > 0$  の領域は極小点を1個含む。この場合、極大点数と極小点数の和は、単分割領域の数と一致するが、一般に単分割領域  $\sigma$  内には、予想定理 2.4 より、 $|\partial|$  に存在する鞍部点数までの極大 (小) 点が入る可能性がある。その場合にも予想定理は成立することが、以下の考察から言える。

$D[\varphi] < 0$  なる単分割領域内に2個以上極大点を含む場合を想定すれば十分である。予想定理 2.4 で考察した様に、極大点は鞍部点の近く (領域 A) になくなくてはならない。その場合、Fig. 3.12 (次頁参照) に示すように2つの極大点が間に鞍部点を介して離れている

とすると、鞍部点において等高線が分割線と接する(命題 1.2) ことができなくなってしまう。従って、極大点(小)は互いに隣接した鞍部点の近くにしなければならない。

隣接した極大点 2 個に注目すると、単分割領域内では等高線の曲率が一定符号であることより、Fig. 3.13 の様に分割線が等高線と接する点が少なくとも 1 個存在し、それらのうち少なくとも 1 個は隣接単分割領域の最小点とならなければならない。



Fig. 3.12

Fig. 3.13

すなわち、隣接単分割領域からは極小点が消滅する。従って極小点が消滅した分だけ極大点数が増加するという関係が成立している。この関係は常に成立することを同様にして確かめることができ、極大点・極小点の総数は単分割領域の数と一致していると言える。☒

〔予想定理 2.6 の直観的証明〕

予想定理 2.2 を仮定し、定理 1.1 を使えば明らか。

☒

〔予想定理 2.7 の直観的証明〕

非縮退画像  $\varphi$  の場合は、主構造以外に Fig. 2.4 のパターンがあるが、これらは明らかに主構造に E-変換を繰り返すことによって得ることができる。

縮退画像  $\varphi$  の場合、その非縮退な部分以外では、予想定理 2.2 を仮定すれば、鞍部点を通らない閉路(特異点を通る場合も含む)が存在する可能性があるだけである。E-変換によれば、任意の位置に任意の形の閉路を発生させ、それらを自由に結合・分離・消滅させることができる (Fig. 3.14)。

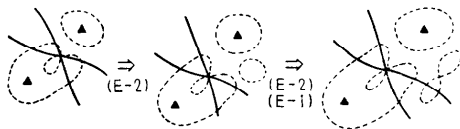


Fig. 3.14 Illustration of E-transformation

しかも、これらの変換は、曲面を連続的に変化させることにより、実際に実現可能である (5.)。☒

〔予想定理 2.8 の直観的証明〕

通常、鞍部点 1 個は極大点 2 個もしくは極小点 2 個によって形成されると考えられる (Fig. 3.15)。

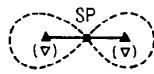
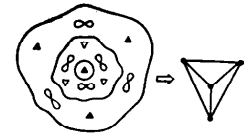


Fig. 3.15

☒

いま、極大(小)点を節点、鞍部点を辺、極小(大)点を辺で囲まれる領域と考えると、接続構造は単純連結平面グラフと見なせる (Fig. 3.16)。☒



$$N_M = N_{SP} - N_{Hm} + 1 (4 = 6 - 3 + 1) \text{ が成立する。}$$

Fig. 3.16 E-line and its graph

従って、オイラーの公式より次の関係が成立する。

$$(\text{内部の領域数}) = (\text{辺の数}) + 1 - (\text{節点数})$$

これより、求める関係式を得る。☒

〔予想定理 2.9 の直観的証明〕

分割線の主構造以外の部分としては、鞍部点以外の特異点の可能性と非連結部分の可能性とがある。前者は変換 (D-1), (D-3) を適用すれば、後者は変換 (D-2) を適用すれば主構造から実現できる。しかも、これらの変換は、実際に曲面を連続的に変化させることで実現可能である (5.)。☒

〔予想定理 2.10 の直観的証明〕

主構造では、各単分割領域内には極大点または極小点が 1 個だけ存在し、鞍部点からは 1 本特徴線が出、隣接鞍部点間には、定理 2.1 より奇数本の特徴線が分割線と交叉するわけだが、極大点から力線が出て隣接単分割領域内の極小点へ入るのであるから、Fig. 3.17 のように力線の曲率が 0 となる所(特徴線)は隣接鞍部点間で 1 カ所になるのが最も自然である。そういう意味で Fig. 2.7 のパターンが最も代表的なものであると考えられる。☒

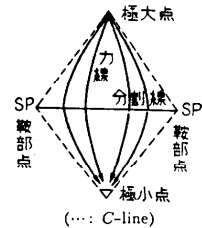


Fig. 3.17

〔予想定理 2.1 の直観的証明〕

D-変換の場合と同じである。C-変換の実現は 5. 参照。☒

4. 構造線処理システム

構造線の大域的性質の検証に用いた構造線処理システムの概要を述べる。

4.1 構造線抽出法

特徴線の追跡アルゴリズムは、文献 2) のものと本質的に同じであり、分割線、輪郭線の追跡アルゴリズムは、文献 2) のものを改良したものである。すなわち、両線が必ず鞍部点を通り、接ベクトル方向を 2 個持つこと、および特徴線は連結性が強いことを用いて、ま

ず特徴線追跡で得られている鞍部点から接ベクトル方向にセンサーを出し、次に特徴線上（鞍部点以外）のセンサー（分割線等の接ベクトル方向）を求め、これらのセンサー同志を互いに結んでゆく方法をとっている。この様に、特徴線は連結性に優れており、各種の曲線間をリンクするのに有効である。実際この方法によって等高線や Fig. 1.6 に挙げた放物線曲線 ( $|H|=0$  の線) も求めている。

4.2 システム・インプリメンテーション

システムは、NEAC-3200 上にインプリメントされており、使用言語は主に FORTRAN、曲線追跡部は、各線ごとにメモリーサイズ約 13,000 ワードを使用しており、ディスクに計算結果を貯えて互いにチェーンしている。結果は、オンライン・アダプタを介して NEAC-3100 によりグラフィック・ディスプレイ上に逐次表示できるようになっており、座標変換により、平面図以外に曲面の透視図も表示できる。また、曲面の微小変化による構造線の接続構造の変化を見るために、曲面の部分的変更をグラフィック・ディスプレイ上から行うこともできる。

曲面は関数により与えられ、次の 2 種類が可能であり、いずれもパラメータを入力する。

$$(1) \sum_{i=1}^n A_i \exp\{-\alpha_i x^2 - \beta_i xy - \gamma_i y^2\}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n A_i / \{1 + \alpha_i x^2 + \beta_i xy + \gamma_i y^2\}$$

任意の滑らかな関数は (1) の形で近似できることから、入力曲面の形式はこれで十分であろう。なお (2) は、(1) の簡略形であり、スピード・アップのために用意してある。

処理時間は、 $n$  (関数の重ね合わせ数) にほぼ比例しており、関数がタイプ (1) の場合、特徴線で約  $3n$  分、分割線は約  $30n$  秒、輪郭線は約  $n$  分、等高線は 1 本当たり約  $10n$  秒である。得られる曲線を表わす点列は、グラフィック・ディスプレイのバッファ容量の関係で 100 点から 1,000 点である。

5. 計算機実験による予想定理の検証

〔予想定理 2.2 (輪郭線の性質) に関して〕

Fig. 3.9 の曲面の場合に相当する Fig. 5.1 の他に、Fig. 1.4, Fig. 5.2, Fig. 5.3 のような規則正しい曲面の場合、Fig. 5.4 の様に大小の山が隣接している曲面、さらには Fig. 5.5 の様な複雑な曲面の場合について、いずれも輪郭線は閉路を成していること



(—: E-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.1 E-line



(—: E-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.2 E-line



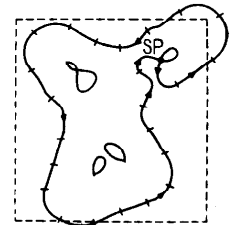
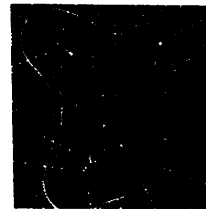
(—: E-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.3 E-line



(—: E-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.4 E-line



(—: E-line, (...) : contour-line & C-line)

これは 2.1 定理の例にもなっており、右図に示すように、SP から SP に戻る輪郭線に特徴線の交叉が 23 カ所ある。

Fig. 5.5 Illustration of Th. 5.1

を確かめることができる。

〔予想定理 2.4 (単分割領域数と極値数) に関して〕

Fig. 1.4 の曲面は、各単分割領域内に最大 1 個の極大 (小) 点を含むだけであり、Fig. 3.9 の場合は特に下側の単分割領域内に最大限 (鞍部点数) の 2 個の極大点を含み、Fig. 5.6, Fig. 5.7 は自己閉路をもつ鞍部点の存在する例であり、最大限の 2 個の極大点を含んでおり、共に  $|\phi|$  に存在する鞍部点数を越えていない。



(—: D-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.6 D-line

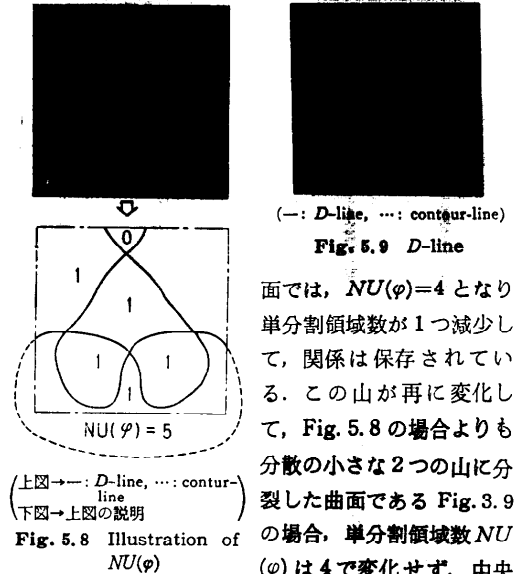


(—: D-line  
 (...) : contour-line)

Fig. 5.7 D-line

〔予想定理 2.5 (単分割領域数と極値数) に関して〕

Fig. 1.4 や、あとの Fig. 5.10, 11, 12 では明らかで、Fig. 5.8 でも  $NU(\varphi)=5$ 、極大点数 4、極小点数 1 でやはり成立し、Fig. 5.8 の曲面で下の 2 つの山が合体し、1 つの大きな山になった Fig. 5.9 の曲



面では、 $NU(\varphi)=4$  となり単分割領域数が 1 つ減少して、関係は保存されている。この山が更に変化して、Fig. 5.8 の場合よりも分散の小さな 2 つの山に分裂した曲面である Fig. 3.9 の場合、単分割領域数  $NU(\varphi)$  は 4 で変化せず、中央

の単分割領域からは極小点が消滅しているかわりに、下側の単分割領域では極大点が 1 つ増えている。従ってやはり関係は成立している。

〔予想定理 2.7 (E-変換) に関して〕

曲面を連続的に変化させて Fig. 5.10 のように E-変換を行うことができる。

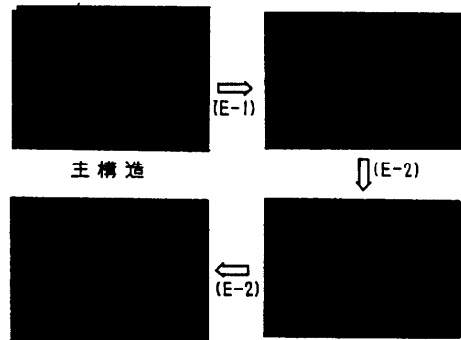
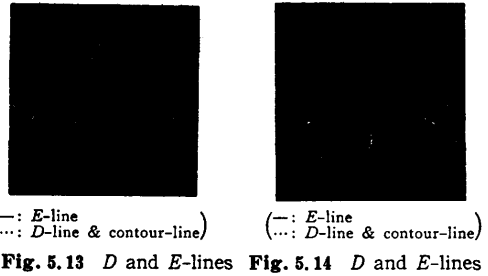
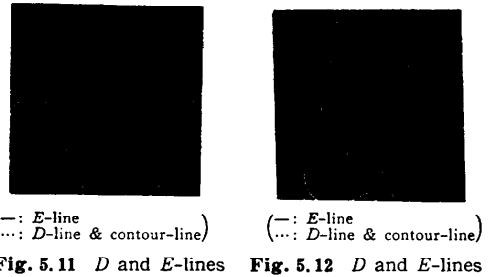


Fig. 5.10 Example of E-transformation

Fig. 5.3, Fig. 5.5, Fig. 3.9, Fig. 5.8 の曲面に相当する Fig. 5.11, Fig. 5.12, Fig. 5.13, Fig. 5.14 の場合も、同様に主構造から E-変換を繰り返して得られる。



〔予想定理 2.8 (閉輪郭線内の極値数) に関して〕

Fig. 5.2, Fig. 5.3 が典型的な例であり、Fig. 5.11 ~ Fig. 5.14 などでも関係が成り立つことが確かめられる。

〔予想定理 2.9 (D-変換) に関して〕

曲面の漸次変化により Fig. 5.15, Fig. 5.16 (次頁参照) の様に D-変換を実現することができる。通常は主構造になり、主構造にならない場合でも D-変換を主構造に施せば到達できることが多くの例について確かめられている。

〔予想定理 2.10 (主構造の代表的特徴線接続構造)〕

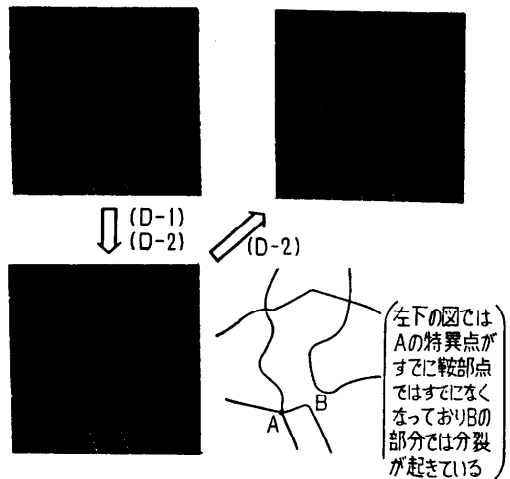


Fig. 5.15 D-transformation



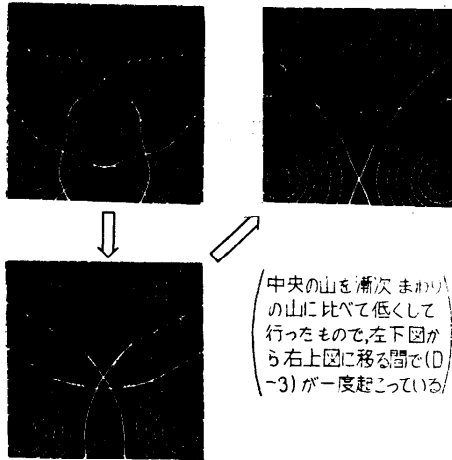


Fig. 5.16 Example of *D*-transformation

に関して)

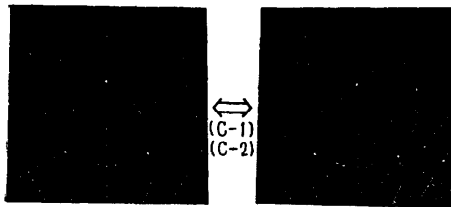
Fig. 5.17 の様な幾何学的に対称な曲面の場合、Fig. 2.7 のパターンになることより、Fig. 2.7 が基本的なものであると考えて良いであろう。



(—: *D*-line  
 ...: *E*-line & contour-line)

(予想定理 2.11 (*C*-変換) に関して)

曲面の微小変化により、実際に Fig. 5.18 のような *C*-変換を起こし、Fig. 2.7 のパターンに戻せることが確かめられている。



(—: *D*-line, ...: *C*-line & contour-line)  
 Fig. 5.18 Example of *C*-transformation

## 6. あとがき

4., 5.において、平滑化された画像を表わす  $C^2$  級 2次元スカラー関数の構造を表現すると考えられる構造線の大域的性質に関する予想定理がかなり普遍的なものであることが、主に実験的な手段によって確かめら



Fig. 6.1 Perspective of Fig. 1.4



Fig. 6.2 perspective of structure lines of Fig. 1.4



Fig. 6.3 Original image and its *D*-line

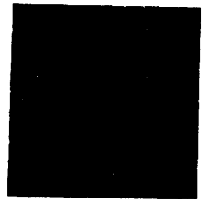


Fig. 6.4 Reconstructed image from the *D*-line

れた。

構造線は、曲面の大域的性質から局所的性質まで、効率良くとらえている。つまり、まず分割線によって極大点・極小点の勢力分野が決定され、分割線で区切られた各単分割領域の構造は、凹凸情報に関してまず輪郭線によって、さらにそれ以上細かい曲面の変化(これは力線群の変化で表現されると考えられる)は、力線の曲率が0の部分である特徴線によって表現されるというふうに階層的な構造になっている。

構造線で区切られた曲面の極小部分領域は、単調でなだらかな曲面であり、非常に簡単な補間法で元の曲面の復元が行えることが実験的に確かめられている (Fig. 6.1~Fig. 6.4)。これは、構造線が曲面の骨格を十分良く表現していることを物語っている。

なお、情報工学的に見て、本実験で用いている様なグラフィック・ディスプレイを用いたマン・マシンのアプローチは、特に、数学的には証明が困難ではあるが、ぜひ性質を確かめたいような問題に対して有効であろうと考えられる。

## 参考文献

- 1) 榎本, 片山, 伊藤, 鶴見: 曲面の構造線, パターン認識と学習研究会 (PRL 72-138, '73.3)
- 2) 榎本, 片山, 鶴見, 伊藤: 特徴線・輪郭線・分割線のプログラムとその応用, 情報処理学会第14回プログラミング・シンポジウム報告集 ('73.10)

(昭和51年2月24日受付)