Vol.2011-GI-26 No.12
2011/7/1

箱積みが最善引き分けの証明の別解

山口 慶晃[†1] 山口 和紀[†1]
田中 哲朗[†1] 金子 知適[†1]

箱積みは Connect-Four を無限大の盤面で行うゲームである．著者らは follow-up と follow-in-CUP という戦術を使って，先手にも後手にも引き分けに持ち込む戦略が存在することを示すことで，両者が最善を尽くすと，つまり，引き分ける戦略をとると，箱積みは無限に続き，最善引き分けであることを証明した．今回は CUP の代わりに，Slided-CUP と GLASS を使って，引き分けの戦略を示すことができた．

Another Proof of Draw in Infinite Connect-Four

Yoshiaki Yamaguchi ,[†1] Kazunori Yamaguchi ,[†1]
Tetsuro Tanaka [†1] and Tomoyuki Kaneko[†1]

Infinite Connect-Four is a variant Connect-Four on an infinite board. We proved that there are strategies using follow-up and follow-in-CUP to play Infinite Connect-Four without losing game. If both players use these strategies, the game will never end. In this paper, we show other strategies using follow-up, follow-in-Slided-CUP and follow-in-GLASS.

1. はじめに

箱積みは Connect-Four[4] の盤面を無限大にしたゲームである．

Connect-Four では横 7 列，縦 6 行の地面のある盤面で，2 人のプレーヤが 1 個ずつ石を交互に置いていく．石は直下の升に石が置かれているか，最下行の升にしか置けず，パスは許されない．そして，縦または横または斜めのいずれかに 4 目以上先に並べたプレーヤの勝ちで，決着が着かずに盤面が全て埋まれば引き分けというゲームである．1988 年に Connect-Four は James Dow Allen と Victor Allis はそれぞれ独立に Connect-Four が最善先手勝ちであることを証明した[1]．

著者らは，箱積みと縦に制限のある箱積みと横に制限のある箱積みは先手にも後手にも引き分けに持ち込む戦略が存在し，これらが最善引き分けであることを示した[6)⋆1]．箱積みが最善引き分けの証明は follow-up と follow-in-CUP という戦術を用いて行われている[6]．現在は置き石 1 の箱積みが最善引き分けと予想し，その証明に取り組んでいる．置き石 1 の箱積みとは最初に先手が石を 1 個置いてから，ゲームが始まる箱積みである．なお，置き石 2 の箱積みが先手必勝であるのは自明である．置き石 1 の箱積みを CUP だけで証明するのは困難と思われるので，他の戦略も考案する必要があった．本論文では箱積みが最善引き分けの証明を CUP の代わりに，Slided-CUP と GLASS を使うことで，先手と後手にゲームを引き分ける戦略が存在することで示す．

		X		X			
		O	X	O	O		
-3	-2	-1	0	1	2	3	4

図 1 箱積みの局面

2. ルール

箱積みのルールは以下の通りである．

- 地面があり，左右と高さが無限大の盤面の中に，2 人のプレーヤが 1 個ずつ石を交互に置いていく．
- 石は直下の升に石が置かれているか，最下行の升にしか置けない．
- パスは許されない．
- 縦，横，斜めいずれかに 4 目以上並んだ同一の石を *Connect4* と呼ぶ．
- 先に Connect4 を達成したプレーヤの勝ちである．
- 両者とも Connect4 を達成せずに，箱積みが無限に続く場合，引き分けとする．

本論文では，先手の石を X，後手の石を O と表記する[2]．また，既に置かれた石を通常

⋆1 [6] の tub は本論文では CUP と呼ぶ．同様に draw tub は follow-in-CUP と呼ぶ．

Vol.2011-GI-26 No.12
2011/7/1

		O		
		X		
-2	-1	0	1	2

図 2　2 手目に O が follow-up した局面

C			*C*
U	*U*	*P*	*P*
①	②	③	④

図 3　CUP

の書体で X，O と表記し，まだ置かれていないが，置く想定の石をイタリック体で *X*，*O* と表記する．箱積みの局面を図 1 に示す．初手 X が置かれた列を 0 列とし，0 列から右の列を 1 列，2 列，3 列，…と表し，0 列から左の列を −1 列，−2 列，−3 列，…と表す．行は下から 1 行，2 行，3 行，…と表す．また，整数 z に対し，X を z 列に置くことを「X を z に置く」と表現する．石を置くルールには隣置き，空置き[3] があるが，本論文では任意の列に石を置いてよいものとする．棋譜は，それぞれのプレーヤが石を置いた順に，石と列番号を並べたもので表す．例えば，1 手目で X が 0 に置き，2 手目に O が 1 に置き，3 手目に X が 1 に置き，4 手目に O が −1 に置き，5 手目に X が −1 に置き，6 手目に O が 2 に置いた時，$X0O1X1O-1X-1O2$ と表記する．図 1 は $X0O1X1O-1X-1O2$ と進んだ局面である．この局面は X が勝利に結びつけることが出来る．

3. 先行研究

X も O も引き分けに持ち込む戦略が存在することを示すことで，箱積みが最善引き分けであることが証明されている[6]．最初に箱積みが最善引き分けの証明の別解を示すために必要な用語と置き方の定義をこの論文で再び説明する．

定義 1　相手の石が置かれた次の手で，その石の上に自分の石を置くことを *follow-up* と呼ぶ[4]．

X が初手を置いた後，2 手目で O が follow-up した局面が図 2 である．

定義 2　図 3 の升の C，U，P が記された 6 升を CUP と呼ぶ．CUP は常に地面の上に置かれている．CUP の中に次の補題 1 の証明で示す手順に沿って置くことを，① 列〜④ 列における follow-in-CUP と呼ぶ．

図 3 以降の丸数字は相対的な列の番号である．

補題 1　CUP の中に OXOXOX と交互に置いていった時，X が適切に対応すれば，CUP の同じアルファベットがついた 2 升に X は O と 1 個ずつ置くことが出来る．逆に XOXOXO

C			*C*
O	*U*	*P*	*P*
①	②	③	④

図 4　CUP の 1 手目

C			*C*
O	X	*P*	*P*
①	②	③	④

図 5　CUP の 2 手目

C			*C*
O	X	O	*P*
①	②	③	④

図 6　CUP の 3 手目 (その 1)

C			*C*
O	X	O	X
①	②	③	④

図 7　CUP の 4 手目 (その 1)

C			O
O	X	O	X
①	②	③	④

図 8　CUP の 5 手目 (その 1)

X			O
O	X	O	X
①	②	③	④

図 9　CUP の 6 手目 (その 1)

O			*C*
X	O	*P*	*P*
①	②	③	④

図 10　CUP の 3 手目 (その 2)

O			*C*
X	O	X	*P*
①	②	③	④

図 11　CUP の 4 手目 (その 2)

と置いていった場合も O が適切に対応すれば，同じアルファベットがついた 2 升に O は X と 1 個ずつ置くことが出来る．

証明 CUP の左右の対称性により，O がこの CUP の中で，最初に置くのが U のどちらかだとしても一般性を失わない (図 4)． X はもう 1 つの U に置く (図 5)．次に，O が CUP の中で置くとすれば，P のどちらかか ① であるが，P の一方に置くとする (図 6)． すると，X は P のもう一方に置く (図 7)．次に，O が C のどちらかに置く (図 8)． 最後に，X はもう一方の C に置く (図 9)．図 9 には，同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている．

今度は，CUP の 3 手目で O が ① に置いた場合を証明する (図 10)． これに対して，X は ③ に置く (図 11)．次に，O は ④ に置くしかない (図 12)． 最後に，X は ④ に置く (図 13)．図 13 にも，同じアルファベットがついた 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている．

O			C
X	O	X	O
①	②	③	④

図 12　CUP の 5 手目 (その 2)

O			X
X	O	X	O
①	②	③	④

図 13　CUP の 6 手目 (その 2)

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
···	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	···
···	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	···
···	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	···
···	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	···
···	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	···
···	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	···
···	O	O	C	X	X	O	X	X	C	O	O	C	X	C	O	···
···	U	P	P	O	O	X	O	O	U	U	P	P	O	U	U	···
···	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	···

図 14　CUP を使った X-board

以上から，CUP の同じアルファベットがついた 2 升に，X は O と 1 個ずつ置くことが出来る．CUP の中に，XOXOXO と置いていった場合も同様に，O が適切に対応すれば，CUP の同じアルファベットがついた 2 升に，O は X と 1 個ずつ置くことが出来る．□

定理 1　n を非負整数とする．X は初手を置いた後は $3+5n$ 列〜$6+5n$ 列及び，$-3-5n$ 列〜$-6-5n$ 列で follow-in-CUP し，それ以外は follow-up すれば，引き分ける（図 14）．

定義 3　X が引き分けに持ち込む戦略を想定した局面を X-board と呼ぶ．

図 14 は X-board である．図 14 には，パターンが繰り返し現れていることを使い，X，O ともに Connect4 がないことが示されている[6]．従って，X-board に沿って置く限り，箱積みは引き分けになるが，定理 1 だけでは，箱積みが最善引き分けの証明とはならない．なぜなら，X-board に沿って置いていった局面の中には，X が手を X-board から変えれば，X が勝利に結びつけることが出来る局面が存在するからだ．図 1 は，X-board に沿って 2 手目に O が 1 に置いたら，3 手目で X は 1 に置き，O が 4 手目に -1 に置いたら，5 手目で X が -1 に置き，6 手目に O が 2 に置いた局面である．この局面から X-board に沿って，X は 2 に置かずに，X0O2X0O0X$-$2O$-$2X1O1X$-$1O2X$-$2 と Connect4 を狙いにいくと，O はそれを阻止するしかないが，最後は X に Connect4 を達成されてしまう．このような問題を掲載した Connect-Four の問題集もある[5]．そこで，箱積みが最善引き分けであることを証明するには，O が引き分けに持ち込む戦略が必要である．

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
···	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	···
···	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	···
···	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	···
···	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	···
···	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O	O	O	X	X	···
···	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X	X	X	O	O	···
···	C	O	C	X	X	C	O	C	X	X	C	O	C	X	X	···
···	P	X	U	U	P	P	X	U	U	P	P	X	U	U	P	···
···	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	···

図 15　CUP を使った O-board

定理 2　n を非負整数とする．O は $5n+1$ 列〜$5n+4$ 列，$-5n-1$ 列〜$-5n-4$ 列で follow-in-CUP し，それ以外を follow-up すると，引き分ける（図 15）．

定義 4　O が引き分けに持ち込む戦略を想定した局面を O-board と呼ぶ．

図 15 は O-board である．

4. 箱積みが最善引き分けの証明の別解

箱積みが最善引き分けの証明の別解を示す．別解においても，X と O が引き分けに持ち込む戦略を示す．別解では CUP の代わりに，Slided-CUP を使った戦略と GLASS を使った戦略を示す．

4.1 Slided-CUP を使った戦略

最初に Slided-CUP を使った O-board を示す (図 16).

定義 5　CUP の 1 行を地面から follow-up のみで埋める予定の列を無視した上で 1 升ずつ左側にスライドさせた 6 升を Slided-CUP と呼ぶ．Slided-CUP は常に地面の上に置かれている．同じ Slided-CUP の 2 升の U には相手の石が置かれた次の手で自分の石を

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
···	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	···
···	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	···
···	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	···
···	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	···
···	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	*O*	*O*	*O*	*X*	*X*	···
···	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	*X*	*X*	*X*	*O*	*O*	···
···	*S*	*O*	*S*	*X*	*X*	*S*	*O*	*S*	*X*	*X*	*S*	*O*	*S*	*X*	*X*	···
···	*C*	*X*	*C*	*U*	*U*	*P*	*X*	*P*	*U*	*U*	*C*	*X*	*C*	*U*	*U*	···
···	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	···

図 16 Slided-CUP を使った O-board

S			*S*		*S*			*S*		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		*C*	*U*	*U*	*P*		*P*	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 17 Slided-CUP の 1 手目

S			*S*		*S*			*S*		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	*P*		*P*	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 18 Slided-CUP の 2 手目

S			*S*		*S*			*S*		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	X		*P*	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 19 Slided-CUP の 3 手目 (その 1)

S			*S*		*S*			*S*		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 20 Slided-CUP の 4 手目 (その 1)

S			*S*		X			*S*		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	X		*P*	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 21 Slided-CUP の 5 手目 (その 1)

S			*S*		X			O		*S*			*S*
P	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	X		O	*U*	*U*	*C*
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 22 Slided-CUP の 6 手目 (その 1)

もう片方の U に置き，同じ Slided-CUP の 2 升の S と 1 間飛びに隣合った 2 升の C と 2 升の P の中に次の補題 2 の証明で示す手順に沿って置くことを，⑥ 列〜⑨ 列における follow-in-Slided-CUP と呼ぶ．

補題 2 同じ Slided-CUP の中の 2 升の S と 1 間飛びに隣合った 2 升の C と 2 升の P の 6 升の中に XOXOXO と交互に置いていった時，O が適切に対応すれば，同じ Slided-CUP の 2 升の S と 1 間飛びに隣合った 2 升の C と 2 升の P に O は X と 1 個ずつ置くことが出来る．逆に OXOXOX と置いていった場合も X が適切に対応すれば，前述の 2 升に X は O と 1 個ずつ置くことが出来る．

証明 Slided-CUP の左右の対称性により，X が SCP の 6 升の中で，最初に置くのが P のどちらかだとしても一般性を失わない (図 17)．O はもう 1 つの C に置く (図 18)．次に，X が SP の中で置くとすれば，P のどちらかか ⑥ であるが，P の一方に置くとする (図 19)．すると，O は P のもう一方に置く (図 20)．次に，X は S のどちらかにしか置けない（図 21）．最後に，O はもう一方の S に置く（図 22）．図 22 には，前述の 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている．

今度は，Slided-CUP の 3 手目で X が ⑥ に置いた場合を証明する (図 23)．これに対して，O は ⑪ に置く (図 24)．次に，X は P の升の一方に置くしかない (図 25)．最後に，O は残った S に置く (図 26)．図 26 にも，前述の 2 升に X と O が 1 個ずつ配置されている．以上から，O は X と前述の 2 升に 1 個ずつ置くことが出来る．SCP の中に，OXOXOX と置いていった場合も同様に，X が適切に対応すれば，前述の 2 升に，X は O と 1 個ずつ置くことが出来る．

□

S			S		X			S		S			S
P	U	U	X		O	U	U	P		P	U	U	C
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 23　Slided-CUP の 3 手目 (その 2)

S			S		X			S		S			S
P	U	U	X		O	U	U	P		O	U	U	C
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 24　Slided-CUP の 4 手目 (その 2)

S			S		X			S		S			S
P	U	U	X		O	U	U	X		O	U	U	C
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 25　Slided-CUP の 5 手目 (その 2)

S			S		X			O		S			S
P	U	U	X		O	U	U	X		O	U	U	C
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

図 26　Slided-CUP の 6 手目 (その 2)

定理 3　n を非負整数とする．X は初手を置いた後は図 27 のように，3 列〜5 列，−3 列〜−5 列，$7+5n$ 列〜$10+5n$ 列及び，$-7-5n$ 列〜$-10-5n$ 列で follow-in-Slided-CUP し，それ以外は follow-up すれば，引き分ける．

図 27 では，3 列〜5 列と −3 列〜−5 列の Slided-CUP の形は定義 5 の形とは異なるが，follow-in-Slided-CUP が可能である．なお，2 行 5 列の S と 2 行 −5 列の S に，X と O が 1 個ずつ配置される．

定義 6　図 27 の −1 列〜10 列，1 行〜7 行までの 12×7 の長方形を Core84 と呼ぶ (図 28).

証明 図 27 では 11 列から右は 6 列〜10 列が繰り返され，−11 行から左は −6 列〜−10 列が繰り返され，5 行から上は 3 行〜4 行が繰り返されるので，盤面に現れる 4×4 の正方形は対称性を除くと，Core84 の中にある 4×4 の正方形のパターンしか現れない．Core84 に X

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	X	O	O	X	X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	⋯
⋯	O	X	X	O	O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	⋯
⋯	X	O	O	X	X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	⋯
⋯	O	X	X	O	O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	⋯
⋯	X	O	O	X	X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	⋯
⋯	O	X	X	O	O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	⋯
⋯	S	O	O	X	X	O	X	X	O	O	S	X	S	O	O	⋯
⋯	P	U	U	O	O	X	O	O	U	U	P	O	P	U	U	⋯
⋯	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯

図 27　Slided-CUP を使った X-board

O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	S	X	S	O	O	S
O	X	O	O	U	U	P	O	P	U	U	C

図 28　Core84

も O も縦，横，斜めに Connect4 がないことを証明されれば，図 27 に X も O も Connect4 がないことが証明されたことになる．

まず，横の O の Connect4 を考慮せず，Slided-CUP の中は全て O とした Core84 を示す (図 29)．図 29 の中に，縦と斜めの O の Connect4 はない．次に，横の X の Connect4 を考慮せず，Slided-CUP の中を全て X とした Core84 を示す (図 30)．図 30 の中に，縦と斜めの X の Connect4 はない．従って，Core84 に X と O の縦と斜めの Connect4 はない．次に，Core84 に X も O も横の Connect4 がないことを証明する．Core84 の 3 行〜7 行に X，O ともに横の Connect4 はない．また，同じ Slided-CUP の S，U がついた 2 升，及び

O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	O	X	O	O	O	O
O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

図 29 Slided-CUP を全て O とした Core84

O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	O	O	O	X	X	O
X	O	X	X	O	O	X	X	X	O	O	X
O	X	O	O	X	X	X	O	X	X	X	X

図 30 Slided-CUP を全て X とした Core84

1 間飛びに隣り合った 2 升の C と 2 升の P に同じ石が配置されることはないので，Core84 の 1 行と 2 行にも X，O ともに横の Connect4 はない．以上から，Core84 の中には X，O ともに縦，横，斜めの Connect4 は存在しない．従って，X が図 27 に示した X-board に沿って置けば，引き分ける． □

定理 4 n を非負整数とする．図 16 のように，O は $1+5n$ 列〜$4+5n$ 列及び，$-1-5n$ 列〜$-1-5n$ 列で follow-in-Slided-CUP し，それ以外は follow-up すれば，引き分ける．

証明 図 16 に出現する 4×4 の正方形のパターンは，Core84 に出現する 4×4 の正方形のパターンの X と O を反転させたものに含まれる． □

4.2 GLASS を使った戦略

GLASS とその置き方を定義する．

定義 7 図 31 の升の G，L，A，S が記された 10 升を GLASS と呼ぶ．GLASS は常に地面の上に置かれている．

S		S		S		S
G	G	L		L	A	A
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦

図 31 GLASS

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	S	O	S	X	X	O	X	X	S	O	S	X	S	O	S	⋯
⋯	L	A	A	O	O	X	O	O	G	G	L	O	L	A	A	⋯
⋯	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯

図 32 GLASS を使った X-board

定義 8 GLASS の中に，XOXOXOXOXO と交互に置いていった場合，X が 2 升の G，L，A いずれかの一方に置き，次の手で O はもう一方の升が空いていれば，そこに置く．それ以外は O は X が置いた GLASS の中の任意の升に置く．つまり，O は 2 升の G，L，A の中に少なくとも 1 個，X を置くだけでよく，4 升の S には制限がない．このように置くことを，① 列〜⑦ 列における follow-in-GLASS という．GLASS の中に，OXOXOXOXOX と交互に置いていった場合も同様に，X は 2 升の G，L，A の中に少なくとも 1 個，O を置くだけでよく，4 升の S には制限がない．

follow-in-CUP と follow-in-Slided-CUP では，相手が置いた次の手で自分が置く手は一意に決められたが，follow-in-GLASS では一意に決められるとは限らない．

定理 5 n を非負整数とする．X は初手を置いた後は $3+8n$ 列〜$9+8n$ 列及び，$-3-8n$ 列〜$-9-8n$ 列で follow-in-GLASS し，それ以外は follow-up すれば，引き分ける（図 32）．

定義 9 図 32 の -1 列〜12 列，1 行〜7 行までの 14×7 の長方形を Core98 と呼ぶ (図

O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	S	O	S	X	S	O	S	X	S	O
O	X	O	O	G	G	L	O	L	A	A	O	G	G

図 33 Core98

O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O
O	X	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

図 34 GLASS を全て O とした Core98

33).

証明 図 32 では 10 列から右は 2 列〜9 列が繰り返され，-10 列から左は -2 列〜-9 列が繰り返され，5 行から上は 3 行〜4 行が繰り返されるので，盤面に現れる 4×4 の正方形は対称性を除くと，Core98 の中にある 4×4 の正方形のパターンしか現れない．Core98 に X も O も縦，横，斜めに Connect4 がないことを証明する．

まず，横の O の Connect4 を考慮せず，GLASS の中は全て O とした Core98 を示す (図 34)．図 34 の中に，縦と斜めの O の Connect4 はない．次に，横の X の Connect4 を考慮せず，GLASS の中を全て X とした Core98 を示す (図 35)．図 35 の中に，縦と斜めの X の Connect4 はない．従って，Core98 に X と O の縦と斜めの Connect4 はない．次に，Core98 に X も O も横の Connect4 がないことを証明する．Core98 の 2 行〜7 行に X，O ともに横の Connect4 はない．また，G，L，A がついた 2 升に，X が少なくとも 1 個配置されているので，Core98 の 1 行にも X，O ともに横の Connect4 はない．以上から，Core98 の中には X，O 共に縦，横，斜めの Connect4 は存在しない．従って，X が図 32 に示された X-board に沿って置けば，引き分ける． □

O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X
X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O
O	X	O	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X

図 35 GLASS を全て X とした Core98

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	S	X	S	O	S	X	S	O	S	X	S	O	S	X	S	⋯
⋯	G	G	L	X	L	A	A	X	G	G	L	X	L	A	A	⋯
⋯	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	⋯

図 36 GLASS を使った O-board

定理 6 n を非負整数とする．O は $1 + 8n$ 列〜$7 + 8n$ 列及び，$-1 - 8n$ 列〜$-7 - 8n$ 列で follow-in-GLASS し，それ以外は follow-up すれば，引き分ける（図 36）.

証明 図 36 に出現する 4×4 の正方形のパターンは，Core98 に出現する 4×4 の正方形のパターンの X と O を反転させたものに含まれる． □

CUP と Slided-CUP と GLASS を組み合わせて，X-board と O-board を作ることもでき

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	O	X	X	C	O	O	X	E	O	E	X	H	O	O	H	X	⋯
⋯	X	O	O	A	A	B	O	B	D	D	O	F	F	G	G	O	⋯
⋯	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	⋯

図 37 CUP と Slided-CUP と GLASS を使った X-board

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	X	O	⋯
⋯	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	X	X	O	X	⋯
⋯	S	X	S	O	S	X	S	O	S	X	S	O	S	X	S	⋯
⋯	G	G	L	X	L	A	A	X	G	G	L	X	L	A	A	⋯
⋯	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	⋯

図 38 図 36 を 2 列左へスライドさせた O-board

る．図 37 は図 27 の 5 列における S を 3 列に移しかえ，CUP と Slided-CUP と GLASS を組み合わせた X-board である．ただし，CUP と Slided-CUP と GLASS の表記は ABC⋯ とした．

5. O-board をスライドさせる

図 38 のように，本論文で紹介した O-board は局面全体をスライドさせることが出来る．

6. 右へ GLASS が展開する最善手順

X は X-board，O は O-board に沿って置く限り，X も O も最善相手勝ちの局面が出現することなく，無限にゲームが続く．最善手順は最後はお互いに follow-up するだけということになりがちだが，follow-in-GLASS の置き方に制限を加えた X-board と O-board に沿って置くと，GLASS が右へ展開する最善手順となる．図 31 の ① 列〜② 列と ⑥ 列〜⑦ 列の 6 升の SGA で follow-in-CUP し，③ 列と ⑤ 列の 4 升の SL では，相手に一方の L に置かれたら，次の手でもう一方の L に置き，相手に一方の S に置かれたら，次の手でもう一方の S に置く．このように，follow-in-GLASS を制限しても定義の follow-in-GLASS の置き方から逸脱しない．この制限された follow-in-GLASS のもとで、X が図 32 に沿って置き，O が図 38 に沿って置くと，図 39 のように GLASS が右へ展開する最善手順となる．

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
⋯																⋯
⋯				X		X		O		O		X		X		⋯
⋯				O	X	O		X	O	X		O	X	O		⋯
⋯	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯

図 39 右へ GLASS が展開する最善手順

7. まとめ

これまで，箱積みで引き分ける戦略は follow-in-CUP と follow-up を使った戦略のみだったが，CUP の代わりに Slided-CUP と GLASS を使っても，引き分ける戦略を示せた．今回の結果をもとに，置き石 1 の箱積みが最善引き分けであることを証明したい．

参考文献

1) [http://en.wikipedia.org/wiki/Connect_Four last accessed at 2011/4/22]
2) [http://www.pomakis.com/c4/expert_play.html last accessed at 2011/6/3]
3) [http://homepage3.nifty.com/yasda/dwnload/hako.htm last accessed at 2011/6/6]
4) L.V.Allis; A knowledge-based approach to Connect-Four The game is solved:White wins, Master's thesis, vrije Universiteit, Amsterdam, 1988.
5) JAMES DOW ALLEN; The Complete Book of Connect4, PUZZLE WRIGHT PRESS 2010
6) 山口慶晃，山口和紀，田中哲朗，金子知適; 箱積みが最善引き分けの証明，Vol.2011-GI-25, No.1, 情報処理学会，2011 年