



リンク手法による多変数関数の極値探索*

榎本 肇** 片山卓也** 川本栄二**

Abstract

The method of finding all extremal points of function with many variables are discussed. In this method, we trace curves which pass the extremal points. When the curves are closed and don't cross the boundary of domain considered, we link to them from the boundary using subsidiary curves which are known to intersect with the curves and the boundary.

1. まえがき

濃淡画像を2次元平面上のスカラ関数 $\varphi(x, y)$ であると考えたとき、画像の特徴情報を最も高密度に表わしているのは極値点(極大点, 極小点, 鞍部点)である。画像の処理にあたっては、効率的な極値探索のアルゴリズムが必要である。

多峰性の曲面ではすべての極値点を求めることは困難である。たとえば、Random Sampling による Steepest Ascent 法では処理効率を良くするためには、すべての極値点が求められているか否かの信頼性を犠牲にしなければならない。また、全画面を漏れなく走査する完全探索法¹⁾ではすべての極値点を見つけることができるが、冗長性が大きく効率が悪い。

本論文で示す方法は曲線だけの走査により効率を高め、曲線間のリンクによって極値点を通る曲線を次々に見つけることによって信頼性を高めようとするものである。ここで用いるリンク手法²⁾は、追跡しようとする曲線が閉曲線になっているために、領域の周辺部からは直接に求めることができないときに、この閉曲線と交差して外に開いている曲線から間接的に求めようとするものである。

2.では、リンクするために用いる曲線を決定する関数として下位関数を紹介し、最も単純な形の下位関数による極値探索のアルゴリズムを示す。3.では、リンク手法を $k(\geq 3)$ 変数関数の場合に拡張する。また4.

では信頼性の高い下位関数を紹介する。

2. 2変数関係の極値探索

2次元平面上に十分に滑らかな関数 $\varphi(x, y)$ が定義域 D で定義されているとする。曲線だけの走査で全ての極値点を求めるためには次のようにする。極値点を通る曲線; $f(x, y)=0$ を適当に選び、定義域の境界 ∂D を走査して、曲線; $f(x, y)=0$ との交点を求める。 ∂D と交点を持たない閉曲線; $f(x, y)=0$ については、閉曲線; $f(x, y)=0$ と交差し、外に開き ∂D と交差しやすい曲線; $g(x, y)=0$ を用いて ∂D から間接的に曲線; $f(x, y)=0$ を求める。

このような手続によって発見される曲線; $f(x, y)=0$ を漏れなく走査して曲線上の極値点を求める。

〔定義 2.1〕

点 P_0 において $\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 \neq 0$ かつ $\text{grad } \varphi=0$ であれば、点 P_0 は極値点であり次のように分類できる。

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 > 0 \text{ かつ } \varphi_{xx}+\varphi_{yy} < 0$$

⇔点 P_0 は極大点

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 > 0 \text{ かつ } \varphi_{xx}+\varphi_{yy} > 0$$

⇔点 P_0 は極小点

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 < 0$$

⇔点 P_0 は鞍部点

2.1 下位関数

関数 $\varphi(x, y)$ に対して評価関数 $f(x, y)$ が与えられているとき、関数 f に対する下位関数を次のように定義する。

〔定義 2.2〕

閉曲線; $f(x, y)=c$ に対して、曲線; $g(x, y)=0$

* Searching Extremal Points of Function with Many Variables Using Linking Method, by Hajime ENOMOTO, Takuya KATAYAMA and Eiji KAWAMOTO (Department of Computer Science, Faculty of Eng., Tokyo Institute of Technology).

** 東京工業大学工学部情報工学科

が必ず交差するならば、関数 g は関数 f の 1 次下位関数と呼び (混同のない場合は単に下位関数とよぶ). $f^{(1)}(x, y)$ と書く, また $f^{(1)}(x, y)$ に対する下位関数を 2 次下位関数とよび, $f^{(2)}(x, y)$ と書く, 同様にして n 次下位関数 $f^{(n)}(x, y)$ を定義する.

(定理 2.1)

関数 $f(x, y)$ に対して $f_x(x, y), f_y(x, y)$ は 1 次下位関数であり, $f_{n+1, m}(\partial^{n+m} f / \partial x^n \partial y^m)$ は f の $(n+m)$ 次下位関数である.

(証明)

閉曲線; $f=c$ と曲線; $f_x=0, f_y=0$ は交差する. 同様に, 曲線; $f_{ixjy}=0$ と曲線; $f_{i+1xjy}=0, f_{ixj+1y}=0$ は交差するので $f_{n+1, m}$ は $(n+y)$ 次下位関数である. ☒

局所的な曲線; $f=c$ と曲線; $f_x=0$ の関係は, 曲線; $f=c$ が x 軸と平行な直線と接点をもつ点, 多重点, あるいは孤立点で曲線; $f_x=0$ (曲線; $f_x=0$ が孤立点になることを含め) と交差している.

大域的には閉曲線; $f=c$ に対して, 曲線; $f_x=0$ が交差し, 閉曲線の外側に開いている (Fig. 1).

2.2 2 変数関数の極値探索のアルゴリズム

$D = \{(x, y) | f_1(y) \leq x \leq f_2(y), g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ を定義域とする関数 $\varphi(x, y)$ の極値探索の問題を考える. 曲線; $\varphi_x=0$ は極値点を通る曲線であり, 極値点で孤立点とならないので, 追跡する曲線として選ぶ.

定義域内部で閉曲線とならない曲線は境界 ∂D と必ず交差しているので, ∂D 上を走査して曲線; $\varphi_x=0$ との交点を求める. ∂D と交点を持たない曲線; $\varphi_x=0$ を見つけることが問題になるが, これは次のようにしてみつけることができる.

閉曲線; $\varphi_x=0$ に対して, 曲線; $\varphi_{xx}=0$ (φ_{xx} は φ_x の 1 次下位関数) は閉曲線と交差し外に開いて

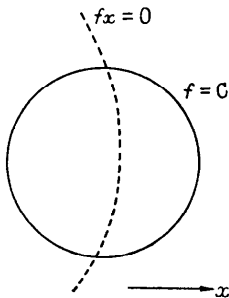


Fig. 1 Global relation between curve; $f=c$ and curve $f_x=0$

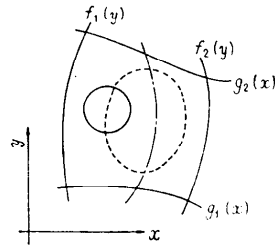


Fig. 2 Linking from ∂D to curve; $\varphi_x=0$ (—) via curve; $\varphi_{xx}=0$ (-·-·-) and curve; $\varphi_{xxx}=0$ (-----)

いるので, ∂D と交差し易くなっている. もし交点を持っているならば, 曲線; $\varphi_{xx}=0$ を追跡して曲線; $\varphi_x=0$ との交点を求めることによって, ∂D から曲線; $\varphi_{xx}=0$ を媒介として, 曲線; $\varphi_x=0$ にリンクできる.

更に, この曲線; $\varphi_{xx}=0$ が閉曲線になっているときには, 曲線; $\varphi_{xxx}=0$ を用いて, 曲線; $\varphi_{xx}=0$ を ∂D との交点を始点として追跡して, 曲線; $\varphi_{xx}=0$ との交点を求める. 更にこの交点から曲線; $\varphi_{xx}=0$ を追跡して, 曲線; $\varphi_x=0$ との交点を求める.

このようにして, φ_x の有限次数の下位関数について, 曲線; $\varphi_{n+1, m}=0$ が ∂D と必ず交点を持つことがわかっているならば, 曲線; $\varphi_x=0$ にリンクすることができる.

ところで, 問題は, このように閉じない曲線を与える下位関数の最高次数を知ることである.

(定理 2.2)

定義域内部で x 軸, または y 軸方向に単調な関数の等高線は, 定義域内部で閉曲線にならない.

(証明)

関数 $f(x, y)$ は定義域内部で x 軸方向に単調な関数とする. ある等高線; $f=c$ が閉等高線であるならば, $\exists x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$ ($x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$)
 $f(x_0, y_1) = f(x_0, y_2) = f(x_1, y_0) = f(x_2, y_0) = c$.
 ところが, この関係は f が x 軸方向に単調であることに矛盾する. ☒

単調関数であることの十分条件は 1 次式であることから, 曲線; $\varphi_x=0$ にリンクできるような関数は, φ_x の有限次数の下位関数が x または y の 1 次式であること, つまり

$$\varphi_x^{(N)} = \frac{\partial^{n+m} \varphi}{\partial x^n \partial y^m} \quad (N = n-1+m)$$

が x または y についての 1 次式になる.

このような関係を満たす関数は
 “関数 φ は次のような〈項〉の和として表現できる。〈項〉は x だけを変数とする関数と y だけを変数とする関数の積であり、そのどちらか、あるいは両方が有限次数の多項式である。”
 また次のような関数はすべての曲線; $\varphi_x=0$ が求められることが理論的には保証されない。

“関数 φ は次のような〈項〉を含む和である。〈項〉は x だけを変数とする関数と y だけを変数とする関数の積として表現され、両方が有限次数の多項式でない。あるいは x と y の有限次数の多項式でない関数である。”

また、次に示す関数は、上の条件を満たさないが、曲線; $\varphi_x=0$ は閉曲線とはならない。
 “関数 φ は x だけを変数とする関数と y だけを変数とする関数の積である。”

したがって、すべての極値を求めることが可能な関数のクラスは制限を受けることになるが、Taylor 展開によって多項式に近似できることから、実用的には適当な次数の下位関数までを参照すれば、かなりの信頼性で極値を求めることが可能であろう。

2.3 実験例

2.2 のアルゴリズムによる2変数関数の具体的なアルゴリズムの概略は次の通りである。

《Step 1》 有限枠 (定義域の境界) を走査して、有限枠と曲線; $\varphi_x=0, \varphi_{xx}=0, \dots, \varphi_{xxx}=0$ との交点を求め始点として登録する。

《Step 2》 $\varphi_{ix}=0$ の始点から、曲線; $\varphi_{ix}=0$ を追跡する。

曲線; $\varphi_x=0$ を追跡しているときには曲線; $\varphi_v=0$ との交点 (極値点)、曲線; $\varphi_{xx}=0$ との交点を求め二重に追跡しないためにチェックする。

曲線; $\varphi_{ix}=0 (i \geq 0)$ を追跡しているときには曲線; $\varphi_{i-1x}=0, \varphi_{i+1x}=0$ との交点をチェックし、 $\varphi_{i-1x}=0$ との新しい交点は始点として登録する。

すべての曲線の始点が処理済になるまでこの操作を続ける。

2変数関数の極値探索の実験例を Fig. 3 に示す。(a)は x の5次式、(b)は正規分布2個の重畳である。いずれも曲線; $\varphi_{xx}=0$ が有限枠と交差することがわかっている。図中実線は等高線、曲線; $\varphi_x=0$ を、破線は曲線; $\varphi_{xx}=0, \varphi_{xxx}=0$ を示している。MAX, MIN, SAD はそれぞれ極大点、極小点、鞍部点を示している。

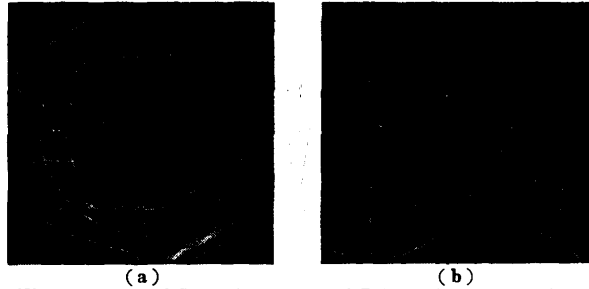


Fig. 3 Result of Searching Extremal Points of Function with 2-variables.

3. $k(\geq 3)$ 変数関数の極値探索

2.2 で述べた2変数関数のリンク手法による極値探索のアルゴリズムを $k(\geq 3)$ 変数関数の極値探索に拡張する。

【定義 3.1】

点 P_0 において $\text{grad } \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)=0$ かつ $|H| \neq 0 (H=(\varphi_{ij}), \varphi_{ij}=\partial^2\varphi/\partial x_i\partial x_j)$ ならば点 P_0 は極値点であり次のように分類できる。

$$\bigwedge_{i=1}^k \lambda_i < 0 \iff \text{点 } P_0 \text{ は極大点}$$

$$\bigwedge_{i=1}^k \lambda_i > 0 \iff \text{点 } P_0 \text{ は極小点}$$

$$\neg \left(\bigwedge_{i=1}^k \lambda_i > 0 \vee \bigwedge_{i=1}^k \lambda_i < 0 \right) \iff \text{点 } P_0 \text{ は鞍部点}$$

λ_i は行列 H の固有値

【定義 3.2】 (定義 2.2 の拡張)

k 変数関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ について、 $f=c$ が閉超曲面になるときに、超曲面; $g(x_1, x_2, \dots, x_k)=0$ が交差するとき、 g を f の (1次) 下位関数とよび、 $f^{(1)}$ と書く、同様に f に対する n 次下位関数 $f^{(n)}$ を定義する。

【定理 3.1】

関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ に対して $f_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_k) (i=1, 2, \dots, k)$ は (1次) 下位関数である。

3.1 $k(\geq 3)$ 変数関数の極値探索

k 次元空間にある極値点では $\bigwedge_{i=1}^k \varphi_{xi}=0$ であるので次のようにして求めることができる。

《Step 1》 超曲面; $\varphi_{x_1}=0$ を求める

《Step 2》 超曲面; $\varphi_{x_1}=0$ 上で $k-2$ 次元曲面; $\varphi_{x_1}=0 \wedge \varphi_{x_2}=0$ を求める。

⋮

《Step m》 $(k-m+1)$ 次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^{m-1} \varphi_{xi}=0$ 上で

$(k-m)$ 次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^m \varphi_{xi}=0$ を求める.

⋮

《Step $k-1$ 》 2次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^{k-2} \varphi_{xi}=0$ 上で曲線;

$\bigwedge_{i=1}^{k-1} \varphi_{xi}=0$ を求める.

《Step k 》 曲線; $\bigwedge_{i=1}^{k-1} \varphi_{xi}=0$ を走査して $\varphi_{xk}=0$ との交点を求める.

以上の手続きで、求めようとする曲面が閉じているときには、下位関数と定義域の境界を用いて曲線だけの走査で閉じている曲面にリンクする.

k 次元空間内に関数 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の定義域が定められているときに、その境界にクラスが考えられる.

〔定義 3.3〕

k 次元空間内で定義域 D が与えられているとき、 m 次元境界 $B(m)$ ($1 \leq m \leq k-1$) を次のように定義する.

$$B(m) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid \bigcup_{i_1=1}^k \bigcup_{i_2=1}^k \dots \bigcup_{i_m=1}^k \left(\bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1 \\ \vdots \\ j \neq i_m}}^k (x_j) \right) \right. \\ \left. = x_{jN} \text{ or } x_{jX} \wedge (x_1, \dots, x_k) \in D \right\}$$

ただし $D = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid \bigwedge_{i=1}^k (x_{iN} \leq x_i \leq x_{iX}) \right\}$

$B(m)$ は k 次元空間の定義域を囲む m 次元部分空間であり、たとえば3次元空間内に立方体状の定義域を考えれば、 $B(1)$ は立方体の辺、 $B(2)$ は面を表わしている.

定義域の境界にクラスを考えたことによって、超曲面の定義域の境界に対する閉じ方にもクラスが考えられる.

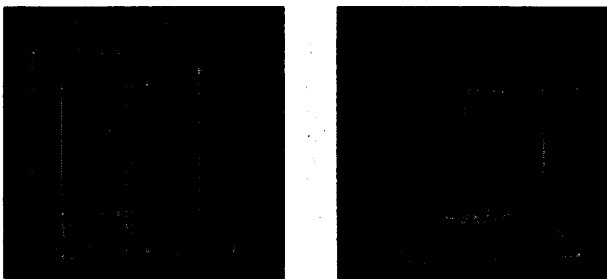


Fig. 4 Result of Searching Extremal Points of Function with 3-variables.

〔定義 3.4〕

k 次元空間中の超曲面が、定義域の境界に対して n 次元的 ($1 \leq n \leq k-1$) に閉じているとは、 $B(n+1)$ とは交点を持ち、 $B(n)$ とは交点を持たない状態である.

定義 3.3. 3.4 は k 次元空間の部分空間に拡張して考えることによって、求める曲面が閉じているときのリンクは次のようにできる. たとえば Step m で $k-m+1$ 次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^{m-1} \varphi_{xi}=0$ の境界上で、 l 次元的に孤立している $(k-m)$ 次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^m \varphi_{xi}=0$ には、 φ_{xm} の l 個の下位関数と $B(l+1)$ のなす曲線を追跡してリンクする.

なお、 $(k-m)$ 次元曲面; $\bigwedge_{i=1}^m \varphi_{xi}=0$ の n 次元境界は曲面上で、 $(k-n)$ 個の変数を一定にしたとき n 個の変数が極大または極小となる点の集合である.

3.2 3変数関数の極値探索の実験例

リンク手法による3変数関数の極値探索の実験例を Fig. 4 に示す、(a)は曲面; $\varphi_x=0$ が円柱状に上の面から下の面まで貫いている (1次元的に閉じている). (b)では曲面; $\varphi_x=0$ は球状に3次元空間内に浮いている状態である (2次元的に閉じている). いずれも X, N, S は極大点, 極小点, 鞍部点を示している.

この方法による処理時間を、完全探索法と比較したものを Fig. 5 に示す. 2変数関数 (Fig. 3(b)) の場合で、完全探索法がサンプル区間数に対して2乗特性を示しているのに対し、リンク手法では線形特性であり、処理時間ではかなり有効であるが、関数 $\varphi(x,$

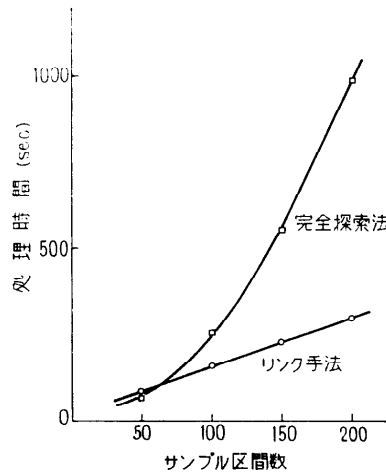


Fig. 5 Comparison of Processing Time between Linking Method and Complete Searching.

x_2, \dots, x_k に対して, $\bigwedge_{i=1}^{k-1} \varphi_{x_i} = 0$ を走査する方法では, これらの曲線が一般に非連結で閉曲線になり易いので, 高次の下位関数を参照する必要がある. そのため手続きは一般に複雑になり, 曲線の始点を登録するための大きな記憶容量を必要としている.

4. 下位関数の最適化

2.2, 3.1 で述べた方法では追跡する曲線が一般に非連結で閉じ易いため欠点はあったが, 連結で閉じにくい曲線として特徴線が知られている.

4.1 特徴線^{3),4)}

〔定義 4.1〕

$\text{grad } \varphi = 0$ または, 曲面 $z = \varphi(x, y)$ の主方向の一つと $\text{grad } \varphi$ の方向が一致する点の集合を特徴線という.

〔定義 4.2〕

特徴線上では次の関係が満たされる.

$$Hu = \lambda u \tag{4.1}$$

$$\iff F = vHu = 0 \quad (t; \text{転置}) \tag{4.2}$$

ここで, $u = (\varphi_x \ \varphi_y)$ $v = (-\varphi_y \ \varphi_x)$

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} \quad |H - \lambda E| = 0$$

〔定義 4.3〕

$$\text{grad } \varphi = 0 \quad \text{または} \quad \partial^2 \varphi / \partial u \partial v = 0$$

を満たす点の集合が特徴線である.

なお, u, v はそれぞれ u, v 方向.

定義 4.1~4.3 は等価である.

〔性質 4.1〕

単純閉等高線は必ず特徴線と交差する⁴⁾.

〔系〕

特徴線で囲まれる領域には閉等高線は存在しない.

〔性質 4.2〕

特徴線とは曲面 $z = \varphi(x, y)$ の主方向が直交するよ

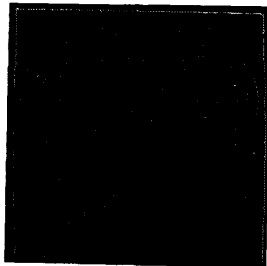


Fig. 6 Characteristic Line of a Function with 2-variables.

うな点の集合である.

〔性質 4.3〕

特徴線とは $\text{grad } \varphi = 0$, または等高線方向にみたときの等高線間隔が極値になる点の集合である.

〔性質 4.4〕

特徴線は $\text{grad } \varphi = 0$, または力線の変曲点の集合である.

〔補題 4.1〕

点 P において, $f(x, y) = 0, \text{grad } f = 0, \nabla^2 f = 0$ ($f_{yy} \neq 0$) ならば, 点 P において曲線; $f = 0$ は直交する.

〔証明〕

点 P における曲線; $f = 0$ の接ベクトル方向 ($m = \Delta y / \Delta x$) は次式を満たす.

$$m^2 f_{yy} + 2m f_{xy} + f_{xx} = 0 \tag{4.3}$$

根を m_1, m_2 とすれば

$$m_1 \times m_2 = f_{xx} / f_{yy} = -1 \quad \square$$

〔性質 4.5〕

$\nabla(\varphi_{xx} = \varphi_{yy} \wedge \varphi_{xy} = 0)$ かつ $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 \neq 0$ なる極値点では特徴線は直交する.

〔証明〕

極値点では $u = v = 0$ より

$$F = 0$$

$$F_x = 0, \quad F_y = 0$$

$$F_{xx} = 2(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\varphi_{xy}$$

$$F_{xy} = 2(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)(\varphi_{yy} - \varphi_{xx})$$

$$F_{yy} = -2(\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)\varphi_{xy}$$

補題 4.1 より直交する. □

〔性質 4.6〕

鞍部点の近傍では, 等高線の中心線は特徴線である (Fig. 6).

4.2 特徴線による極値探索

特徴線が定義域の内部で閉曲線にならない理論的保証はない. また性質 4.4 を考慮して Fig. 7 のような

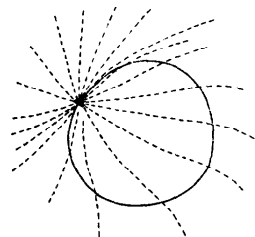


Fig. 7 Example of closed Characteristic Line. Broken Line shows Force Line.

閉曲線となる特徴線が思考実験によって考えられる。しかしながら、実験によって特徴線は一般に連結性に富み、閉曲線になりにくいことが確められている。つまり特徴線は極値探索にとって信頼性の高い線であるということができる。

〔定理 4.1〕 (性質 4.1 の変形)

式 (4.2) で与えられる関数 F は下位関数である。

特徴線による極値探索の信頼性を更に高めるために閉曲線となるような特徴線にリンクできる高次の特徴線を考える。定義 2.2, 定理 4.1 より明らかに、次の定理を得る。

〔定理 4.2〕

関数 $F^{(n)}$ は φ の n 次下位関数である。

$$F^{(n)} = {}^t \mathbf{v}^{(n-1)} H^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} \quad (4.4)$$

$${}^t \mathbf{u}^{(n)} = (F_{xx}^{(n)}, F_{yy}^{(n)}), {}^t \mathbf{v}^{(n)} = (-F_y^{(n)}, F_x^{(n)})$$

$$H^{(n)} = \begin{pmatrix} F_{xx}^{(n)} & F_{xy}^{(n)} \\ F_{xy}^{(n)} & F_{yy}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$F^{(0)} = \varphi$$

曲線; $F^{(n)}(x, y) = 0$ を n 次特徴線と呼び、特に $n = 1$ のときには単に特徴線と呼ぶ。 n 次特徴線は、また次の関係式で与えられる。

$$n \text{ 次特徴線} = \{(x, y) | H^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)}\} \quad (4.5)$$

$$n \text{ 次特徴線} = \{(x, y) | \dots ((\varphi_{u^i v^i})_{u^1 v^1}) \dots\}_{u^{n-1} v^{n-1}} = 0\} \quad (4.6)$$

ここで $|H^{(n)} - \lambda^{(n)} E| = 0$, $\mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n$ はそれぞれ $\mathbf{u}^{(n)}$, $\mathbf{v}^{(n)}$ 方向である。また式 (4.4), (4.5), (4.6) はそれぞれ式 (4.2), (4.1), (4.3) に対応している。

$n-1$ 次特徴線に対する n 次特徴線の関係は等高線に対する特徴線の関係と同じであり、その性質は性質 4.1~4.6 に述べた通りである。興味あるのは曲面 $z = \varphi(x, y)$ に対する n 次特徴線の性質である。

〔性質 4.7〕

n 次特徴線は $\nabla(\varphi_{xx} = \varphi_{yy} \wedge \varphi_{xy} = 0)$ かつ $\varphi_{xx} \varphi_{xy} -$

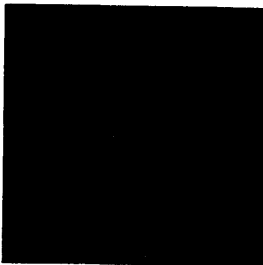


Fig. 8 2nd Characteristic Line (—) and Characteristic Line (-----).

$\varphi_{xy}^2 \neq 0$ なる極値点で直交する。

〔証明〕

性質 4.5 によって、上の関係を満たす極値点では、特徴線は直交し、曲面 $z = F(x, y)$ の鞍部点になる、以下同様に、この極値点は曲面 $z = F^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$) の鞍部点となるので、 n 次特徴線は直交する。□
性質 4.6, 4.7 から

〔性質 4.8〕

$\nabla(\varphi_{xx} = \varphi_{yy} \wedge \varphi_{xy} = 0)$ かつ $\varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 \neq 0$ なる極値点では、 $2n$ 次特徴線、 $(2n-1)$ 次特徴線 ($n = 1, 2, \dots$) はそれぞれ互いに一致する。

特徴線による極値探索では、特徴線自身が信頼性の高い曲線であるが、Fig. 7 のような場合を考慮すると、高次の特徴線を用いて、順次低次の特徴線にリンクする必要がある。しかしながら、2本以上特徴線が交差する点では n 次特徴線も通ることから、高次の特徴線の参照は信頼性を高めるが、冗長性を大きくすることになる。

4.3 $k(\geq 3)$ 変数関数の特徴線

定義 4.1 を $k(\geq 3)$ 変数関数の特徴線に拡張する。

〔定義 4.4〕

次の関係を満たすものは n 次特徴線である。

$$H^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} = \lambda^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} \quad (4.7)$$

$$\iff \bigwedge_{i=1}^{k-1} {}^t \mathbf{v}_i^{(n-1)} H^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} = 0 \quad (4.8)$$

$$H^{(n)} = (F_{ij}^{(n)}) \quad (F_{ij}^{(n)} = \partial^2 F^{(n)} / \partial x_i \partial x_j)$$

$${}^t \mathbf{u}^{(n)} = (F_{x_1}^{(n)}, F_{x_2}^{(n)}, \dots, F_{x_k}^{(n)})$$

$\mathbf{v}_i^{(n)}$; $\mathbf{u}^{(n)}$ に垂直かつ 1 次独立な $k-1$ 個のベクトルであり曲面; $x_{k+1} = F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の等高超曲面の基底をなす。

〔定義 4.5〕

次の関係を満たす曲線は n 次特徴線である。

$$\bigwedge_{i=1}^{k-1} F^{(n-1)} \mathbf{u}^{(n-1)} \mathbf{v}_i^{(n-1)} = 0 \quad (4.9)$$



Fig. 9 Characteristic Line of Function with 3-variables.

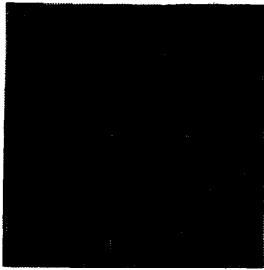


Fig. 10 Curve; $F_v=0$ (—), Characteristic Line (-----).



Fig. 11 Curve; $F_u=0$ (—), Characteristic Line (-----).

定義 4.4, 4.5 は等価である.

〔定理 4.3〕

式(4.7)より $\lambda^{(n-1)}$ を消去して得られる独立な $(k-1)$ 個の関数, および式(4.8), (4.9) に示す $(k-1)$ 個の関数は φ の n 次下位関数である.

特徴線を用いた, k 変数関数の極値探索の方法は 3.1 で述べた方法と同じであり, 閉じている曲面に対しては, その高次の特徴線を用いてリンクする.

4.4 曲線; $F_u=0, F_v=0$

特徴線を与える陰関数 F を u (力線方向), v (等高線方向) で偏微分した関数 F_u, F_v は下位関数ではないが, 曲線; $F_u=0, F_v=0$ は局所的には興味ある性質を持っている.

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ -\varphi_y & \varphi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial F / \partial x \\ \partial F / \partial y \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

〔性質 4.9〕

特徴線の特異点 (特徴線が自分自身と交差する点) では $F_u=0, F_v=0$ となる.

特に, 極値点では, 曲線; $F_u=0, F_v=0$ は次のような性質がある.

〔性質 4.10〕

$\nabla(\varphi_{xx}=\varphi_{yy} \wedge \varphi_{xy} \neq 0)$ かつ $\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2 \neq 0$ かつ $\nabla^2\varphi \neq 0$ なる極値点では曲線; $F_u=0$ の接ベクトル方向は特徴線の接ベクトル方向と一致する.

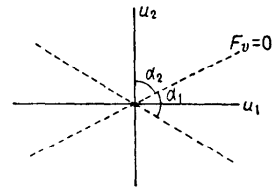


Fig. 12

〔性質 4.11〕

曲線; $F_v=0$ は極大点, 極小点を通り, その近傍の中心線は特徴線である. また鞍部点では孤立点になる.

〔性質 4.12〕

極大点, 極小点における曲面 $z=\varphi(x, y)$ の行列 H

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

の固有値を λ_1, λ_2 , 固有ベクトル方向をそれぞれ u_1, u_2 とする. 曲線; $F_v=0$ の u_1, u_2 軸方向の狭角がそれぞれ $2\alpha_1, 2\alpha_2$ とすれば $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$ の間に次の関係が成立する. (Fig. 12)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \tan^{-1} \lambda_2 / \lambda_1 \\ \alpha_2 &= \tan^{-1} \lambda_1 / \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

〔性質 4.13〕

曲線; $F_v=0$ は特徴線の特徴変化点を通る.

以上の性質と, 曲線; $F_u=0, F_v=0$ が曲面に付随した線であることから, 次のような目的に有効である.

- (i) 曲線; $F_u=0, F_v=0$ は極大点, 極小点を通るので, 特徴線に囲まれる局所的な領域での閉曲線となる特徴線へのリンク.
- (ii) 特徴線の縮退解除, 特異的の消滅 (Fig. 13) によってできる特徴変化点と極値点との接続による特徴線の接続構造⁵⁾の解析.
- (iii) 特徴線の縮退構造, 特異点の構造の解析.

5. あとがき

リンク手法による極値探索の方法を紹介した. 適要

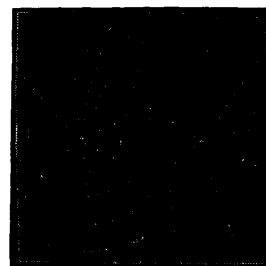


Fig. 13 Curve; $F_v=0$ Characteristic Line (-----).

可能な関数のクラス，信頼性などの問題が残っているが，かなり有効な方法であることがわかった。

今後，期待される探索方法は，単なる曲線の追跡ではなく曲線の接続構造，極値点間の構造等を考慮した方法であろう。また変数の数が多いときには，境界の数が多くなるために，補助的操作が多くなる。これを防ぐために，Steepest Ascent 法などにより極大(小)点を見つけ，そこから極値点間を接続する曲線を見つける方法が有効であると考えられる。

なお，本研究にあたり御討論，御協力頂きました本研究室の皆様には厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

1) L. C. W. ディクソン，松原正一訳：“非線形最

適化計算法” 培風館，

- 2) 榎本，片山，川本：“曲線間のリンク手法” 信全大会予稿 (1976-03)。
- 3) 榎本，堂下，村上：“画像の特徴の一考察” 信学会オートマトン，インフォメーション理論研究 $\hat{\alpha}_T$ 71-12 (1971-04)。
- 4) 榎本，片山，伊藤，鶴見：“曲線の構造線” 信学会パターン認識と学習研究 PRL 72-138(1973-03)。
- 5) 榎本，片山，吉田：“画像の特徴線，分割線の接続構造” 情報処理学会第 15 回大会 (1974-12)。
- 6) 榎本，片山，川本：“極値探索の一方法” 信学会パターン認識と学習研究 PRL 75-26(1975-07)

(昭和 51 年 3 月 2 日受付)