



## 区分的エルミート補間の誤差解析\*

秦野和郎\*\*

### Abstract

In this paper, the Peano kernels of piecewise Hermite interpolation error for derivatives,  $G^{(l)}(x, y)$ , are derived at first by the use of the explicit representation of the above interpolation given by Hosaka<sup>1)</sup>, Ahlberg-Nielson-Walsh<sup>2)</sup>.

Next, by numerical maximization of  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |G^{(l)}(x, y)| dy$ , optimum bounds of piecewise Hermite interpolation error for derivatives up to 25-th order, are obtained.

These estimations are best possible and comparison of them with the results given by Ciarlet-Schultz-Varga<sup>3)</sup> and Kansy<sup>4)</sup> reveals that their estimations are fairly conservative.

### 1. ま え が き

楕円型微分方程式の境界値問題を数値的に解く手法として古典的な Reighleigh-Ritz-Galerkin の方法が注目されてきている<sup>5), 6), 10)</sup>. この方法を一般的に適用するための基底関数として, 多項式, スプラインなどで代表される区分的多項式が検討の対象になっているが特に区分的多項式に重点がおかれていると思われる.

区分的エルミート補間はスプラインほど滑らかではないが実用上, 十分に滑らかな関数であり, 強い局所性を持つことから多くの検討がなされている<sup>5), 6), 10)</sup>. また, 区分的エルミート補間はある条件のもとでは, 即ち, 多くの点で関数値及び高次の微係数まで与えられたときには高精度の補間公式として役に立ち, それを微分または積分して得られる式はそれぞれ数値微分公式, 数値積分公式<sup>8), 9)</sup>として役に立つ. 更に区分的エルミート補間から導かれた数値積分公式は常微分方程式の初期値問題にも応用できる<sup>12)</sup>.

与えられた関数  $f(x)$  に対する  $2m-1$  次の区分的エルミート補間を  $H(x)$  とする. このとき  $l$  次導関数の誤差の上限  $\|f^{(l)}(x) - H^{(l)}(x)\|_{\infty}$  を得る試みは Ciarlet-Schultz-Varga<sup>3)</sup> によって始めてなされた. その後, Kansy<sup>4)</sup> がこれを改良する形で解析しているが十

分な結果は得られていない. 他方, Birkhoff-Priver<sup>3)</sup> は  $m=2, 3$  に対して  $f^{(l)}(x) - H^{(l)}(x)$  の Peano 核を導出し, その絶対値の定積分を計算して正確な誤差評価を得ている. 更に Birkhoff-Schultz-Varga<sup>6)</sup> は一変数及び二変数の区分的エルミート補間の誤差について詳細な議論をしている. しかしこの議論において中心的な役割りを果たす Peano 核の導出方法が適切でないために,  $m \geq 4$  に対する誤差評価に関しては, 結局は具体性に乏しい議論になっている.

本論文では, 穂坂<sup>1)</sup>, Ahlberg-Nielson-Walsh<sup>2)</sup> の与えた区分的エルミート補間の explicit な表現を使って任意の  $m$  に対する  $f^{(l)}(x) - H^{(l)}(x)$  の Peano 核を導出する. 更に導出された Peano 核を使って,  $2 \leq m \leq 13$  に対して  $\|f^{(l)}(x) - H^{(l)}(x)\|_{\infty}$  の正確な誤差評価を数値的に算出する. 得られた結果を一例として  $m=6$  の場合について, Ciarlet-Schultz-Varga<sup>3)</sup>, Kansy<sup>4)</sup> の示している結果と比較し, 従来得られていた評価がかなり控え目なものであったことを示す.

### 2. 区分的エルミート補間

与えられた有界閉区間,  $I=[a, b]$  の分割を  $\Delta$  とする.

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

である.  $H^{(m)}(\Delta)$  を  $\Delta$  の各部分区間  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) では  $2m-1$  次の多項式で,  $I$  全体では,

\* Error analysis of piecewise Hermite interpolation by Kazuo HATANNO (Nagoya University Computation Center).

\*\* 名古屋大学大型計算機センター

$m-1$  次導関数まで連続であるような実の区分的多項式の全体であるとする。

与えられた任意の実関数  $f(x) \in C^{2m}[a, b]$  に対し、

$$\begin{cases} D^l H(x_i) = f^{(l)}(x_i) = f_i^{(l)} \\ D^l H(x_{i+1}) = f^{(l)}(x_{i+1}) = f_{i+1}^{(l)} \end{cases} \quad (2.1)$$

$0 \leq i \leq n-1, 0 \leq l \leq m-1, D \equiv d/dx.$

をみたく  $H^{(m)}(d)$  の要素  $H(x)$  を  $f(x)$  に対する区分的エルミート補間と呼ぶ<sup>6)</sup>。区分的エルミート補間は、 $\delta_{i,j}$  をクロネッカーデルタとして、一般に、

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=0}^n \sum_{\alpha=0}^{m-1} f_i^{(\alpha)} \varphi_{i,\alpha}(x) \\ D^l \varphi_{i,\alpha}(x) &= \delta_{i,j} \cdot \delta_{\alpha,l} \\ D^{2m} \varphi_{i,\alpha}(x) &\equiv 0 \quad (x \neq x_j) \\ \varphi_{i,\alpha}(x) &\in C^{m-1}[a, b]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

と表現される<sup>5)</sup>が、後に述べる解析のためには次の表現<sup>6)</sup>が便利である。

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t_i = (x - x_i)/h_i, \quad 0 \leq t_i \leq 1$$

$(i=0, 1, \dots, n-1)$  とおく。

$$\begin{cases} H(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x) H_i(t_i) \\ v_i(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & x < x_i, x > x_{i+1} \end{cases} \\ H_i(t_i) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^\alpha \{ f_i^{(\alpha)} p_\alpha(t_i) + f_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha(t_i) \}. \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで

$$p_\alpha^{(l)}(t) = \frac{d^l}{dt^l} p_\alpha(t), \quad q_\alpha^{(l)}(t) = \frac{d^l}{dt^l} q_\alpha(t)$$

として、

$$\begin{cases} p_\alpha^{(l)}(0) = \delta_{\alpha,l} & \begin{cases} q_\alpha^{(l)}(0) = 0 \\ q_\alpha^{(l)}(1) = \delta_{\alpha,l} \end{cases} \\ p_\alpha^{(l)}(1) = 0 & \end{cases} \quad (2.4)$$

$0 \leq \alpha \leq m-1, 0 \leq l \leq m-1$

である。

区分的エルミート補間の局所性から、 $d$  の一つの区間  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  における議論で十分である。以下、 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  においてのみ考察し、 $h_i$  を  $h$ ,  $t_i$  を  $t$  と書く。

式(2.4)をみたく  $t$  についての  $2m-1$  次多項式、 $p_\alpha(t)$ ,  $q_\alpha(t)$  を穂坂<sup>1)</sup>, Ahlberg-Nielson-Walsh<sup>2)</sup> が与えている。

穂坂によれば、

$$\begin{cases} p_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=0}^{m-1-\alpha} (-1)^{\alpha+j-1} \binom{2m-1-\alpha}{j} \\ \times t^{\alpha+j} (t-1)^{2m-1-\alpha-j} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} q_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=0}^{m-1-\alpha} (-1)^j \binom{2m-1-\alpha}{j} \\ \times t^{2m-1-\alpha-j} (t-1)^{\alpha+j} \end{cases}$$

Ahlberg-Nielson-Walsh によれば

$$\begin{cases} p_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha!} + \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{j-m-1} \binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha} \\ \times \binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j} t^j \\ q_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{\alpha+j-m} \sum_{r=0}^{\alpha} \binom{j-r-1}{m-1} \\ \times \binom{2m-1-\alpha}{j-r} \binom{\alpha}{r} t^j \\ = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=m}^{2m-1} (-1)^{\alpha+j-m} \binom{j-1-\alpha}{m-1-\alpha} \\ \times \binom{2m-1-\alpha}{2m-1-j} \\ \times \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{(j-\alpha) \binom{2m-1-j}{\alpha-r} \binom{j-m}{r}}{(j-r) \binom{m-1}{\alpha}} t^j. \end{cases} \quad (2.6)$$

である。区分的エルミート補間の多くの性質が式(2.4), (2.5), (2.6)から導かれる。

### 3. 基本的な性質

$p_\alpha(t)$ ,  $q_\alpha(t)$  は次の恒等式をみたく。

$$\begin{cases} q_\alpha(t) = (-1)^\alpha p_\alpha(1-t) \\ p_\alpha(t) = (-1)^\alpha q_\alpha(1-t) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\frac{t^\alpha}{\alpha!} - \left\{ p_\alpha(t) + \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{q_r(t)}{(\alpha-r)!} \right\} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{t^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{q_r(t)}{(\beta-r)!} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{t^{2m}}{(2m)!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{q_r(t)}{(2m-r)!} = \frac{1}{(2m)!} \{t(t-1)\}^m \quad (3.4)$$

$$0 \leq \alpha \leq m-1, m \leq \beta \leq 2m-1.$$

〔証明〕 式(3.1)の第一式を証明する。

$$\lambda_\alpha(t) = q_\alpha(t) - (-1)^\alpha p_\alpha(1-t)$$

とおき両辺を  $t$  について  $l$  回微分すると、

$$\lambda_\alpha^{(l)}(t) = q_\alpha^{(l)}(t) - (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(1-t)$$

である。これから

$$\lambda_\alpha^{(l)}(0) = q_\alpha^{(l)}(0) - (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(1)$$

$$\lambda_\alpha^{(l)}(1) = q_\alpha^{(l)}(1) - (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(0)$$

であるが、式(2.4)から  $0 \leq l \leq m-1$  に対して、

$$\lambda_\alpha^{(l)}(0) = \lambda_\alpha^{(l)}(1) = 0$$

である。従って  $\lambda_\alpha(t)$  は  $t=0, 1$  で  $m$  次の零点を持つ。一方、 $\lambda_\alpha(t)$  はただか  $2m-1$  次の多項式であるから  $\lambda_\alpha(t) \equiv 0$  である。 Q. E. D.

式(3.1)の第二式, 式(3.2), (3.3)も同じようにして証明できる.

次に式(3.4)を証明する.

$$\lambda(t) = \frac{t^{2m}}{(2m)!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{q_r(t)}{(2m-r)!}$$

とおき, 両辺を  $t$  について  $l$  回微分する.

$$\lambda^{(l)}(t) = \frac{t^{2m-l}}{(2m-l)!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{q_r^{(l)}(t)}{(2m-r)!}$$

である. 式(2.4)から  $0 \leq l \leq m-1$  に対して,

$$\lambda^{(l)}(0) = \lambda^{(l)}(1) = 0$$

が得られる. 一方,  $\lambda(t)$  はただだか  $2m$  次の多項式であるから  $\lambda_0$  を定数として,

$$\lambda(t) = \lambda_0 \{t(t-1)\}^m$$

と書ける.  $t^{2m}$  の係数を比較すると,  $\lambda_0 = 1/(2m)!$  が得られる. Q. E. D.

#### 4. 区分的エルミート補間の誤差

本章では 3. で得られた関係式を使って区分的エルミート補間の誤差に対する Peano 核を導出し, 誤差の積分表現を得る.

$x = x_i + ht$  するとき,  $f(x) - H_i(t)$  に積分剰余項を持つテーラー展開式

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} \frac{(x-x_i)^j}{j!} f^{(j)}(x_i) + \frac{1}{(2m-1)!} \int_{x_i}^x (x-y)^{2m-1} f^{(2m)}(y) dy$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} f(x) - H_i(t) &= \sum_{\alpha=0}^{m-1} \left[ \frac{t^\alpha}{\alpha!} - \left\{ p_\alpha(t) + \sum_{r=0}^{\alpha} \frac{q_r(t)}{(\alpha-r)!} \right\} \right] h^\alpha f_i^{(\alpha)} \\ &+ \sum_{\beta=m}^{2m-1} \left[ \frac{t^\beta}{\beta!} - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{q_r(t)}{(\beta-r)!} \right] h^\beta f_i^{(\beta)} \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{(x-y)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(x_{i+1}-y)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} \right. \\ &\left. \times h^\alpha q_\alpha(t) \right] f^{(2m)}(y) dy \end{aligned}$$

となる. 右辺の第一項及び第二項はそれぞれ式(3.2), (3.3)から 0 になる. また, ここで,

$$(x-y)_+^{2m-1} = \begin{cases} (x-y)^{2m-1} & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

である.  $s = (y-x_i)/h$  とおくと,

$$f(x) - H_i(t) = h^{2m} \int_0^1 g(t, s) f^{(2m)}(y) ds \quad (4.1)$$

\*文献 6) Theorem 1 による. influence function<sup>13)</sup> とも呼ばれる.  
\*\*文献 6) による.

$$g(t, s) = \frac{(t-s)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1-s)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} q_\alpha(t) \quad (4.2)$$

となる.  $t \geq s$  のとき  $0 \leq l \leq 2m-1$  に対して,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^l}{\partial s^l} g(t, s) \right]_{s=0} &= g^{(0,l)}(t, 0) \\ &= (-1)^l \left\{ \frac{t^{2m-1-l}}{(2m-1-l)!} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{1}{(2m-1-\alpha-l)!} q_\alpha(t) \right\} \end{aligned}$$

である.  $0 \leq l \leq m-1$  のとき式(3.3)から  $g^{(0,l)}(t, 0) = 0$ ,  $m \leq l \leq 2m-1$  のとき式(3.2)から,  $g^{(0,l)}(t, 0) = (-1)^l p_{2m-1-l}(t)$  となる. 従って  $t \geq s$  のとき,

$$\begin{aligned} g(t, s) &= \sum_{l=m}^{2m-1} (-1)^l \frac{s^l}{l!} p_{2m-1-l}(t) \\ &= - \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{s^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha(t) \end{aligned}$$

である. 式(4.2)から

$$g(t, s) = \begin{cases} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{s^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha(t) & 0 \leq s \leq t \\ \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(s-1)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} q_\alpha(t) & t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

が得られる. 以上から

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t) &= D^l \{ f(x) - H_i(t) \} \\ &= h^{2m-l} \int_0^1 g^{(l)}(t, s) f^{(2m)}(y) ds \quad (4.4) \\ y &= x_i + hs \\ g^{(l)}(t, s) &= \frac{\partial^l}{\partial t^l} g(t, s) \end{aligned}$$

となる. ここで,  $h^{2m-1-l} g^{(l)}(t, s)$  が  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  における  $f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t)$  の Peano 核\*である.

式(4.4)に, Hölder の不等式\*\*を適用すると,

$$|f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t)| \leq h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_\infty \int_0^1 |g^{(l)}(t, s)| ds. \quad (4.5)$$

が得られ,

$$c_{-}^{(l)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 |g^{(l)}(t, s)| ds. \quad (4.6)$$

とおけば,

$$\|f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t)\|_\infty \leq c_{-}^{(l)} \cdot h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_\infty \quad (4.7)$$

が得られる.

ここで  $g^{(l)}(t, s)$  の対称性についておいておく. 式(4.3)から

$$g^{(l)}(1-t, 1-s)$$

$$= \begin{cases} -\sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(1-s)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha^{(l)}(1-t) & 0 \leq 1-s \leq 1-t \\ \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(-s)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} q_\alpha^{(l)}(1-t) & 1-t \leq 1-s \leq 1 \end{cases}$$

であるが式(3.1)から得られる  $p_\alpha^{(l)}(1-t) = (-1)^{\alpha-l} \times q_\alpha^{(l)}(t), q_\alpha^{(l)}(1-t) = (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(t)$  を代入すると  $g^{(l)}(1-t, 1-s)$

$$= \begin{cases} (-1)^l \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(s-1)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} q_\alpha^{(l)}(t) & t \leq s \leq 1 \\ -(-1)^l \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{s^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha^{(l)}(t) & 0 \leq s \leq t \end{cases}$$

となる。従って

$$g^{(l)}(1-t, 1-s) = (-1)^l g^{(l)}(t, s) \tag{4.8}$$

である。

### 5. $c_\infty^{(l)}$ の計算

4. で得られた誤差の積分表現を使って誤差の上限を得る。その際、Birkhoff-Priver<sup>3)</sup>が  $m=2, 3$  の場合について行っているような複雑な計算を避けるために、計算を二つの段階に分けて、見通しをよくする工夫をする。

$$c^{(l)}(t) = \int_0^1 |g^{(l)}(t, s)| ds$$

とおく。更に、

$$d^{(l)}(t) = \int_0^1 g^{(l)}(t, s) ds$$

とおく。式(4.2)から

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t, s) ds &= \left[ -\frac{(t-s)s^{2m}}{(2m)!} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{(1-s)^{2m-\alpha}}{(2m-\alpha)!} q_\alpha(t) \right]_0^1 \\ &= \frac{t^{2m}}{(2m)!} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{q_\alpha(t)}{(2m-\alpha)!} \end{aligned}$$

であるが、式(3.4)から

$$\int_0^1 g(t, s) ds = \frac{1}{(2m)!} \{t(t-1)\}^m$$

である。従って

$$d^{(l)}(t) = \frac{1}{(2m)!} \cdot \frac{d^l}{dt^l} \{t(t-1)\}^m \tag{5.1}$$

となる。

さて、式(4.3)から  $0 \leq s \leq t$  において

$$g^{(l)}(t, s) = -s^m \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{s^{m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha^{(l)}(t)$$

であるから  $g^{(l)}(t, s) = 0$  をみたす  $s$  は  $m-1$  次の代数方程式を解くことにより得られる。 $t \leq s \leq 1$  において

も同じである。 $g^{(l)}(t, s) = 0$  をみたす  $s$  が得られれば、 $c^{(l)}(t)$  を解析的に計算することが可能であり、それにより得られた  $c^{(l)}(t)$  を最大にする  $t$  を計算できれば、それから  $c_\infty^{(l)}$  を得ることができる。実際、Birkhoff-Priver<sup>3)</sup>は  $m=2, 3$  に対してそのようにして計算している。 $m=4, 5$  に対しては、 $s$  についての代数方程式  $g^{(l)}(t, s) = 0$  は 3次、4次となるので、根  $s$  を代数的に算出できる。従って、 $c^{(l)}(t)$  を  $t$  の関数として陽的に表現することができるが、それを最大にする  $t$  を代数的に求めることは困難である。従って、一般的に  $c_\infty^{(l)}$  を計算するには、数値的手段によらねばならない。ここでは  $c_\infty^{(l)}$  の計算を次のようにして行った。

式(4.8)に示した  $g^{(l)}(t, s)$  の対称性から  $0 \leq t \leq 0.5$  で考えれば十分である。

(i) まず  $t=0$  から  $t=0.5$  まで 0.01 の間隔で、すなわち、 $t = T_j = 0.01j$  ( $0 \leq j \leq 50$ ) に対して、 $s=0$  から  $s=1$  まで 1/25 の間隔で  $g^{(l)}(t, s)$  を十分な精

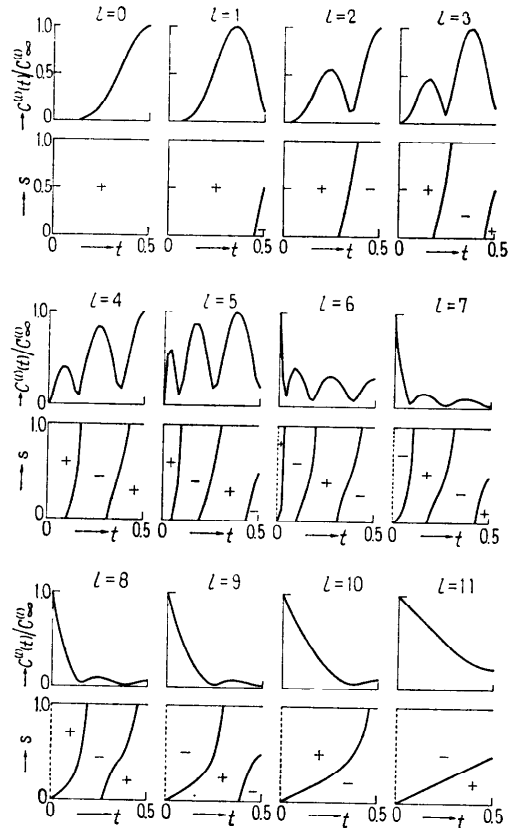


Fig. 1 Curves of  $c^{(l)}(t)/c_\infty^{(l)}$  and Contour lines of  $g^{(l)}(t, s) = 0$  for  $m=6$ .

Table 1-1 Computed values of  $c_{\infty}^{(l)}$  and  $t_{\max}$ , where  $\|f^{(l)}(x) - H_l^{(l)}(t)\|_{\infty} \leq c_{\infty}^{(l)} h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty}$  and  $\int_0^1 |f^{(l)}(t_{\max}, s)| ds = c_{\infty}^{(l)}$ .

m=9 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-17.

m=10 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-19.

m=11 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-21.

m=12 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-23.

m=2 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-3.

m=3 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-4.

m=4 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-7.

m=5 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-9.

m=6 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-11.

m=7 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-13.

m=8 table with columns l, C\_infinity^(l), and t\_max. Rows 0-15.

Table 1-2

$l$	$c_{-}^{(l)}$	$t_{max}$
0	0.369488636139750102D-34	0.500000000000000000 00
1	0.225444864248704716D-32	0.400000000000000000 00
2	0.384268181583461036D-32	0.500000000000000000 00
3	0.537894549225663583D-31	0.422259934948333340 00
4	0.110669236296577951D-29	0.500000000000000000 00
5	0.208346373287134171D-28	0.432204332104517155D 00
6	0.488946639704942983D-27	0.500000000000000000 00
7	0.107728215038679786D-25	0.437571223754913581D 00
8	0.272689998234768870D-24	0.500000000000000000 00
9	0.667623712967428446D-23	0.440511831315217727D 00
10	0.176702470856129710D-21	0.500000000000000000 00
11	0.460796678110771172D-20	0.441834065558148766D 00
12	0.124396539442715316D-18	0.500000000000000000 00
13	0.154404975067030889D-16	0.0
14	0.281017054621956217D-14	0.0
15	0.252915349159796596D-12	0.0
16	0.148377604840414003D-10	0.0
17	0.439692279571759512D-09	0.0
18	0.204315135645250082D-07	0.0
19	0.517598343685300207D-06	0.0
20	0.103519648737060041E-04	0.0
21	0.163043478260869565D-03	0.0
22	0.199275362518440580D-02	0.0
23	0.18333333333333333D-01	0.0
24	0.120000000000000000D 00	0.0
25	0.500000000000000000D 00	0.0

度 (10 進 40 桁強) で計算し,  $g^{(l)}(t, s) = 0$  の等高線を得た. 同時に台形則で  $c^{(l)}(T_j)$ , ( $0 \leq j \leq 50$ ) を計算した.  $c^{(l)}(T_j)$  を最大にする  $T_j$  を  $T_{max}$  とすると, 得られた等高線及び  $c^{(l)}(T_j)$  の変化から,  $T_{max}$  の附近では  $g^{(l)}(t, s)$  が  $s$  の変化に対して符号を変えないことがわかった. この計算を  $2 \leq m \leq 20$ ,  $0 \leq l \leq 2m - 1$  について行った. 一例として,  $m=6$  に対しての  $g^{(l)}(t, s) = 0$  の等高線及び  $c^{(l)}(t)$  の変化を Fig. 1 (792 頁参照) に示す. 対称性から  $0 \leq t \leq 0.5$  に対してのみ図示している.

以下, 議論を  $m \leq 20$  に限定する.

(ii)  $c^{(l)}(t)$  を最大にする  $t$  を  $t_{max}$  とする. (i) での確認から  $t_{max}$  の附近の  $t$  に対して

$$c^{(l)}(t) = |d^{(l)}(t)| \quad (5.2)$$

が成立する. 他方,  $c^{(l)}(t) \geq |d^{(l)}(t)|$  である. 従って  $c_{-}^{(l)}$  を求める計算は  $|d^{(l)}(t)|$  の最大値を求める計算に帰着する.

(i) で得られた  $T_{max}$  が 0 または 0.5 なら  $T_{max} = t_{max}$  である. 従って  $c_{-}^{(l)} = |d^{(l)}(T_{max})|$  となる.

それ以外のときは,  $T_{max}$  は  $t_{max}$  のよい近似値である. 従って  $2m-1-l$  次の代数方程式  $d^{(l+1)}(t) = 0$  を  $T_{max}$  を出発値として解き (ここでは  $10^{-35}$  程度の精度で解いた.) 得られた  $t_{max}$  を使って  $c_{-}^{(l)} = |d^{(l)}(t_{max})|$  とした.

以上の計算で得られた  $c_{-}^{(l)}$  の値,  $t_{max}$  の値を,  $2 \leq m \leq 13$ ,  $0 \leq l \leq 2m-1$  について Table 1 (前頁参照) に示す.  $m=2, 3$  については Birkhoff-Priver<sup>3)</sup> の与えた数値に一致する. 更に (i) での確認から式 (4.7) は,  $f(x) \in C^{2m}[a, b]$  に対して, optimum error bound<sup>3)</sup> である ( $f(x) = x^{2m}$  に対して式 (4.7) の等号

が成立する.) .

次に, Ciarlet-Schultz-Varga<sup>5)</sup> の与えた評価式

$$\|f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t)\|_{\infty} \leq \frac{h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty}}{2^{2m-2l} \cdot l! (2m-2l)!} = (CSV)^{(l)} h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty} \quad (0 \leq l \leq m)$$

Kansy<sup>4)</sup> の与えた評価式

$$\|f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t)\|_{\infty} \leq \begin{cases} \frac{m^m (m-l)^{m-l} h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty}}{(2m-l)^{2m-l} \cdot (2m-l)!} & (0 \leq l \leq m-1) \\ \frac{1}{(2m-l)!} h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty} & (m \leq l \leq 2m) \end{cases} = (K)^{(l)} h^{2m-l} \|f^{(2m)}\|_{\infty}$$

との比較を  $m=6$  の場合について Table 2 に示す.

これにより従来, 得られていた誤差評価がかなり控え目なものであったことがわかる.

### 6. むすび

$2m-1$  次の区分的エルミート補間の誤差の Peano 核を導出し,  $m \leq 13$  に対しての正確な誤差の上限を得た. これは, 多くの問題に区分的エルミート補間を基底関数として採用したとき, その誤差評価の基礎になるものである.

ここで得られた Peano 核は, 補間スプラインの誤差解析にも有効に適用できる<sup>14)</sup>. また,  $c_{-}^{(l)}$  の値は, 区分的二変数エルミート補間の誤差評価<sup>6)</sup> にもそのまま使うことができる.

計算機の規模の拡大に伴って, 次第に高精度の計算が要求される傾向にある. 従来, 多項式補間の枠の中では, 次数を上げて数値的不安定性の問題などで必ずしも期待するような結果は得られない場合が多か

Table 2 An example ( $m=6$ ) of the numerical comparison of piecewise Hermite interpolation error for derivatives.

$l$	(CSV) <sup>(l)</sup>	(K) <sup>(l)</sup>	$c_{-}^{(l)}$
0	0.50969 × 10 <sup>-12</sup>	0.50969 × 10 <sup>-12</sup>	0.50969 × 10 <sup>-12</sup>
1	0.26911 × 10 <sup>-9</sup>	0.12802 × 10 <sup>-10</sup>	0.22901 × 10 <sup>-11</sup>
2	0.96881 × 10 <sup>-7</sup>	0.32914 × 10 <sup>-9</sup>	0.24465 × 10 <sup>-10</sup>
3	0.21701 × 10 <sup>-4</sup>	0.89604 × 10 <sup>-8</sup>	0.23308 × 10 <sup>-9</sup>
4	0.26042 × 10 <sup>-2</sup>	0.27588 × 10 <sup>-6</sup>	0.29358 × 10 <sup>-8</sup>
5	0.12500	0.11241 × 10 <sup>-4</sup>	0.35927 × 10 <sup>-7</sup>
6	0.10000 × 10	0.13889 × 10 <sup>-2</sup>	0.15031 × 10 <sup>-8</sup>
7	—	0.83333 × 10 <sup>-2</sup>	0.63131 × 10 <sup>-4</sup>
8	—	0.41687 × 10 <sup>-1</sup>	0.12626 × 10 <sup>-3</sup>
9	—	0.16667	0.15152 × 10 <sup>-1</sup>
10	—	0.50000	0.11364
11	—	0.10000 × 10	0.50000
12	—	0.10000 × 10	—

ったと思われる。区分的多項式は次数を上げて、数値的不安定性は顕著にはあらわれないことから、今後、高精度の要求される計算に次第に使われるようになるものと思われる。

最後に、日頃御指導頂く名大工学部、二宮市三教授、鳥居達生助教授、鳥脇純一郎助教授に感謝します。

### 参 考 文 献

- 1) 穂坂衛：曲線、曲面の合成および平滑化理論，情報処理，Vol. 10, No. 3, pp. 121~131 (1969).
- 2) J. H. Ahlberg, E. N. Nielson, J. L. Walsh: The Theory of Splines and Their Applications, p. 284, Academic Press, New York and London (1967).
- 3) G. Birkhoff, A. Priver: Hermite Interpolation Errors for Derivatives, J. Math. and Phys., Vol. 46, pp. 440~447 (1967).
- 3) K. Kansy: Elementare Fehlerdarstellung für Ableitungen bei der Hermite-Interpolation, Numer. Math., Vol. 21, pp. 350~354 (1973).
- 5) P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga: Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems. I, One dimensional Problem, Numer. Math., Vol. 9, pp. 394~430 (1967).
- 6) G. Birkhoff, M. H. Schultz, R. S. Varga: Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations, Numer. Math., Vol. 11, pp. 232~256 (1968).
- 7) Jörg Hertling: Approximation of Piecewise Continuous Functions by a Modification of Piecewise Hermite Interpolation, Numer. Math., Vol. 15, pp. 404~414 (1970).
- 8) Peter R. Lipow: Spline Functions and Intermediate Best Quadrature Formulas, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 1, pp. 127~136 (1973).
- 9) I. J. Schoenberg: Monosplines of least deviation and best quadrature formulas, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 2, pp. 144~170 (1965).
- 10) Martin H. Schultz: Spline Analysis, p. 156, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- 11) Laurance C. Eisenhart, George E. Trapp, Jr.: Computation of Hermite Polynomials, Math. of Comp., Vol. 27, No. 123, pp. 625~632 (1973).
- 12) Frank R. Loscalzo: An Introduction to the Application of Spline Functions to Initial Value Problems: T. N. E. Greville ed., Theory and Applications of Spline Functions, p. 212, Academic Press, New York, London (1969) pp. 37~64.
- 13) R. W. Hamming: Numerical Methods for Scientist and Engineers-Second Edition, p. 721, McGraw Hill, London (1973).
- 14) 秦野和郎：補間スプラインの算法，誤差，数値計算のアルゴリズムの研究 (1975)，京都大学数理解析研究考案録 (予定)。
- 15) 秦野和郎：区分的エルミート補間の誤差，情報処理学会第 16 回大会予稿集 309, (1975)。
- 16) 秦野和郎：スプライン関数の計算，第 16 回プログラミングシンポジウム報告集 22 (1975)，pp. 208~233.

(昭和 50 年 12 月 12 日受付)  
(昭和 51 年 2 月 12 日再受付)