

論文

補間スプラインの誤差解析*

秦野和郎**

Abstract

The errors for derivatives of odd degree (2m-1-th) interpolating splines are analyzed. It is shown that they are bounded as ||f^{(l)}(x)-S^{(l)}(x)||_{\infty} \le h^{2m-l} E ||f^{(m)}||_{\infty} in the case of equi-spaced knots. The values of E for a number of cases are obtained.

1. ま え が き

実軸上の有界閉区間 I=[a, b] の分割を

\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b (1.1)

とし (n \ge 1), f(x) \in C^{2m}[a, b] を与えられた任意の実関数とする. このとき \Delta の上で f(x) を補間する deficiency k^{(2)} (1 \le k \le m) の 2m-1 次多項式スプライン S(x) を次のように定義する. すなわち D \equiv d/dx として

\{ \Delta の各部分区間 (x_i, x_{i+1}) で D^{2m} S(x) = 0, S(x) \in C^{2m-1-k}[a, b]. (1.2)

S^{(\alpha)}(x_i) = D^{\alpha} S(x_i) = f^{(\alpha)}(x_i) = f_i^{(\alpha)} (1.3)

\alpha = 0, 1, \dots, k-1, i = 0, 1, \dots, n.

である. 1 \le k \le m-1 のとき, 上の条件の他に更に,

(i) \{f_0^{(\beta)}\}_{\beta=k}^{m-1}, \{f_n^{(\beta)}\}_{\beta=k}^{m-1} が与えられて, S^{(\beta)}(x_0) = f_0^{(\beta)}, S^{(\beta)}(x_n) = f_n^{(\beta)} (1.4) \beta = k, k+1, \dots, m-1.

を満たす S(x) を Type-I スプライン²⁾

(ii) k(n+1) \ge m のとき, \{f_0^{(\beta)}\}_{\beta=m}^{2m-1-k}, \{f_n^{(\beta)}\}_{\beta=m}^{2m-1-k} が与えられて, S^{(\beta)}(x_0) = f_0^{(\beta)}, S^{(\beta)}(x_n) = f_n^{(\beta)} (1.5) \beta = m, m+1, \dots, 2m-1-k.

を満たす S(x) を Type-II スプライン²⁾

(iii) f(x) が周期 b-a の周期関数, すなわち, f_0^{(\beta)} = f_n^{(\beta)}: \beta = 0, 1, \dots であるとき S^{(\beta)}(x_0) = S^{(\beta)}(x_n) (1.6) \beta = 0, 1, \dots, 2m-1-k.

を満たす S(x) を周期スプライン²⁾と定義する.

ここでは上の3つを総称して補間スプラインと呼びその l (0 \le l \le 2m-1) 次導関数の誤差限界, ||f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)||_{\infty} の大きさを議論の対象とする.

m=2, k=1 のとき, すなわち3次スプライン補間の場合^{4), 17)}および m=3, k=2 の場合⁴⁾についてはすでに誤差限界が与えられている. しかし, それ以外の場合については ||f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)||_{\infty} の収束率, すなわち ||\Delta|| = \max_i (x_{i+1} - x_i) \to 0 のときのふるまいについての解析は行われているが^{2), 3), 5), 6), 8)-10), 13), 14)}, ||f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)||_{\infty} の大きさについての評価はほとんどなされていない⁷⁾.

本論文では 1 \le k \le m-1 に対する 2m-1 次の補間スプラインの誤差限界の一つの表現を示す. すなわち, \eta = (x_n - x_0)/n, h_i = x_{i+1} - x_i, \theta_i = h_i/\eta, \theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})^T とおいたとき, \Delta の各部分区間 [x_i, x_{i+1}] における S(x) を S_i(t_i): t_i = (x - x_i)/h_i とおくと, x \in [x_i, x_{i+1}] における l 次導関数の誤差限界が,

||f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)||_{\infty} \le \eta^{2m-l} \hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k) \cdot ||f^{(2m)}||_{\infty}

の形で与えられることを示す. 特に分割 \Delta が等間隔. すなわち h_i = h = \eta: i = 0, 1, \dots, n-1 であれば

||f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)||_{\infty} \le h^{2m-l} E_i^{(l)}(n, m, k) \cdot ||f^{(2m)}||_{\infty}

の形になることを示し, いくつかの場合について計算した E_i^{(l)}(n, m, k) の値を示す.

2. 区分的エルミート補間の誤差

\Delta の部分区間 [x_i, x_{i+1}] の両端において

\{f_i^{(\alpha)}\}_{\alpha=0}^{m-1}, \{f_{i+1}^{(\alpha)}\}_{\alpha=0}^{m-1}

* Error analysis of interpolating splines by Kazuo HATANO (Nagoya University Computation Center)

** 名古屋大学大型計算機センター

が与えられたとき $[x_i, x_{i+1}]$ で定義される区分的エルミート補間は,

$$H(x) = H_i(t_i) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^\alpha \{ f_i^{(\alpha)} p_\alpha(t_i) + f_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha(t_i) \}. \quad (2.1)$$

で与えられる^{15), 21)}. ただし, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t_i = (x - x_i)/h_i$, $t_i \in [0, 1]$ である. 又 $\delta_{\alpha, l}$ をクロネッカーデルタとし, $p_\alpha^{(l)}(t_i)$, $q_\alpha^{(l)}(t_i)$ を t_i についての l 次導関数として,

$$\begin{cases} p_\alpha^{(l)}(0) = \delta_{\alpha, l} & q_\alpha^{(l)}(0) = 0 \\ p_\alpha^{(l)}(1) = 0 & q_\alpha^{(l)}(1) = \delta_{\alpha, l} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, m-1, \quad l = 0, 1, \dots, m-1,$$

である. $p_\alpha(t)$, $q_\alpha(t)$ を以下では基本エルミート補間子と呼ぶ. 基本エルミート補間子はそれぞれ, $t \in [0, 1]$ についてのたかだか $2m-1$ 次の多項式であり, その具体的な形は穂坂¹⁾, Ahlberg-Nielson-Walsh²⁾ によって与えられている²¹⁾. 又, 基本エルミート補間子の対称性から次の恒等式が成り立つ^{1), 21)} ことも容易にわかる.

$$\begin{cases} q_\alpha(t) = (-1)^\alpha p_\alpha(1-t) \\ p_\alpha(t) = (-1)^\alpha q_\alpha(1-t). \end{cases} \quad (2.3)$$

更に $x \in [x_i, x_{i+1}]$ における区分的エルミート補間の誤差, $f(x) - H_i(t_i)$ に関して次の積分表現が与えられている. すなわち, $s_i \in [0, 1]$ に対して, $y = x_i + h_i s_i$ とおくと,

$$f(x) - H_i(t_i) = h_i^{2m} \int_0^1 g_H(t_i, s_i) f^{(2m)}(y) ds_i \quad (2.4)$$

$$g_H(t, s) = \begin{cases} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{s^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} p_\alpha(t) & 0 \leq s \leq t \\ \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \frac{(s-1)^{2m-1-\alpha}}{(2m-1-\alpha)!} q_\alpha(t) & t < s \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

である²¹⁾. 又, これから

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t_i) &= D^l \{ f(x) - H_i(t_i) \} \\ &= h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(t_i, s_i) f^{(2m)}(y) ds_i. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$g_H^{(l)}(t, s) = \frac{\partial^l}{\partial t^l} g_H(t, s) \quad (2.7)$$

が得られる²¹⁾.

3. 補間スプラインの満たすべき条件式

前章で与えられた基本エルミート補間子を使って, 本章では補間スプラインの満たすべき条件式を得る.

$u_i^{(r)} = f_i^{(r)}$: $r = 0, 1, \dots, k-1$, $i = 0, 1, \dots, n$ が与えられたとき, 補間スプライン $S(x)$ を

$$\begin{cases} S(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x) S_i(t_i) \\ v_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \\ S_i(t_i) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^\alpha \{ u_i^{(\alpha)} p_\alpha(t_i) + u_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha(t_i) \}. \end{cases} \quad (3.1)$$

と表現する. ここで $u_i^{(r)}$: $r = k, k+1, \dots, m-1$, $i = 0, 1, \dots, n$ (Type-I スプラインでは $i = 1, 2, \dots, n-1$) は未知の値である. $S_i^{(l)}(t_i)$ を x についての l 次導関数とすれば, 基本エルミート補間子の基本性質, 式 (2.2) から

$$\begin{cases} S_0^{(l)}(0) = u_0^{(l)} \\ S_{i-1}^{(l)}(1) = S_i^{(l)}(0) = u_i^{(l)}: i = 1, 2, \dots, n-1 \\ S_{n-1}^{(l)}(1) = u_n^{(l)} \\ l = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

であることを容易に確認しうる. 従って式 (3.1) で与えられる $S(x)$ は式 (1.2) の第一式及び式 (1.3) を満たし, 更に $S(x) \in C^{m-1}[a, b]$ である.

$k = m$ のときは式 (3.1) がそのまま解である. $1 \leq k \leq m-1$ のときは式 (1.2) の第二式を満たすために更に,

$$\begin{aligned} S_{i-1}^{(l)}(1) &= S_i^{(l)}(0) \\ l &= m, m+1, \dots, 2m-1-k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成立しなければならぬ. 式 (3.2) は式 (3.1) を用いて,

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{ u_{i-1}^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(1) + u_i^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(1) \} \\ + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{ u_i^{(\alpha)} p_\alpha^{(l)}(0) + u_{i+1}^{(\alpha)} q_\alpha^{(l)}(0) \} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

と書き改められる. ここで次の値を定義する.

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{p_0^{(2m-1)}(0) \cdot (\alpha+1)(2m-1)}{p_\alpha^{(2m-1)}(0) \cdot 2m-1-\alpha} \\ P_{\alpha(\beta)} &= \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{p_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot R_\alpha \\ Q_{\alpha(\beta)} &= \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{q_\alpha^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \cdot R_\alpha. \end{aligned}$$

さて, 式 (3.3) において, 式 (2.3) から得られる $q_\alpha^{(l)}(1) = (-1)^{\alpha-l} p_\alpha^{(l)}(0)$, $p_\alpha^{(l)}(1) = (-1)^{\alpha-l} q_\alpha^{(l)}(0)$ を代入し, $l = 2m-1-\beta$ ($\beta = k, k+1, \dots, m-1$) とおいて, その結果, 得られる式において更に, $\eta = (x_n - x_0)/n$, $\theta_i = h_i/\eta$,

$$u_i^{(\alpha)} = R_\alpha \eta^{-\alpha} v_i^{(\alpha)}. \quad (3.4)$$

とおき, 両辺に, $\frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{\eta^{2m-1-\beta}}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)}$ をかけて,

$$\begin{cases} a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_{\alpha}^{(\beta)} \\ a_{i,i}^{\beta,\alpha} = \{\theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} + (-1)^{\alpha+\beta} \theta_{i-1}^{\alpha+\beta-(2m-1)}\} \\ \quad \times P_{\alpha}^{(\beta)} \\ a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} = \theta_i^{\alpha+\beta-(2m-1)} Q_{\alpha}^{(\beta)}. \end{cases} \quad (3.5)$$

とおくと、式(3.3)は

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} v_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} v_i^{(\alpha)} \\ & \quad + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} v_{i+1}^{(\alpha)}] = \phi_i^{(\beta)} \quad (3.6) \\ \phi_i^{(\beta)} &= - \sum_{\alpha=0}^{k-1} \frac{\eta^{\alpha}}{R_{\alpha}} \{a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} f_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} f_i^{(\alpha)} \\ & \quad + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} f_{i+1}^{(\alpha)}\} \\ & \beta = k, k+1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

となる。更に表現を簡潔にするために

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,j}^{k,k} & a_{i,j}^{k,k+1} & \dots & a_{i,j}^{k,m-1} \\ a_{i,j}^{k+1,k} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{i,j}^{m-1,k} & \dots & \dots & a_{i,j}^{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

$$v_i = (v_i^{(k)}, v_i^{(k+1)}, \dots, v_i^{(m-1)})^T$$

$$\phi_i = (\phi_i^{(k)}, \phi_i^{(k+1)}, \dots, \phi_i^{(m-1)})^T$$

とおけば、式(3.3)は結局

$$A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1.$$

となる。これが式(1.2), (1.3)から得られた方程式である。

Type-I スプラインでは式(1.4)から

$$u_0^{(r)} = f_0^{(r)}, u_n^{(r)} = f_n^{(r)}; \quad r = k, k+1, \dots, m-1.$$

である。従って、式(3.7)で v_0 及び v_n は既知ベクトルであるので、式(3.1)で与えられる $S(x)$ が $f(x)$ に対する Type-I スプラインであるための必要十分条件は

$$\begin{cases} A_{11} v_1 + A_{12} v_2 = \phi_1 - A_{10} v_0 \\ A_{i,i-1} v_{i-1} + A_{i,i} v_i + A_{i,i+1} v_{i+1} = \phi_i \\ \quad i = 2, 3, \dots, n-2 \\ A_{n-1,n-2} v_{n-2} + A_{n-1,n-1} v_{n-1} = \phi_{n-1} - A_{n-1,n} v_n. \end{cases} \quad (3.8)$$

が成り立つことである。

Type-II, 周期スプラインについても同じような手順により、式(3.8)に類似した連立一次方程式を導出することができる*。

4. 補間スプラインの誤差

2. で述べた区分的エルミート補間の誤差の積分表現及び 3. で述べた補間スプラインの満たすべき条件式

* この議論において補間スプラインの一意存在性が必要であるが、これについては、文献2), p. 160 に示されている。

を使って本章では補間スプラインの誤差を解析する。

式(2.1), (2.6)から

$$\begin{cases} f^{(l)}(x_i-) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{f_{i-1}^{(\alpha)} p_{\alpha}^{(l)}(1) \\ \quad + f_i^{(\alpha)} q_{\alpha}^{(l)}(1)\} \\ \quad + h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, s_{i-1}) f^{(2m)}(y) ds_{i-1} \\ f^{(l)}(x_i+) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{f_i^{(\alpha)} p_{\alpha}^{(l)}(0) \\ \quad + f_{i+1}^{(\alpha)} q_{\alpha}^{(l)}(0)\} \\ \quad + h_i^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(0, s_i) f^{(2m)}(y) ds_i. \end{cases} \quad (4.1)$$

である。ただし、第一式においては $y = x_{i-1} + h_{i-1} \cdot s_{i-1}$ 、第二式においては $y = x_i + h_i \cdot s_i$ である。 $f(x) \in C^{2m}[a, b]$ の仮定から

$f^{(l)}(x_i-) = f^{(l)}(x_i+)$; $l = m, m+1, \dots, 2m-1-k$ でなければならない。従って

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{f_{i-1}^{(\alpha)} p_{\alpha}^{(l)}(1) + f_i^{(\alpha)} q_{\alpha}^{(l)}(1)\} \\ & \quad + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{f_i^{(\alpha)} p_{\alpha}^{(l)}(0) + f_{i+1}^{(\alpha)} q_{\alpha}^{(l)}(0)\} \\ & = h_{i-1}^{2m-l} \int_0^1 g_H^{(l)}(1, s_{i-1}) f^{(2m)}(y) ds_{i-1} - h_i^{2m-l} \\ & \quad \times \int_0^1 g_H^{(l)}(0, s_i) f^{(2m)}(y) ds_i \quad (4.2) \end{aligned}$$

となる。この式から式(3.3)を引いて、 $f_i^{(\alpha)} = u_i^{(\alpha)}$; $\alpha = 0, 1, \dots, k-1$, $i = 0, 1, \dots, n$ であることを使うと、

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=k}^{m-1} h_{i-1}^{\alpha-l} \{(f_{i-1}^{(\alpha)} - u_{i-1}^{(\alpha)}) p_{\alpha}^{(l)}(1) \\ & \quad + (f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)}) q_{\alpha}^{(l)}(1)\} \\ & \quad + \sum_{\alpha=k}^{m-1} h_i^{\alpha-l} \{(f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)}) p_{\alpha}^{(l)}(0) \\ & \quad + (f_{i+1}^{(\alpha)} - u_{i+1}^{(\alpha)}) q_{\alpha}^{(l)}(0)\} \\ & = \text{式(4.2)の右辺}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。この式は補間スプラインの節点における微係数の誤差の、ある線型結合が式(4.2)の右辺のような形で積分表現されることを意味している。式(4.3)において、 $l = 2m-1-\beta$ ($\beta = k, k+1, \dots, m-1$) とおき

$$f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)} = R_{\alpha} \eta^{-\alpha} e_i^{(\alpha)} \quad (4.4)$$

とおいて、式(3.3)から式(3.6)を得たとほぼ同じ手順を適用すると、式(4.3)は

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=k}^{m-1} [a_{i,i-1}^{\beta,\alpha} e_{i-1}^{(\alpha)} + a_{i,i}^{\beta,\alpha} e_i^{(\alpha)} \\ & \quad + a_{i,i+1}^{\beta,\alpha} e_{i+1}^{(\alpha)}] = \varepsilon_i^{(\beta)} \quad (4.5) \end{aligned}$$

の形になる。一方、式(2.5), (2.7)から

$$\begin{cases} g_H^{(2m-1-\beta)}(1, s_{i-1}) \\ = - \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \frac{s_{i-1}^{2m-1-\lambda}}{(2m-1-\lambda)!} p_\lambda^{(2m-1-\beta)}(1) \\ = \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \frac{q_\lambda^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!} s_{i-1}^{2m-1-\lambda} \\ g_H^{(2m-1-\beta)}(0, s_i) \\ = \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^\lambda \frac{q_\lambda^{(2m-1-\beta)}(0)}{(2m-1-\lambda)!} (s_i-1)^{2m-1-\lambda} \end{cases} \quad (4.6)$$

である。これを使うと、

$$\begin{aligned} e_i^{(\beta)} &= \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{\eta^{2m-1-\beta}}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} \times \{ \text{式(4.2)の右辺} \} \\ &= \eta^{2m} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)}}{(2m-1-\lambda)!} \left\{ \int_0^1 (-1)^\beta \theta_{i-1}^{\beta+1} s_{i-1}^{2m-1-\lambda} \right. \\ &\quad \times f^{(2m)}(y) ds_{i-1} - \int_0^1 (-1)^\beta \theta_{i-1}^{\beta+1} s_{i-1}^{2m-1-\lambda} \\ &\quad \times f^{(2m)}(y) ds_i \} \\ U_\lambda^{(\beta)} &= \frac{\beta+1}{2m-1-\beta} \cdot \frac{q_\lambda^{(2m-1-\beta)}(0)}{p_0^{(2m-1-\beta)}(0)} = \frac{Q_\lambda^{(\beta)}}{R_\lambda} \end{aligned} \quad (4.7)$$

が得られる。更に、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= (e_i^{(k)}, e_i^{(k+1)}, \dots, e_i^{(m-1)})^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= (\varepsilon_i^{(k)}, \varepsilon_i^{(k+1)}, \dots, \varepsilon_i^{(m-1)})^T. \end{aligned}$$

とおくと、式(4.3)は式(3.7)と同じ形の式

$$A_{i,i-1} \mathbf{e}_{i-1} + A_{i,i} \mathbf{e}_i + A_{i,i+1} \mathbf{e}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (4.8)$$

$$i=1, 2, \dots, n-1.$$

になる。

Type-I スプラインでは式(1.4)から $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ である。従って、式(3.8)と同一の係数行列をもつ連立一次方程式

$$\begin{cases} A_{11} \mathbf{e}_1 + A_{12} \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ A_{i,i-1} \mathbf{e}_{i-1} + A_{i,i} \mathbf{e}_i + A_{i,i+1} \mathbf{e}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ i=2, 3, \dots, n-2 \\ A_{n-1,n-2} \mathbf{e}_{n-2} + A_{n-1,n-1} \mathbf{e}_{n-1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} \end{cases} \quad (4.9)$$

が得られる。

$\mathbf{e}_i^{(\alpha)}$: $\alpha=k, k+1, \dots, m-1, i=1, 2, \dots, n-1$ を陽的に表現するために次の行列を定義する。

$$A_I = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & A_{n-2,n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{n-1,n-2} & A_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

この行列は Type-I スプラインの一意存在性²⁾から正則である。従って逆行列が存在する。

* 文献15)による。

A_I の逆行列 B_I を次のように表わす。

$$B_I = A_I^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & \dots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & & & B_{n-1,n-1} \\ B_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & B_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} b_{i,j}^{k,k} & b_{i,j}^{k,k+1} & \dots & \dots & b_{i,j}^{k,m-1} \\ b_{i,j}^{k+1,k} & b_{i,j}^{k+1,k+1} & & & \vdots \\ \vdots & & & & b_{i,j}^{m-1,k} \\ b_{i,j}^{m-1,k} & \dots & \dots & \dots & b_{i,j}^{m-1,m-1} \end{pmatrix}$$

これを使って $e_i^{(\alpha)}$ は次のように表現される。すなわち、式(4.9), (4.7)から

$$\begin{aligned} e_i^{(\alpha)} &= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} \varepsilon_j^{(\beta)} \\ &= \eta^{2m} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)} \theta_j^{\beta+1}}{(2m-1-\lambda)!} \\ &\quad \times \int_0^1 \{ (-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (s_j-1)^{2m-1-\lambda} \\ &\quad + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} s_j^{2m-1-\lambda} \} f^{(2m)}(y) ds_j \\ b_{i,0}^{\alpha,\beta} &= b_{i,n}^{\alpha,\beta} = 0, \quad y = x_j + h_j s_j \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \quad \alpha = k, k+1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

である。更に

$$\begin{aligned} d_i^{(\alpha)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_0^1 \sum_{\beta=k}^{m-1} \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{U_\lambda^{(\beta)} \theta_j^{\beta+1}}{(2m-1-\lambda)!} \right. \\ &\quad \times \{ (-1)^{\lambda+1} b_{i,j}^{\alpha,\beta} (s_j-1)^{2m-1-\lambda} \\ &\quad \left. + (-1)^\beta b_{i,j+1}^{\alpha,\beta} s_j^{2m-1-\lambda} \right| ds_j. \end{aligned} \quad (4.11)$$

とおくと、 $f^{(\alpha)}(x_i) - S^{(\alpha)}(x_i) = f_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)}$ の定数倍 $e_i^{(\alpha)}$ は

$$|e_i^{(\alpha)}| \leq \eta^{2m} d_i^{(\alpha)} \|f^{(2m)}\|_\infty. \quad (4.12)$$

と評価される。ここで Hölder の不等式*を使った。

また、 $\|f^{(2m)}\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(2m)}(x)|$ である。

さて、 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ において

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x) &= \{ f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t_i) \} \\ &\quad + \{ H_i^{(l)}(t_i) - S_i^{(l)}(t_i) \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

である。すなわち、補間スプラインの l 次導関数の誤差は、区分的エルミート補間の l 次導関数の誤差と、区分的エルミート補間に対する補間スプラインの l 次導関数の誤差との和として与えられる。

式(4.13)の右辺第一項の絶対値は、式(2.6)から

$$|f^{(l)}(x) - H_i^{(l)}(t_i)| \leq \eta^{2m-l} \mathcal{H}_i^{(l)} \cdot \|f^{(2m)}\|_\infty \quad (4.14)$$

$$\mathcal{H}_i^{(l)} = \theta_i^{2m-l} \cdot \max_{t_i \in [0,1]} \int_0^1 |g_H^{(l)}(t_i, s_i)| ds_i. \quad (4.15)$$

と評価される。ここで再び Hölder の不等式を適用した。

次に式(4.13)の右辺第二項の絶対値は、式(2.1), (3.1), (4.4), (4.11)を使って

$$|H_i^{(l)}(t_i) - S_i^{(l)}(t_i)| \leq \eta^{2m-l} \mathcal{K}_i^{(l)} \|f^{(2m)}\|_{\infty} \quad (4.16)$$

$$\mathcal{K}_i^{(l)} = \sum_{\alpha=k}^{m-1} \theta_i^{\alpha-l} R_{\alpha} \cdot \max[d_i^{(\alpha)}, d_{i+1}^{(\alpha)}] \times \| |p_{\alpha}^{(l)}(t_i)| + |q_{\alpha}^{(l)}(t_i)| \|_{\infty} \quad (4.17)$$

と評価される。

以上から $x \in [x_i, x_{i+1}]$ における Type-I スプラインの l 次導関数の誤差限界

$$\begin{aligned} \|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)\|_{\infty} &\leq \eta^{2m-l} [\mathcal{G}_i^{(l)} + \mathcal{K}_i^{(l)}] \cdot \|f^{(2m)}\|_{\infty} \\ &= \eta^{2m-l} \hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k) \|f^{(2m)}\|_{\infty} \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k) = \mathcal{G}_i^{(l)} + \mathcal{K}_i^{(l)} \quad (4.19)$$

が得られる。ただし、ここで $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})^T$ である。

式(4.18)において $\eta^{2m-l} \hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k)$ は分割 Δ によってきまる量で $f(x)$ には依存しない。また、 Δ が与えられたとき、 $\hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k)$ は $\theta_i: i=0, 1, \dots, n-1$ によってのみきまり、 η には依存しない。

特に、分割 Δ が等間隔、すなわち $\theta_i = 1: i=0, 1, \dots, n-1$ のとき $h_i = h: i=0, 1, \dots, n-1$ とおけば ($\eta = h$)、式(4.18)は

$$\begin{aligned} \|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)\|_{\infty} &\leq h^{2m-l} E_i^{(l)}(n, m, k) \|f^{(2m)}\|_{\infty} \quad (4.20) \end{aligned}$$

の形になることが容易にわかる。

以上は Type-I スプラインに対する解析であるが、Type-II, 周期スプラインに対しても同じように解析することができて、式(4.18)と同じ形の結果を得ることができる。特に分割 Δ が等間隔の場合には式(4.20)と同じ形の結果を得ることができる。

5. $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の値

以上の解析により分割 Δ が等間隔のとき $x \in [x_i, x_{i+1}]$: $i=0, 1, \dots, n-1$ における $f(x)$ に対する $2m-1$ 次補間スプラインの $l(l=0, 1, \dots, 2m-1)$ 次導関数の誤差限界が、式(4.20)の形で与えられることがわかった。 $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の値は Type-I, II, 周期スプラインによってそれぞれ異なる。

式(4.15)にあらわれる $\max_{s_i \in [0, 1]} \int_0^1 |q_H^{(l)}(t_i, s_i)| ds_i$ は $2 \leq m \leq 13$ についてすでに知られている²¹⁾。また、式(4.17)にあらわれる $\| |p_{\alpha}^{(l)}(t_i)| + |q_{\alpha}^{(l)}(t_i)| \|_{\infty}$ も基本エルミート補間子の具体的な形が知られているので²¹⁾、それを使って算出することができる。式(4.11)

で与えられる $d_i^{(\alpha)}$ は補間スプラインの種類によって異なり、また n に依存する値である。これらの値を算出し、それを使って $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の値を計算した。

(i) $2 \leq m \leq 8, k=1, l=0, n=8, 16, 32$ について計算した Type-I, II, 周期スプラインに対する $E_i^{(l)}(n, m, k)$ を、 i を横軸にとつて Fig. 1(次頁参照)に示す。 i によって $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の値が大巾に変わるため、縦軸を対数スケールとしている。また、図をみやすくするために、 n に応じてグラフを書く位置をずらしている。図中、グラフの付近に記された、たとえば $I(16)$ はそのグラフが Type-I スプラインの $n=16$ に対する $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の変化であることを意味する。II, P はそれぞれ、Type-II, 周期スプラインに対するものであることを意味する。

これらの図において Type-II スプラインに対する $E_i^{(l)}(n, m, k)$ が最も大きく、Type-I スプラインに対する $E_i^{(l)}(n, m, k)$ が最も小さい。また、 n の増大につれて、 $i=n/2$ 付近における $E_i^{(l)}(n, m, k)$ の大きさが、どのスプラインの場合も、次第に一定値に近づいてゆく傾向にあることがわかる。

$S(x)$ が周期スプラインで、 $k=1$ の場合については、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\max_i E_i^{(l)}(n, m, k)$ は一定値に収束する。すなわち、Ahlberg-Nielson-Walsh²⁾ (p. 150, Theorem 4.6.3) は $f(x) \in C^{2m-1}[a, b]$ で $f^{(2m-1)}(x)$ が $[a, b]$ で $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ 次の Hölder 条件を満たせば、 $\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_{\infty}$ の収束率が $o(h^{2m-1+\alpha-l})$ となることを述べている。本論文では $f(x) \in C^{2m}[a, b]$ としているので $\alpha=1$ である。従って収束率は $o(h^{2m-l})$ となる。このことと、式(4.20)とから $\max_i E_i^{(l)}(n, m, k)$ は一定値に収束する。

なお、図には示していないが、 $2 \leq k \leq m-1, 1 \leq l \leq 2m-1$ についても、上に述べたのと同じような傾向がみられる。

(ii) $2 \leq m \leq 8, 1 \leq k \leq m-1, 0 \leq l \leq 2m-1, n=32$ について計算した Type-I スプラインに対する $\max_i E_i^{(l)}(n, m, k)$ を m を横軸にとつて Fig. 2(8頁参照)に示す。縦軸は対数スケールとしている。同期スプラインの場合もこの値とほぼ同じであるが、Type-II スプラインの場合は、Fig. 1 からわかるようにこの値よりかなり大きな値になる。

6. 数値例

4., 5. で与えられた誤差限界が、どの程度正確であ

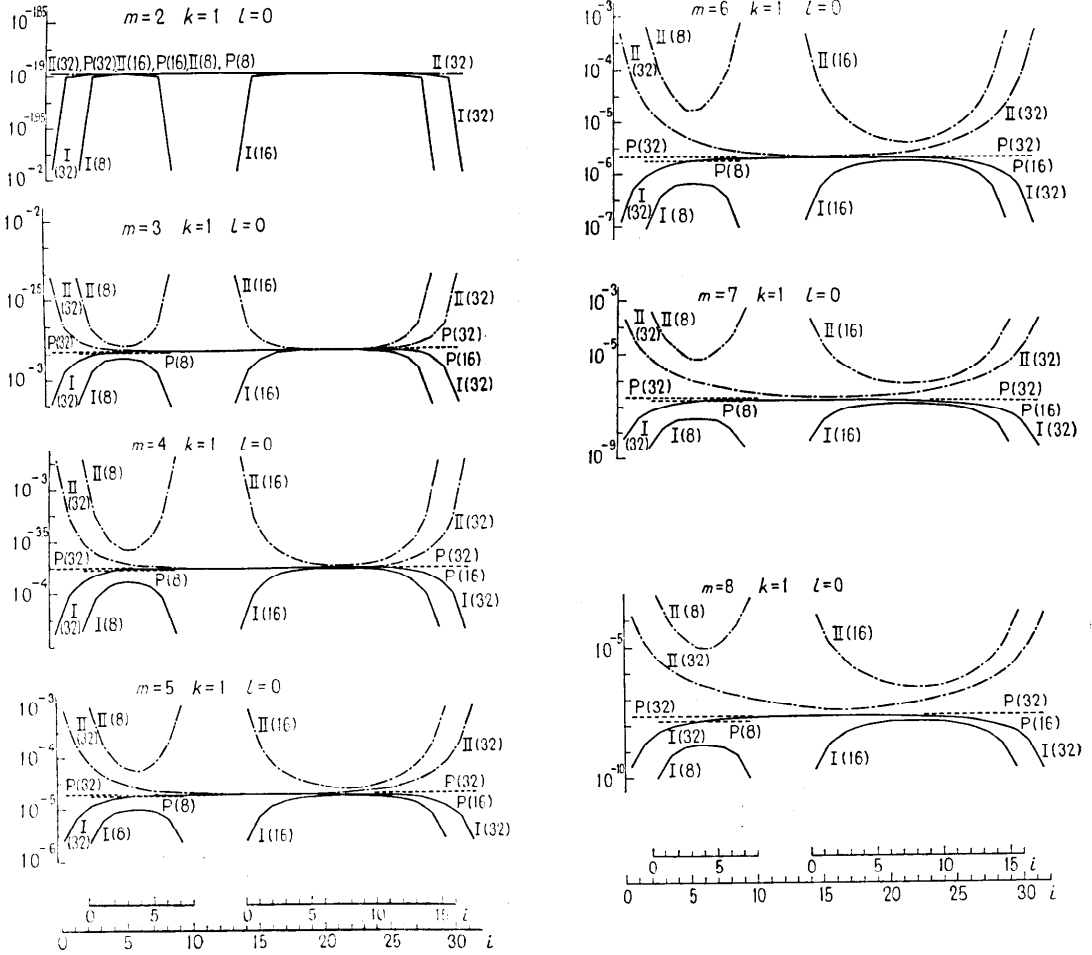


Fig. 1 The values of $E_i^{(l)}(n, m, k)$ for $2 \leq m \leq 8, k=1, l=0, n=8, 16, 32$ where $\|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)\|_{\infty} \leq h^{2m-l} E_i^{(l)}(n, m, k) \|f^{(2m)}\|_{\infty}$.

るかをみるために、一つの例として次の計算をした。

$f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$ を計算例にとり, $n = 25$ ($h = 0.4$) とし, $2 \leq m \leq 8, 1 \leq k \leq m-1$ に対して, Type-I スプライン $S(x)$ を構成し, $0 \leq l \leq 2m-1$ について $E_{MAX.} = \|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_{\infty}$ の近似値を計算した. すなわち, 全区間を 25×32 等分し, それぞれの点で $f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)$ を計算し, その最大絶対値を $\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_{\infty}$ とした. 次に, 式 (4.20) で与えられる誤差限界 $E_{BOU.}$ を Fig. 2 の値を使って計算し, それらを使って $R_{CON.} = E_{MAX.}/E_{BOU.}$ を計算した.

Fig. 3 (9頁参照) に m を横軸にとってその結果を示す.

$k=1, 2$ については $E_{MAX.}, E_{BOU.}, R_{CON.}$ を, $3 \leq k$

≤ 7 については $R_{CON.}$ のみを示している. $k=1, 2$ の場合, 図の上段で実線が $E_{MAX.}$, 点線が $E_{BOU.}$ を示しており, 下段が $R_{CON.}$ を示している.

これらの図から m, l が大きくなると式 (4.20) で与えられる誤差限界はかなり控え目になる傾向にある ($R_{CON.}$ が小さくなっている) ことがわかる.

なお, ここで計算例として特に打ち切り誤差の大きい場合を選んだのは, $S^{(l)}(x)$ の計算における丸め誤差の影響を排除するためである.

7. むすび

限られた条件のもとにおいてはあがあるが, いくつかの場合について補間スプラインの誤差限界を示した. また, 一つの計算例でその妥当性をたしかめた.

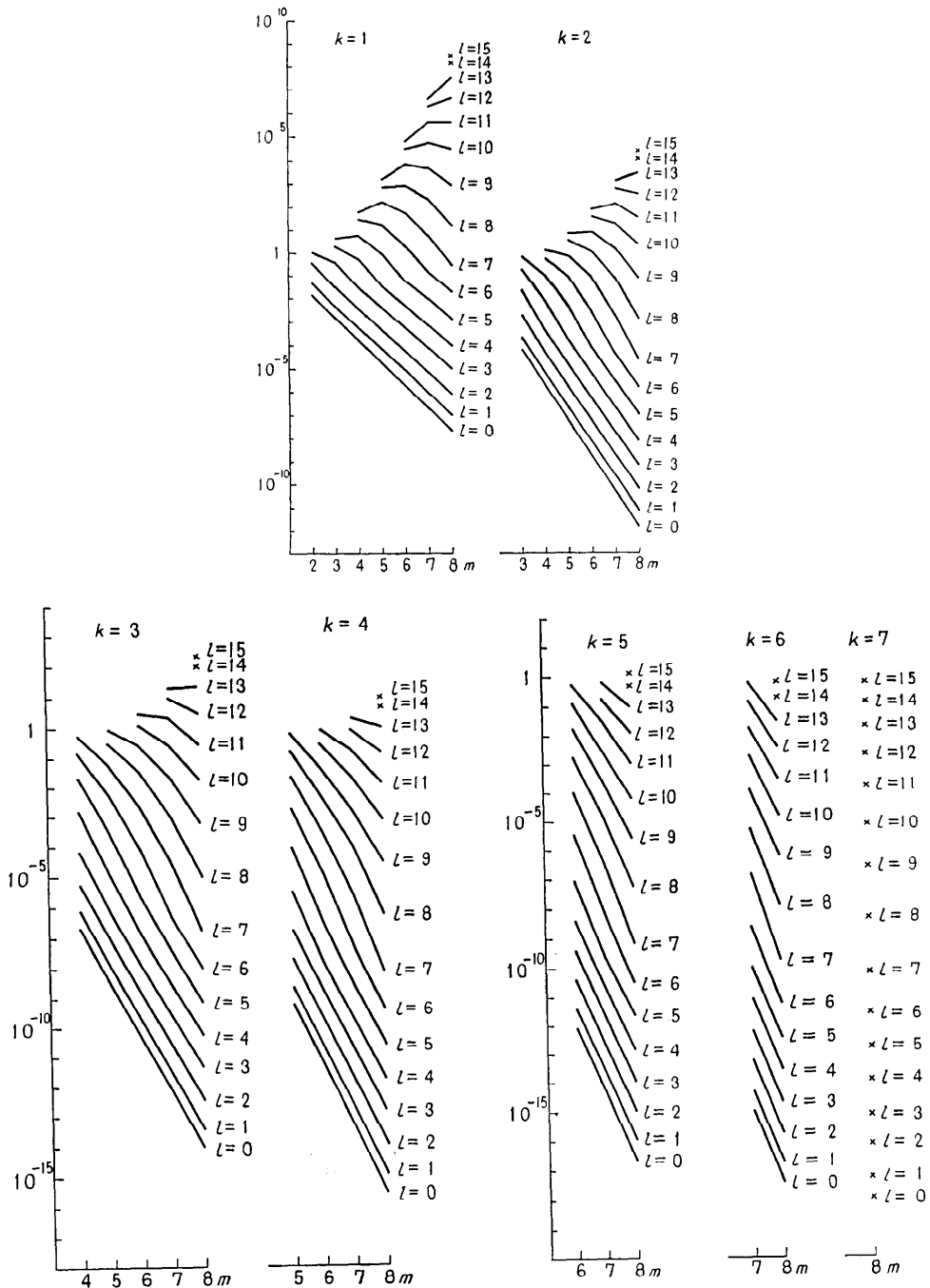


Fig. 2 The values of $E_l^{(k)}(n, m, k)$ for Type-I splines, $2 \leq m \leq 8, 1 \leq k \leq m-1, 0 \leq l \leq 2m-1$.

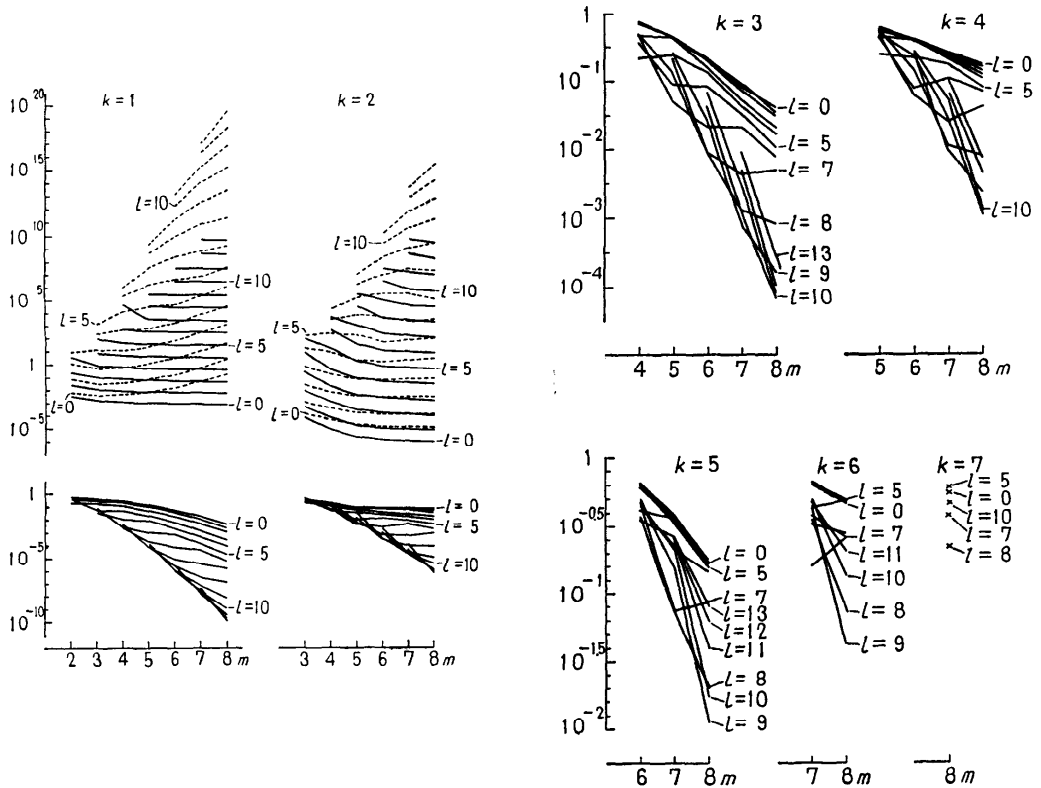


Fig. 3 The values of

(i) $\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_{\infty} = E_{MAX}$. (only for $k=1,2$)

(ii) $h^{2m-l} \max_i E_i^{(l)}(n, m, k) \|f^{(2m)}\|_{\infty} = E_{BOU}$. (only for $k=1,2$)

(iii) $R_{CON} = E_{MAX}/E_{BOU}$. ($1 \leq k \leq 7$)

where $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$, $S(x)$ is Type-I spline relevant to $f(x)$ and $n=25$, $h=0.4$, $2 \leq m \leq 8$, $0 \leq l \leq 2m-1$.

For $k=1,2$, solid line of the upper tier indicates E_{MAX} , dotted line indicates E_{BOU} . The lower tier indicates R_{CON} .

3次スプラインで成功した区分的多項式近似の手法は多次元の場合^{2), 16), 17)}へと、また区分的多項式の枠を越えて L -スプライン³⁾, $L-g$ スプライン¹³⁾へと拡張されてきている。しかし、実際に数値計算の分野で役に立っているのは現在のところ、3次スプラインに限られているといっても過言ではない。一方、高精度計算の要求されつつある現在、3次スプラインでは精度の不足が感じられることもある。次数の高いスプラインは、本論文に示した誤差限界にみられるように定義域全域にわたって高精度の要求される計算に有用であると思われる。

最後に日頃御指導頂く、名大工学部二宮市三教授、鳥居達生助教授、鳥脇純一郎助教授に感謝します。

参考文献

- 1) 穂坂 衛: 曲線, 曲面の合成および平滑化理論, 情報処理, Vol. 10, No. 3, pp. 121~131 (1969).
- 2) J.H. Ahlberg, E.N. Nielson, J.L. Walsh: The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York and London (1967).
- 3) M.H. Schultz, R.S. Varga: L-splines, Numer. Math., Vol. 10, pp. 345~369 (1967).
- 4) C.A. Hall: On Error Bounds for Spline Interpolation, J.A.T., Vol. 1, No. 2, pp. 209~218 (1968).
- 5) A. Meir, A. Sharma: Convergence of a Class of Interpolatory Splines, J.A.T., Vol. 1, No. 3, pp. 243~250 (1968).
- 6) Carl de Boor: On the Convergence of Odd-

Degree Spline Interpolation, J. A. T., Vol. 1, No. 4, pp. 452~463 (1968).

7) Frans Schurer: A Note on Interpolating Periodic Quintic Splines with Equally Spaced Nodes, J. A. T., Vol. 1, No. 4, pp. 493~500 (1968).

8) Blair K. Swartz, Richard S. Varga: Error Bounds for Spline and L-Spline Interpolation, J. A. T., Vol. 6, No. 1, pp. 6~49 (1972).

9) C. A. Hall: Uniform Convergence of Cubic Spline Interpolants, J. A. T., Vol. 7, No. 1, pp. 71~75 (1973).

10) G. D. Andria, G. D. Byrne, C. A. Hall: Convergence of Cubic Spline Interpolants of Functions Possessing Discontinuities, J. A. T., Vol. 8, No. 2, pp. 150~159 (1973).

11) D. Kershaw: The Order of Approximation of the First Derivative of Cubic Splines at the Knots, Math. Comp., Vol. 26, No. 117, pp. 191~197 (1972).

12) Thomas I. Seidman, Robert J. Korsan: Endpoint Formulas for Interpolating Cubic Splines, Math. Comp., Vol. 26, No. 120, pp. 897~900 (1972).

13) J. W. Jerome, L. L. Schumaker: On Lg-Splines, J. A. T., Vol. 2, pp. 29~49 (1969).

14) P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga: Numerical Methods of High Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems I. One dimensional Problem, Numer. Math., Vol. 9, pp. 394~430 (1967).

15) G. Birkhoff, M. H. Schultz, R. S. Varga: Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations, Numer. Math., Vol. 11, pp. 232~256 (1968).

16) C. A. Hall: Natural Cubic and Bicubic Spline Interpolation, SIAM. J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 6, pp. 1055~1060 (1973).

17) R. E. Carlson, C. A. Hall: Error Bound for Bicubic Spline Interpolation, J. A. T., Vol. 7, No. 1, pp. 41~47 (1973).

18) 秦野和郎: 補間スプラインの算法, 誤差, 数値計算のアルゴリズムの研究(1975), 京都大学数理解析研究録(予定).

19) 秦野和郎: 区分的エルミート補間の誤差, 情報処理学会第 16 回大会予稿集 309 (1975).

20) 秦野和郎: スプライン関数の計算, 第 16 回ブ

ログラミングシンポジウム報告集, pp. 208~233 (1975).

21) 秦野和郎: 区分的エルミート補間の誤差解析, 情報処理, Vol. 17, No. 9, pp. 789~795(1976)



付録: Type-II' スプラインの誤差

式(1.2), (1.3)の他に,

$$S^{(\beta)}(x_0) = S^{(\beta)}(x_n) = 0 \tag{8.1}$$

$$\beta = m, m+1, \dots, 2m-1-k.$$

を満たす $S(x)$ を Type-II' スプライン²⁾と定義する. このとき $\|f^{(l)}(x) - S^{(l)}(x)\|_{\infty}$ に関して, 本論に従って解析すると次の結果が得られる. すなわち, 式(4.12)に対応して,

$$\|e_i^{(\alpha)}\| \leq \sum_{j=m}^{2m-1-k} \eta^j \{ \lambda_{i,j}^{(\alpha)} |f_0^{(j)}| + \mu_{i,j}^{(\alpha)} |f_n^{(j)}| \} + \eta^{2m} \mathcal{J}_i^{(\alpha)} \|f^{(2m)}\|_{\infty} \tag{8.2}$$

式(4.18)に対応して,

$$\|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)\|_{\infty} \leq \sum_{j=m}^{2m-1-k} \eta^{j-l} \{ \hat{L}_{i,j}^{(l)}(\theta, m, k) \cdot |f_0^{(j)}| + \hat{R}_{i,j}^{(l)}(\theta, m, k) \cdot |f_n^{(j)}| \} + \eta^{2m-l} \hat{E}_i^{(l)}(\theta, m, k) \cdot \|f^{(2m)}\|_{\infty} \tag{8.3}$$

式(4.20)に対応して,

$$\|f^{(l)}(x) - S_i^{(l)}(t_i)\|_{\infty} \leq \sum_{j=m}^{2m-1-k} h^{j-l} \{ L_{i,j}^{(l)}(n, m, k) \cdot |f_0^{(j)}| + R_{i,j}^{(l)}(n, m, k) \cdot |f_n^{(j)}| \} + h^{2m-l} E_i^{(l)}(n, m, k) \cdot \|f^{(2m)}\|_{\infty} \tag{8.4}$$

の形の式が得られる. 式(8.2)~(8.4)において, それぞれ右辺の最後の項は Type-II スプラインの場合と同じである. すなわち, Type-II' スプラインの場合は, Type-II スプラインの誤差に更に定義域の端点における $f(x)$ の性質に依存する項が加わる.

$m=2, k=1$ (3次の自然スプライン) の場合については, この結果を, D. Kershaw¹¹⁾, C. A. Hall¹⁶⁾ が与えている.

(昭和 51 年 4 月 22 日受付)
(昭和 51 年 6 月 17 日再受付)