



## 情報処理システムにおける待ち行列理論の応用 (1)\*

橋 田 温\*\*

### 1. ま え が き

本講座では、オペレーションズ・リサーチの1手法である待ち行列理論(queueing theory)が、情報処理システムの分析・評価に用いられている状況を紹介する。(1)では、待ち行列の概念、基本待ち行列の結果について説明し、CPU や記憶装置における待ち行列を紹介する。(2)では引き続き、バッファメモリ、端末制御、総合システムにおける待ち行列を紹介し、最後にコンピュータ通信における最近の待ち行列問題について言及する。

### 2. 待ち行列の概念

待ち行列理論は、A. K. Erlang の電話トラヒックの研究から開始され、特に電話交換、交通システム、サービス窓口のあるシステムなどに応用され、数学モデルの解析と応用に関する論文が数多く発表されている。特に近年、データ通信システムやコンピュータの発展に伴い、コンピュータシステムおよびコンピュータ通信に関する応用が盛んとなり、現在では情報処理システムが最も有効に待ち行列理論が用いられている分野といえよう。

情報処理システムとしては、情報処理のための情報(データ)の通信まで含めて考えると、非常に多くの形態がある。1例として、端末オリエンテッドな情報処理システムを考えると、図-1 のようなものが代表的であろう。すなわち、処理要求(ジョブ、メッセージ、

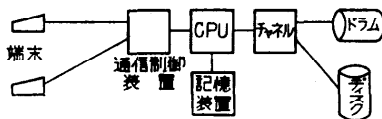


図-1 情報処理システムの例

\* Applications of Queueing Theory in Information Processing Systems by On HASHIDA (Musashino Electrical Communication Laboratory, N. T. T.)

\*\* 日本電信電話公社武蔵野電気通信研究所交換方式研究室

データ等)が端末よりセンターに到着し、CPU・記憶装置などの resource で処理を受けて、再び端末に戻る系である。一方待ち行列とは、客がサービス窓口に着して行列を形成し、扱者によってサービスを受けて窓口を退去していく系である。これらの構成要素を対応させると表-1 の如くなる。

待ち行列は、(イ)客の到着過程と入力源の状態(有限か無限か)、(ロ)サービス時間分布、(ハ)サービス規律、(ニ)窓口数と待ち合わせ室の数、などで規定される。この中、サービス規律とはサービスする順番のことで、(a)到着順(FCFS, first-come, first-served)、(b)逆順(LCFS, last-come, first-served)、(c)ランダム(RS, random service)、(d)優先権(priority service)、(e)量子化(quantum service)、などがある。FCFS が最も一般的であり、以下特に断らない限りは FCFS の場合とする。

到着過程は、無限入力源の場合は到着間隔の分布  $A(x)$  で、また有限入力源の場合は個々の入力源についての空き間隔(サービス終了してから再び系へ到着するまでの時間)の分布  $A_i(x)$  で表わされる。平均到着間隔の逆数を平均到着率と呼ぶ。サービス時間分布は、一般に客のサービス時間を独立で同じ分布に従うとして  $B(x)$  で表わされる。

情報処理システムにおけるこれらの分布については、センターへ到着するメッセージの到着間隔は指数分布に近く、メッセージ長は幾何分布に近いなどの測定結果が報告されている<sup>1),2)</sup>。これらの結果と解析の容易性から、特に良く用いられる分布としては、(ア)指数分布、(イ)一定時間、(ウ)アーラン分布、(エ)超

表-1 情報処理システムと待ち行列の対応

情報処理システム	待ち行列
ジョブ、メッセージ、データ	客
Resource, Device	窓 口
処理、メモリでの read/write	サ ー ビ ス
メ モ リ	待 合 せ 室
端末、アクティブユーザー	入 力 源

指数分布, などがある。

指数分布では, 任意の時点をとって次に到着またはサービス終了の事象が起こるまでの時間は, それまでの経過時間に関係なく同じ指数分布に従い, これを無残留効果特性と呼ぶ。また, 時刻  $t$  と  $t+dt$  の間に事象が起こる確率は, 微小な  $dt$  に対し  $\alpha dt + o(dt)$  ( $\alpha$  は, 到着過程の場合は平均到着率  $\lambda$  となり, サービス時間分布に対しては平均サービス時間の逆数となる) となり  $t$  に依存しない。特に到着過程に指数分布を用いたときは, 時間間隔  $(s, s+t)$  の間に到着する客数を  $X(s, s+t)$  とすれば, 次のようなポアソン分布となり ( $\lambda$  はパラメータ),

$$P_r\{X(s, s+t)=k\} = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! \quad (2.1)$$

ポアソン到着とも呼ばれる。

分布の形状で見ると, 指数分布は平均と標準偏差が等しく, 一定の場合は分散が 0 である。この間の広がりをもつ分布としてアーラン分布がある。特に標準偏差/平均を変動係数  $c$  (coefficient of variation) と呼び, 分布の広がり程度を表わすのに用いられる。指数分布では  $c=1$ , 一定では  $c=0$ ,  $l$ -アーラン分布では  $c=\sqrt{l/l}$  である。また超指数分布は, 変動係数が 1 より大きい場合に使われる。

上述の如く, 待ち行列は多くのパラメータによって規定され, したがって数多くのモデルが考えられる。それらを分類するために, 到着間隔分布が  $A$ , サービス時間分布が  $B$ , 窓口数が  $s$  の系を  $A/B/s$  で表わし Kendall の記号と呼ばれる。分布の記号は,

$M$ : 指数分布 (Markovian)

$D$ : 一定 (Deterministic)

$E_l$ :  $l$ -アーラン分布 ( $l$ -Erlang)

$H$ : 超指数分布 (Hyper-exponential)

$G$ : 一般分布 (General)

などが用いられる。特に到着間隔が独立な場合を  $GI$  (General Independent) と表わし, また, 入力源が  $m$  個のときを  $A(m)/B/s$  で, 系内客数が  $N$  個に制限されるときを  $A/B/s(N)$  で表わすこともある。

待ち行列の特性を見る尺度としては, (i) 待ち時間, (ii) 待ち行列長, (iii) 使用率, (iv) スループット, (v) 損失率 (損失系), (vi) オーバーフロー確率, などがある。情報処理システムでは, 応答時間に影響する待ち時間, メモリ容量の設計にオーバーフロー確率や待ち行列長, 総合特性としてスループットなどが評価尺度として用いられる。この中で待ち時間が最も良く用いられるが, サービスを受けるまでのいわゆる待ち

時間  $W$  と, 窓口へ到着してからサービス終了して退去するまでのサービス時間  $S$  も含めた系内時間  $T$  の 2 通りがある。これらの間には  $T=W+S$  という関係が成り立つ。同様に待ち行列長には, サービスを待っているいわゆる待ち客数  $Q$  と, サービス中の客  $N$ , も含めた系内客数  $L$  の 2 通りがあり,  $L=Q+N$  の関係が成り立つ。

上記の評価尺度は, 一般に系の長時間における平均的特性として問題にされる。したがって, 系は時々刻々確率的に変動しているが, 初期状態が影響しないほど充分時間が経過した状態を考えてそれを平衡状態 (equilibrium state) と呼び, そこでの尺度を評価する。特に平衡状態での状態確率を平衡状態確率 (分布) と呼び, それから各種尺度が求められる。

次に待ち行列における一般的性質を二, 三述べておく。以下, 確率変数  $x$  の平均を  $\bar{x}$  で,  $\nu$  次モーメントを  $\bar{x}^\nu$  で表わす。

(1) Little の公式 (平均値の公式)<sup>3)</sup>

平均到着率が  $\lambda$  のかなり一般的待ち行列において,

$$\begin{cases} \bar{Q} = \lambda \bar{W} \\ \bar{L} = \lambda \bar{T} \end{cases} \quad (2.2)$$

(2) 保存則 (conservation law)<sup>4)</sup>

客が  $k$  個のクラスに分かれている場合, サービスを分割して行っても総合サービス時間が不変であれば, クラス相互のサービス規律が何であろうとも次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^k \rho_i \bar{W}_i = \bar{W} \sum_{i=1}^k \rho_i \quad (2.3)$$

ここで,  $\bar{W}_i$  はクラス  $i$  の客の平均待ち時間,  $\bar{W}$  はクラス分けしないときの平均待ち時間,  $\rho_i = \lambda_i \bar{h}_i$ ,  $\bar{h}_i$  はクラス  $i$  の客の平均サービス時間である。

この関係から, 優先権のある待ち行列の公式が直接導かれる。

(3) サービス中の平均客数

窓口数  $s$  の損失のない一般的待ち行列において, サービス中の客数  $N_s$  の平均は次式で与えられる。

$$\bar{N}_s = \lambda \bar{h} = s - \sum_{i=0}^{s-1} (s-i) P_r\{L=i\} \quad (2.4)$$

したがって

$$\bar{L} = \bar{Q} + \lambda \bar{h} = \bar{Q} + s - \sum_{i=0}^{s-1} (s-i) P_r\{L=i\} \quad (2.5)$$

が成り立つ。

### 3. 基本待ち行列

ここでは, 最も良く用いられかつ解析も比較的容易

な基本待ち行列として、 $M/M/s$ ,  $M/G/1$ , および優先待ち行列を紹介する。

3.1  $M/M/1$  形モデル

まず  $M/M/1$  の場合を考えよう。到着間隔、サービス時間分布ともに指数分布であり、残留効果が無いという指数分布特性から、系の状態はマルコフ過程を形成する。平均到着率を  $\lambda$ , 平均サービス時間を  $1/\mu$ , 時刻  $t$  での系内客数を  $L(t)$  とする。遷移確率を

$$p_{i,j}(t) \triangleq Pr\{L(s+t)=j | L(s)=i\}$$

で表わせば、微小な時間区間  $(t, t+dt)$  内では、

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(dt) = \lambda dt + o(dt) \\ p_{i,i-1}(dt) = \mu dt + o(dt) \\ p_{i,i}(dt) = 1 - (\lambda + \mu)dt + o(dt) \\ p_{i,j}(dt) = o(dt) \quad (|i-j| \geq 2) \end{cases} \quad (3.1)$$

となる。dt 間の状態遷移を考えると、

$$p_{i,j}(t+dt) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(t)p_{k,j}(dt) \quad (3.2)$$

が成り立ち、マルコフ過程における Chapman-Kolmogorov の方程式となる。

平衡状態における状態確率  $\{p_j\}$  は、 $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t)$  で求められる。式(3.2)で  $dt \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  とすることにより次の差分方程式を得る。

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \mu p_{j+1} - (\lambda + \mu)p_j + \lambda p_{j-1} = 0 \quad (j \geq 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

これは平衡方程式 (balance equation) と呼ばれる。その理由は、系内客数が  $j$  の状態に注目すると、図-2 に示す如く式(3.3)は、

$$p_j \times [\text{状態 } j \text{ から出ていく割合}] = \sum_{i \in S} p_i \times [\text{状態 } i \text{ から状態 } j \text{ へ入っていく割合}] \quad (3.4)$$

を意味しているためである。(S は状態集合)

式(3.3)の解は次の幾何分布となる。

$$p_j = (1-\rho)\rho^j \quad j \geq 0 \quad (3.5)$$

ここで、 $\rho = \lambda/\mu$  であり、トラヒック密度 (traffic intensity) と呼ばれる。系が平衡状態になるためには  $\rho < 1$  が必要十分条件であり、 $\rho$  は系への負荷を表わす重要なパラメータである。 $\{p_j\}$  から以下のような尺度が求められる。

$$\bar{Q} = \rho^2/(1-\rho), \quad \bar{L} = \rho/(1-\rho) \quad (3.6)$$

$$\bar{W} = \rho/\mu(1-\rho), \quad \bar{T} = 1/\mu(1-\rho) \quad (3.7)$$

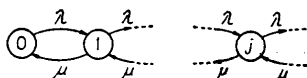


図-2 状態の推移図

FCFS の場合の待ち時間分布を  $W(t)$  とすれば、

$$W(t) = 1 - \rho e^{-\rho(1-\rho)t} \quad (3.8)$$

次に  $M/M/s$  モデルについては、式(3.3)と同様の平衡方程式が成り立ち、状態確率  $\{p_j\}$  が求められる。窓口当りの平均サービス時間を  $1/\mu$  として結果のみを記すと、

$$p_j = \begin{cases} \frac{a^j}{j!} p_0 & (j \leq s) \\ \frac{\rho^j s^s}{s!} p_0 & (j \geq s) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$p_0 = \left[ \sum_{j=0}^{s-1} \frac{a^j}{j!} + \frac{a^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

ここで、 $a = \lambda/\mu$ ,  $\rho = a/s$  である。

また  $M/M/s(N)$  の状態確率  $\{p_j\}$  については、 $M/M/s(\infty)$  で得られた状態確率  $\{p_j\}$  を  $j \leq N$  の範囲で正規化 ( $\sum_{j=0}^N p_j' = 1$ ) すれば求められる。

3.2  $M/G/1$  モデル

確率変数  $X(t)$  において、 $t_0$  以降の  $X(t)$  の分布が  $t_0$  以前の  $X(t)$  の値に依らないで、 $X(t_0)$  のみに依る場合  $t_0$  を再生点 (regeneration point) という。  $M/G/1$  で客がサービス終了して退去する時点を  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  とすれば  $\{t_n\}$  は再生点となり、退去時点直後の待ち行列長の列  $\{Q_n \triangleq Q(t_n+0)\}$  はマルコフ連鎖をなす。これを、任意時刻の待ち行列長の過程  $Q(t)$  に対する隠れマルコフ連鎖 (imbedded Markov chain) という。

マルコフ連鎖  $Q_n$  の間には、図-3 を参照して、

$$Q_{n+1} = [Q_n - 1]^+ + X_{n+1} \quad (3.10)$$

が成り立つ。ここで、 $[x]^+$  は  $x \geq 0$  のときに  $x$  でそれ以外は 0 を表わし、 $X_{n+1}$  は  $(t_n, t_{n+1})$  の間に到着する客数である。遷移確率  $p_{i,j} \triangleq Pr\{Q_{n+1}=j | Q_n=i\}$  は、 $X_n$  がポアソン分布であることと式(3.10)から

$$p_{i,j} = \begin{cases} k_j & (i=0, 1) \\ k_{j-i+1} & (i>1) \end{cases} \quad (3.11)$$

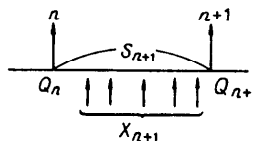
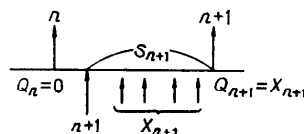


図-3  $Q_n$  の推移

ただし,

$$k_j = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dB(t)$$

で,  $B(t)$  はサービス時間分布である.

マルコフ連鎖の理論より,  $\{Q_n\}$  の平衡状態での確率  $\{p_j \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} P_r\{Q_n = j\}\}$  が存在すれば,

$$p_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_i p_{ij} \quad (3.12)$$

の解で与えられる.  $\{p_j\}$  の母関数を  $G(z)$  とすれば式(3.12)より,

$$G(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*\{\lambda(1-z)\}}{B^*\{\lambda(1-z)\} - z} \quad (3.13)$$

を得る. ここで,  $B^*(s)$  は  $B(t)$  のラプラス・ステュルチェス変換である. これは (Pollaczek-Khinchin の公式と呼ばれる. 平均系内客数を求めると,

$$\bar{L} = \bar{Q} + \rho = \frac{\lambda \bar{h}^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{\rho^2(1+c_b^2)}{2(1-\rho)} + \rho \quad (3.14)$$

となり, これも Pollaczek-Khinchin の公式と呼ばれる. ここで,  $\rho = \lambda \bar{h}$ ,  $\bar{h}$ ,  $\bar{h}^2$  は  $B(t)$  の 1 次・2 次モーメント,  $c_b$  は  $B(t)$  の変動係数である.

次に FCFS での待ち時間分布を求める. 図-4 の如く, 待ち時間  $W_n$  とサービス時間  $S_n$  の間に到着した客数  $Y_n$  が, その客が退去した時点の  $Q_n$  となっている. したがって, 待ち時間分布を  $W(t)$  とすれば,

$$\begin{aligned} p_j &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dP_r\{W+S \leq t\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dW(t) * B(t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる. ここで\*は convolutions を表わす.  $p_i$  の母関数を計算すると,

$$G(z) = W^*\{\lambda(1-z)\} \cdot B^*\{\lambda(1-z)\} \quad (3.16)$$

となり, これから

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda\{1 - B^*(s)\}} \quad (3.17)$$

を得る. これは Pollaczek の公式と呼ばれる. 次の平均値が求められる. (Pollaczek-Khinchin-Kendall の公式)

$$\bar{W} = \frac{\lambda \bar{h}^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(1+c_b^2)}{2(1-\rho)} \cdot \bar{h} \quad (3.18)$$

FCFS 以外の場合には, 平均待ち時間は同じである

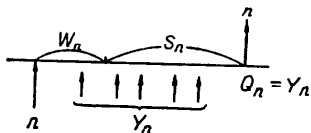


図-4 待ち時間と待ち行列長の関係

が, 待ち時間分布は異なってくる. 例えば FCFS, RS, LCFS に対して夫々 2 次モーメントを求めると,

$$\bar{W}^2 = \begin{cases} \frac{\lambda \bar{h}^3}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 [\bar{h}^2]^2}{2(1-\rho)^2} & \text{(FCFS)} \\ \frac{2\lambda \bar{h}^3}{3(1-\rho)(2-\rho)} + \frac{\lambda^2 [\bar{h}^2]^2}{(1-\rho)^2(2-\rho)} & \text{(RS)} \\ \frac{\lambda \bar{h}^3}{2(1-\rho)^2} + \frac{\lambda^2 [\bar{h}^2]^2}{2(1-\rho)^3} & \text{(LCFS)} \end{cases} \quad (3.19)$$

となる. 一般に  $GI/M/s$ ,  $M/G/1$  では FCFS, RS, LCFS の順に  $\bar{W}^2$  が大きくなる.

### 3.3 優先権のある M/G/1 モデル<sup>5)</sup>

優先権には, 客の到着前から先天的に定められている外部優先権と, 系内で定められる内部優先権があり, 優先権に応じた種々のサービス規律が考えられる. 外部優先権のある場合のモデルは, 次のように分類される.

- (a) 非割込み形 (head-of-the line or non-preemptive): 優先権の高い客が到着してもサービスは中断されない.
- (b) 割込み形 (preemptive): 優先権の高い客はより低い客のサービスを中断する. これは更に細分され,
  - (b-1) 継続形 (resume): サービス中断点より再開する.
  - (b-2) 反復形 (repeat): 始めからサービスを再開する.

がある. なお反復形では, 中断されたサービス時間と同じサービス時間を繰り返す repeat-identical と, 独立なサービス時間を繰り返す repeat-different がある.

これらの他, 非割込み形と割込み形が混在する場合もある.

$\rho$  個の優先権クラス (若番ほど高い優先権をもつ) がある場合の  $M/G/1$  モデルに対する主な結果をつぎに示す. ただし添字  $i$  でクラスを示し,  $\Lambda_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j$  ( $\Lambda_0 = 0$ ),  $\bar{\sigma}_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j \bar{h}_i^2 / \Lambda_i$ ,  $\sigma_i = \sum_{j=1}^i \rho_j$  ( $\sigma_0 = 0$ ), とする.

#### (1) 非割込み形

$$\bar{W}_i = \frac{\Lambda_i \bar{Q}_i \rho^2}{2(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (3.20)$$

$$\bar{T}_i = \bar{W}_i + \bar{h}_i \quad (3.21)$$

#### (2) 割込み継続形

$$\bar{W}_i = \frac{A_i \bar{q}_i^2}{2(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \quad (3.22)$$

$$\bar{T}_i = \bar{W}_i + \frac{\bar{h}_i}{1-\sigma_{i-1}} \quad (3.23)$$

特に割込み形では、サービス中に割込まれるための遅れがあり、 $\bar{T}_i > \bar{W}_i + \bar{h}_i$  である。

内部優先権については、(i) 交番優先権、(ii) 動的優先権、(iii) 遮断優先権、(iv) 走行時間優先権、などがあり<sup>9)</sup>、CPU でのスケジューリング・アルゴリズムにその例を見る。

### 3.4 基本モデルに対する近似式と不等式

基本モデルでも  $GI/G/1, M/G/s, GI/G/s$  などの一般モデルについては未だ解かれていない。しかしかなり精度の良い近似式が求められており、実用上はそれで充分であろう。

(1)  $M/G/s$  の平均待ち時間<sup>9)</sup>

$$\bar{W} \cong \frac{1+c_b^2}{2} \cdot [M/M/s \text{ の } \bar{W}] \quad (3.24)$$

(2)  $GI/G/s$  の平均待ち時間<sup>9)</sup>

$$\bar{W} \cong c_a^2 c_b^2 \cdot [M/M/s \text{ の } \bar{W}] + c_a^2 (1-c_b^2) \cdot [M/D/s \text{ の } \bar{W}] + (1-c_a^2) c_b^2 \cdot [D/M/s \text{ の } \bar{W}] \quad (3.25)$$

ここで  $c_a$  は到着分布の変動係数である。

(3)  $GI/G/1$  の平均待ち時間に関する不等式<sup>8)</sup>

$$\begin{cases} J_1 - \frac{c_a^2 + \rho}{2\lambda} \leq \bar{W} \leq J_1 \\ J_1 \triangleq \frac{c_a^2 + \rho^2 c_b^2}{2\lambda(1-\rho)} \end{cases} \quad (3.26)$$

ここで  $\rho = \lambda \bar{h}$  である。

(4)  $GI/G/s$  の重負荷時 ( $\rho = \lambda \bar{h}/s \rightarrow 1$ ) における待ち時間分布<sup>9)</sup>

$$\begin{cases} W(t) \cong 1 - \exp\{-t/J_s\} \\ J_s \triangleq \frac{c_a^2 + s\rho^2 c_b^2}{2\lambda(1-\rho)} \end{cases} \quad (3.27)$$

以上はすべて  $W$  に関するものであるが、平均待ち行列長  $\bar{Q}$  については Little の公式(2.2)によって直ちに求められる。例えば式(3.26)を  $\bar{Q}$  で見れば、 $c_a < 1$  の場合わずか  $(c_a^2 + \rho)/2$  以下すなわち 1 人以下の誤差で推定することができる。

## 4. CPU での待ち行列

CPU でジョブを処理する方法、すなわちスケジューリング・アルゴリズムとして多くの方法があり、それぞれに対応して異なった待ち行列モデルが提起され

る。スケジューリング・アルゴリズムはオペレーティングシステムの基本をなすものであり、その設計・評価に待ち行列理論が有効である。このアルゴリズムは、一括処理 (batch processing) と時分割処理 (TSS, time sharing system) に大別されよう。

### 4.1 一括処理における待ち行列

この場合には、 $M/G/1$  モデルや有限入力源の  $M(m)/G/1$  モデルなどがよく用いられる。但し処理時間分布としては、すべてジョブの処理時間を母集団としたものである。有限入力源モデルは、アクティブユーザ数が比較的少ない数に制限されている場合に適用される。 $M(m)/G/1$  の状態確率 (任意時刻での) の結果を次に示しておく<sup>9)</sup>。

$$\begin{cases} p_i = m\lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{m-i+j}{j} f^{(m-i+j)} \\ f(j) = \frac{\phi(j-1) \sum_{l=j}^{m-1} \binom{m-1}{l} \phi(l)}{j\lambda} \\ f(0) = \bar{h} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \phi(l) \\ \phi(l) = \prod_{i=1}^l \frac{B^*(i\lambda)}{1-B^*(i\lambda)} \quad (l \neq 0) = 1 \quad (l=0) \\ \bar{e} = \left[ 1 + m\lambda \bar{h} \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m-1}{l} \frac{1}{\phi(l)} \right]^{-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

平均待ち時間については Little の公式を用いれば良い。また、 $M(m)/M/s$  の場合については数表がある<sup>10)</sup>。

一括処理では待ち時間はすべてのジョブに対し平等となるが、特に処理時間の短いジョブの待ち時間を短くしたいときがある。この場合は短い処理時間のジョブに高い優先権を与えれば良く、待ち時間・系内時間は式(3.20)~(3.23)で与えられる。例えば 2 クラスに分けた場合の平均系内時間は図-5(次頁参照)の如くなり、FCFS に比べて優先権クラスの系内時間が改善される様子が分る。

一括処理・TSS を問わずスケジューリング・アルゴリズムでは、処理終了時間や割込み時点においてジョブを主記憶装置と 2 次記憶装置の間で受け渡す swap time や、ジョブの監視・割付けに必要な overhead time など、ジョブ固有の処理時間に含まれない余分の時間が必要であり、一般に準備時間 (setup time) と呼ばれる。準備時間のある待ち行列については、優先権のある場合も含めて種々のモデルが解析されている。

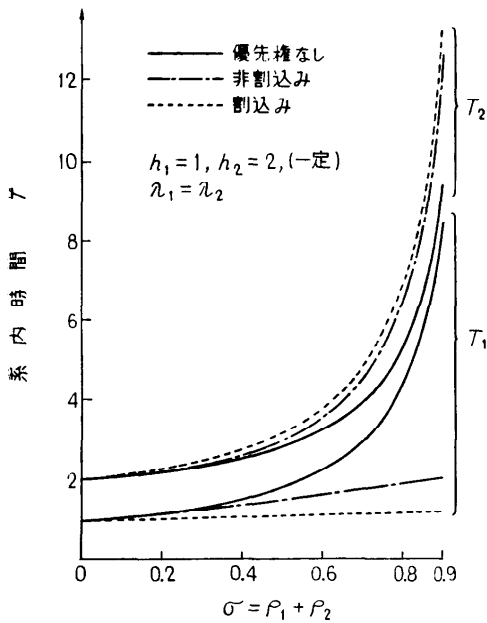


図-5 優先権の系内時間に対する影響

4.2 TSS における待ち行列

TSS では、多数の利用者のジョブを同時に受け入れて、あたかも各ジョブが CPU を専有しているかのようにジョブの処理を時分割で行う。この場合、CPU は 1 ジョブに対して量子 (quantum) と呼ばれる限られた時間だけ処理し、その間に処理が終了しなければ再び待ち行列へ戻す方法がとられ、量子処理 (quantum processing) と呼ばれる。また、このように客の一部が待ち行列へ戻る場合を、帰還待ち行列 (feedback queue) という。量子処理の場合、短い処理時間のジョブは結果的に早く系を退去することになり、優先権がある場合と同様の効果があり、かつ、ジョブの処理時間が前もって分らなくても有効である。

量子処理ではつぎの 2 方式が代表的である<sup>13)</sup>。

(1) ラウンド・ロビン方式 (RR 方式, round-robin)

図-6 の如く、量子長  $q$  の間に処理が終了しないジョブは、処理を中断して待ち行列の最後尾へ帰還する方式である。

量子長が一定 ( $q$ )、ジョブの到着がパラメータ  $\lambda$  の

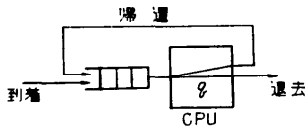


図-6 RR 方式

ポアソン過程、処理時間が平均  $\bar{h}$  の指数分布、準備時間が一定 ( $\tau$ ) の RR 方式について結果が得られているが、複雑なため文献<sup>11)</sup>等を参照されたい。

量子長  $q \rightarrow 0$  の極限の場合を RR プロセッサ・シェアリング (RR-PS) 方式と呼んでいる。これは、 $q > 0$  の量子処理がパートタイム的のに対し、系内のジョブ数が  $n$  のときは各ジョブがフルタイムに処理を受けるが、処理スピードが  $1/n$  になる方式であり、RR 方式と同様の特性を示しかつ解析も簡単である。Kleinrock は、 $M/G/1$  形の RR-PS 方式に対し、attained service time<sup>12)</sup> (その時刻までに受けた総サービス時間) の概念を用いて、処理時間  $x$  のジョブの平均系内時間  $\bar{T}(x)$  を簡単に求めた<sup>4)</sup>。すなわち、

$$\bar{T}(x) = \frac{x}{1-\rho} \tag{4.2}$$

である。また、 $\bar{T}(x)$  から処理時間を除いた総待ち時間の平均  $\bar{W}'(x)$  は次式で与えられる。

$$\bar{W}'(x) = \frac{\rho x}{1-\rho} \tag{4.3}$$

RR 方式の変形としては、有限入力源 RR 方式<sup>13)</sup>、待ちジョブが無いときは同一ジョブの処理を連続して行い、ジョブが到着すると量子処理へ移行する一括・量子処理の混合 RR 方式<sup>14)</sup>、量子処理中に新たにジョブが到着すると処理中のジョブの処理を更に 1 量子長だけ延長する複数量子形 (multiple quantum) RR 方式<sup>11)</sup>、外部優先権のある優先権 RR 方式<sup>15)</sup>、などが解析されている。

(2) 多段帰還方式 (FB 方式, foreground-background)

図-7 の如く  $N$  段の待ち行列があり、ジョブは第 1 段へ到着する。第  $j$  段のジョブは第 1~( $j-1$ ) 段のジョブが無いときのみ処理され、量子長  $q_j$  の間に処理が終了しなければ第 ( $j+1$ ) 段の後尾へ帰還される。この方式は、待ち行列が 1 段しかない RR 方式に比し

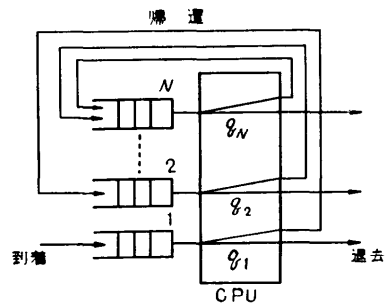


図-7 FB<sub>N</sub> 方式

て、処理時間の短いジョブの系内時間をより短くする効果がある。またこの方式は、最終段の処理方法で、 $q_N = \infty$  すなわち終了まで連続して処理する方式と<sup>16)</sup>、量子処理終了ごとに第 1~(N-1) 段のジョブの処理による中断を許す方式に分かれる<sup>17), 18)</sup>。

量子長  $> 0$  の場合の結果は複雑なため、文献 16), 17), 18) 等を参照されたい。特に  $\max q_j \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$  の場合を FB-PS 方式と呼び、新たに到着したジョブは処理中のジョブに割り込んで処理を受け、attained service time が割込まれたジョブのそれに達すると、割込まれたジョブと到着したジョブが PS 方式で処理されるモデルとなる。準備時間が 0 の場合の FB-PS 方式の結果を次に示す<sup>4)</sup>。

$$\bar{T}(x) = \frac{\bar{W}_x + x}{1 - \rho_x} \quad (4.4)$$

ここで、

$$\bar{W}_x = \frac{\lambda \bar{h}_x^2}{2(1 - \rho_x)}, \quad \rho_x = \lambda \bar{h}_x \quad (4.5)$$

であり、 $\bar{h}_x, \bar{h}_x^2$  は処理時間分布  $B(t)$  を  $t=x$  で断ち切った (truncated) 分布の 1 次・2 次モーメントである。すなわち、

$$\bar{h}_x^r = \int_0^x y^r dB(y) + x^r \{1 - B(x)\} \quad (4.6)$$

FB 方式の変形としては、外部優先権のある優先権 FB 方式<sup>19)</sup>、 $q_j = 2^{j-1}q$  と後段ほど量子長が長くなる方式<sup>20)</sup>、などがある。

(3) FCFS, RR-PS, FB-PS 各方式の比較

準備時間 0 の場合でかつ  $B(t)$  が指数分布の場合の  $\bar{T}(x)$  を、FCFS, RR-PS, FB-PS の各方式について図-8 に示す。図から、FB-PS 方式が最も処理時間に

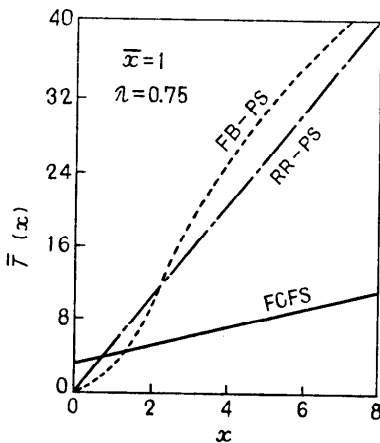


図-8 RR-PS 方式, FB-PS 方式

よって系内時間に差があり、短いジョブに有利な方式であることが分かる。

上述の RR-PS 方式, FB-PS 方式の解析では準備時間を 0 としてあるが、 $B(t)$  が一般分布であるため処理時間の中に含めて考えれば、これまでの結果がそのまま使える。

5. 記憶装置における待ち行列

一般に、主記憶装置はランダムアクセス形で、2 次記憶装置 (ファイルメモリ) はドラムやディスクのようなシーケンシャル形である場合が多い。

5.1 主記憶装置における待ち行列モデル

主記憶装置に現われるモデルとしては、マルチプロセッサシステムでのメモリ競合がある。図-9 の如く、2 プロセッサが 2 個のメモリユニットを共用する場合、一方のプロセッサがアクセス中のユニットに他プロセッサがアクセスすると衝突が起こり、後者のプロセッサが次のメモリサイクルまで待ち合わせることになる。簡単なモデルとして、図-9 においてメモリサイクルが一定周期で繰り返される場合を考えよう<sup>21), 22)</sup>。

$\lambda_{aj}(\lambda_{bj})$ : プロセッサ  $a(b)$  がサイクルタイム間にメモリユニット  $j$  へアクセスする確率。

$r_{aj}(r_{bj})$ : メモリユニット  $j$  に対し、衝突が起こった場合プロセッサ  $a(b)$  が勝つ確率。

とする。現実には、 $r_{aj}$  等は各プロセッサの要求発生過程、メモリユニットへのアクセス方法などにより決まるものであるが、ここでは独立なパラメータとする。 $(r_{aj} + r_{bj} = 1)$  このとき、表-2 の 5 状態のうちの 1 つが各メモリサイクルに現われる。状態間の遷移確率  $p_{ij}$  のマトリックスを  $P$  とすると、

表-2 メモリサイクルでの状態

状態	衝突あり/なし	衝突したメモリユニット	競合に勝ったプロセッサ
1	なし	—	—
2	あり	1	b
3	あり	1	a
4	あり	2	b
5	あり	2	a

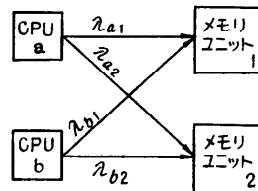


図-9 2プロセッサ・2メモリユニットシステム

$$P = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1r_{b1} & \lambda_1r_{a1} & \lambda_2r_{b2} & \lambda_2r_{a2} \\ 1-\lambda_{b1} & \lambda_{b1}r_{b1} & \lambda_{b1}r_{a1} & 0 & 0 \\ 1-\lambda_{a1} & \lambda_{a1}r_{b1} & \lambda_{a1}r_{a1} & 0 & 0 \\ 1-\lambda_{b1} & 0 & 0 & \lambda_{a2}r_{b2} & \lambda_{a2}r_{a2} \\ 1-\lambda_{a1} & 0 & 0 & \lambda_{a2}r_{b2} & \lambda_{a2}r_{a2} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

となる。ただし  $\lambda_j = \lambda_a \lambda_b$  である。極限状態での状態確率  $p_i$  のベクトルを  $\underline{p}$  とすれば、

$$\underline{p} \cdot P = \underline{p} \quad (5.2)$$

より求められる。

いま、メモリ衝突によってタスクの処理が伸びる割合を求めるため、

$T_a^*(T_b^*)$ : 衝突がある場合のプロセッサ  $a(b)$  のタスク処理時間。

$T_a(T_b)$ : 衝突が無い場合のプロセッサ  $a(b)$  のタスク処理時間、

とすれば、 $T_a^*/T_a$  等がその割合を表わす (stretching factor と呼ばれる)。プロセッサ  $a$  が待ち合わせるのは状態 2 と 4 の場合であるため、 $M$  回のアクセスの中  $\{1-p_2-p_4\}M$  回しかアクセスできないことになり、したがって、

$$\begin{cases} T_a^*/T_a = 1/(1-p_2-p_4) \\ T_b^*/T_b = 1/(1-p_3-p_5) \end{cases} \quad (5.3)$$

を得る。

メモサイクルが周期的でない場合は、1つのメモユニットに注目すると、プロセッサが入力源に対応する有限入力源待ち行列となる。この場合、メモサイクルがサービス時間となり、衝突による遅延は  $M(m)/G/1$  の公式で計算される。

### 5.2 ドラムでの待ち行列

まずシーケンシャルメモリの例としてドラムを考えよう。一般の情報処理システムでは I/O bound なのが多く、2次メモリでのスケジューリングアルゴリズムが重要な問題となる。ドラムのような回転部分をもつデバイスは、ディスクの他に IC メモリ (シフトレジスタ)、磁気バブルメモリ、超音波メモリ、光磁気メモリでも見られ、回転形メモリの解析は有効である。

ドラムは、レコードの開始位置およびレコード長が任意 (確率変数) であるファイルドラム、開始位置のみが定められているセクターファイルドラム、およびレコード長がセクター内に制限されているページングドラムに大別されよう。ここでセクターとは、ドラムを回転軸に平行な扇柱に分割したときの扇柱の部分をいう。要求の到着がポアソン過程、read と write は区別しない、容量は無限大という前提で要求の系内時

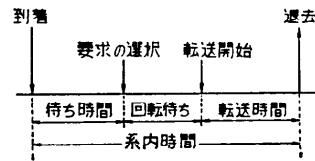


図-10 ドラム処理のシーケンス

間を考えてみよう。

要求が到着してから処理 (read/write) が終了するまでのシーケンスは図-10 のようになる。要求が選択されてからレコードの転送開始までの時間がアクセスタイムとなるが、ドラムの回転待ち時間 (rotational delay) であり、潜在時間 (latency) と呼ばれることもある。またドラムのスケジューリングアルゴリズムとしては、FCFS の他に SATF (shortest access time first) が代表的である。

#### (i) FCFS ファイルドラム

レコードの開始位置はトラック上一様分布と考えられ、回転周期を  $\tau$  とすれば、回転待ち時間の分布  $F_r(t)$  は、 $F_r(t) = t/\tau$  となる。またレコードの転送時間分布を  $F_i(t)$  とする、このときドラムの待ち行列は、サービス時間分布を  $F_r(t) * F_i(t)$  とする  $M/G/1$  モデルとなり、平均系内時間  $\bar{T}$  は Pollaczek-Khinchin の公式より次式で与えられる。

$$\bar{T} = \left( \frac{1}{2} + \bar{R} \right) \left[ 1 + \frac{\rho(1+c^2)}{2(1-\rho)} \right] \tau \quad (5.4)$$

ここで、 $\bar{R}$  はトラック長で正規化された平均レコード長、 $\rho = \lambda(1/2 + \bar{R})\tau$  および  $c$  はレコード長分布の変動係数である。

#### (ii) FCFS セクターファイルドラム

$k$  個のセクターより成るドラムでは、 $\tau/k$  ごとにレコード開始時点が巡ってくる。いま転送終了から次の開始時点までの時間を転送時間に加えて  $\tau/k$  で丸めた転送時間を  $x_i^0$  とすると、指数分布の場合は、

$$P_r\{x_i^0 = i\tau/k\} = (e^{1/kR} - 1) \cdot e^{-i/kR} \quad i \geq 1 \quad (5.5)$$

となる。また丸められた転送時間に対して、回転待ち時間  $x_r^0$  の分布は、一様分布の仮定で、

$$P_r\{x_r^0 = i\tau/k\} = 1/k \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \quad (5.6)$$

で与えられる。要求が並んでいる場合は、各要求は  $x = x_r^0 + x_i^0$  の処理時間で処理されると考えられる。一方要求が無いときに到着した要求には、次の開始時点までの回転待ち時間が余分に必要となる。このように、系が空きになると時間  $x_i$  (確率変数) の間隔で処理開始時点が巡ってくるモデルを、強制空き時間 (enforced idle time) のある待ち行列、または周期処



待ち行列と呼んでいる<sup>23)~25)</sup>。  $x_i$  の 1 次・2 次モーメントを  $\bar{h}_i, \bar{h}_i^2$  とし、サービス時間の 1 次・2 次モーメントを  $\bar{h}, \bar{h}^2$  とすれば、このモデルの平均系内時間は次式で与えられる。

$$\bar{T} = \frac{\bar{h}_i^2}{2\bar{h}_i} + \frac{\lambda \bar{h}^2}{2(1-\lambda\bar{h})} + \bar{h} \quad (5.7)$$

セクターファイルドラムに対しては、サービス時間分布を (5.5) と (5.6) の convolution とし、 $x_i = \tau/k$  (一定) とすれば良い。したがって、

$$\bar{T} = \left(\frac{1}{2} + \bar{R}\right)\tau + \frac{\lambda \bar{h}^2}{2(1-\lambda\bar{h})} \quad (5.8)$$

ここで、 $\delta = e^{-1/kR}$  とし

$$\bar{h} = \left[ \frac{k-1}{2k} + \frac{1}{k(1-\delta)} \right] \tau$$

$$\bar{h}^2 = \frac{\tau^2(k-1)(1-\delta)^2[(k-0.5)(1-\delta)+3]+3\delta(1-\delta)}{3k^2(1-\delta)^3}$$

(iii) FCFS ページングドラム

$k$  個のセクターに分割されていると、 $x_i = \tau/k$  となる。(ii) と同様に周期処理待ち行列となり、 $x_i = \tau/k$ ,  $P_r\{x_r = i\tau/k\} = 1/k$  ( $1=0, 1, \dots, k-1$ ) である。これらを式 (5.7) に代入すれば、

$$\bar{W} = \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) + \frac{\lambda\tau(k+1)(2k+1)/4k^2}{3[1-\lambda\tau(k+1)/2k]} \right\} \tau \quad (5.9)$$

(iv) SATF ページングドラム<sup>26), 27)</sup>

1 つのセクターに注目すると、ヘッドがそのセクターに到着したとき要求があれば必ず処理するモデルであり、他セクターの状態とは独立である。したがって、到着がパラメータ  $\lambda/k$  の Poisson 過程、 $x_i = \tau$ ,  $x_r = (k-1)\tau/k$ ,  $x_i = \tau/k$  の周期処理待ち行列となる。式 (5.7) を用いて次式を得る。

$$\bar{T} = \left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) + \frac{\lambda\tau/k}{2(1-\lambda\tau/k)} \right\} \tau \quad (5.10)$$

(v) SATF ファイルドラム<sup>26), 28)</sup>

厳密な解析が困難なため、Fuller<sup>26)</sup> の近似解析を紹介する。系内に  $n$  個の要求があるとき、転送終了から最もアクセス時間の短い要求までの回転待ち時間を  $l_n$  とすると、次の分布を得る。

$$P_r\{l_n \leq t\} = 1 - (1-t/\tau)^n \quad (5.11)$$

これを指数分布  $G_n(t) = 1 - e^{-(n+1)t/\tau}$  で近似すると、**図-11** の如き窓口が 2 段ある待ち行列となる。第 1 段目は回転待ち時間を、第 2 段目は転送時間を示し、サービス率が系内容数に依存するモデルである。これはマルコフ形であるため平衡方程式が成り立ち、平衡状態確率が求められる。それから平均系内容数  $\bar{L}$  を介

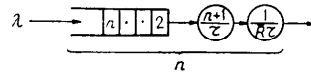


図-11 SATF ファイルドラムの近似モデル

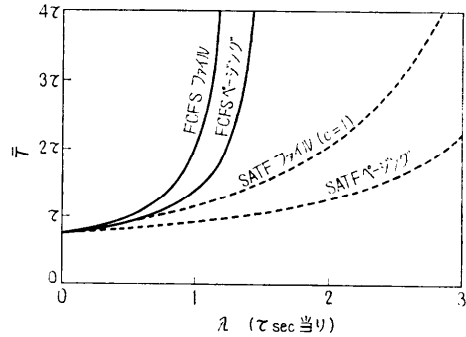


図-12 ドラムスケジューリングアルゴリズムの比較

して、Little の公式により平均系内時間  $\bar{T}$  が求まる。

$$\bar{T} = \frac{\tau + 1/\bar{R}\tau}{1-\lambda/\bar{R}\tau} + \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \int_0^1 \left\{ \frac{e^{-(1-u)}(1-\rho u)}{1-\rho} \right\}^{\lambda\tau} d_u - 1 \right] \quad (5.12)$$

ここで、 $\rho = \lambda/\bar{R}\tau$  である。

各モデルに対する平均系内時間の数値例を**図-12** に示す。平均レコード長が 1 セクター内のトラック長と等しい場合には、**図** から見られるように、SATF ページングドラムが最も系内時間が短かく効率が良い。

5.3 ディスクでの待ち行列

移動形ヘッドのディスクでは、回転待ち時間の他に、レコードのあるトラックまでヘッドが平行移動するための探索時間 (seek time) がアクセス時間に加わる。そのためディスクのスケジューリングアルゴリズムとしては、FCFS, SATF の他に、ヘッドの最終位置に近い要求から処理する SSTF (shortest seek time first), および、ヘッドは一定の方向に移動しながら要求があるごとに処理しつつトラック幅を往復する SCAN (走査式), などがある。

SSTF は、平均系内時間を短くする点で有効であるが、トラック幅の中央部に対する要求が早く処理され、周縁部に対する要求が後回しされるという欠点があり実用的でない。SCAN については、変形も含めて待ち行列モデルが解析されているが、ここでは省略する<sup>29)~31)</sup>。

参考文献

待ち行列の一般的文献としては、以下のものが参考

になる。(a)-f))

- a) 国沢, 本間監修: 応用待ち行列辞典, 広川書店, 東京 (1971).
- b) 藤木正也: 通信トラヒック理論の基礎と応用, 待ち行列理論 (その1~その3), 電子通信学会誌, Vol. 55, No. 8~10 (1972).
- c) L. Kleinrock: Queueing Systems, Volume I: Theory, John Wiley & Sons, New York (1975).
- d) L. Kleinrock: Queueing Systems, Volume II: Computer Applications, John Wiley & Sons, New York (1976).
- e) 本間鶴千代: 待ち行列の理論, 理工学社 (1966).
- f) T.L. Saaty: Elements of Queueing Theory with Applications, McGraw-Hill, New York (1961).
- 1) P.E. Jackson and C.D. Stubbs: A Study of Multi-access Computer Communications, Spring Joint Computer Conf., AFIPS Conf. Proc., Vol. 34, pp. 491~504 (1969).
- 2) E. Fuchs and P.E. Jackson: Estimates of Distributions of Random Variables for Certain Computer Communications Traffic Models, Proc. ACM Symp. on Problems in the Optimization of Data Communications Systems, pp. 202~225 (1969).
- 3) J.D.C. Little: A Proof of the Queueing Formula  $L=\lambda W$ , Operations Research, Vol. 9, pp. 383~387 (1961).
- 4) L. Kleinrock: A Conservation Law for a Wide Class of Queueing Disciplines, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 12, pp. 181~192 (1965).
- 5) N.K. Jaiswal: Priority Queues, Academic Press, New York (1968).
- 6) A.M. Lee and P.A. Longton: Queueing Process Associated with Air-line Passenger Check-in, Operations Research Quarterly, Vol. 10, pp. 56~71 (1959).
- 7) E. Page: Queueing Theory in OR, Butterworth, London (1972).
- 8) K.T. Marshall: Some Inequalities in Queueing, Operations Research, Vol. 16, pp. 651~658 (1967).
- 9) J. Köllerström: Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers, I, Journal of Applied Probability, Vol. 11, pp. 544~552 (1974).
- 10) A. Descloux: Delay Tables for Finite and Infinite-Source Systems, McGraw-Hill, New York (1962).
- 11) H.C. Heacox and P.W. Purdon: Analysis of Time-Sharing Queueing Models, J. of ACM, Vol. 19, No. 1, pp. 70~91 (1972).
- 12) L. Kleinrock and E.G. Coffman: Distribution of Attained Service in Time-Sharing Systems, J. of Comp. Syst. Sci., Vol. 1, No. 3, pp. 287~298 (1967).
- 13) I. Adiri and B. Avi-Itzhak: A Time-Sharing Queue with a Finite Number of Customers, J. of ACM, Vol. 16, No. 2, pp. 315~323 (1969).
- 14) I. Adiri and B. Avi-Itzhak: A Time-Sharing Queue, Management Science, Vol. 15, No. 11, pp. 639~657 (1969).
- 15) I. Adiri: Computer Time-Sharing Queues with Priorities, J. of ACM, Vol. 16, No. 4, pp. 631~645 (1969).
- 16) 坂田, 富田, 野口, 大泉: タイムシェアリングシステムにおける優先権による多段処理について, 電子通信学会論文誌, Vol. 51-c, No. 8, pp. 359~366 (1968).
- 17) E.G. Coffman and L. Kleinrock: Some Feedback Queueing Models for Time-Shared System, J. of ACM, Vol. 15, No. 4, pp. 549~576 (1968).
- 18) I. Adiri and B. Avi-Itzhak: A Time-Sharing Model with Many Queues, Operations Res., Vol. 17, No. 6, pp. 1077~1089 (1969).
- 19) 藤木, 雁部: 優先権のある多段帰還方式の条件つき待ち時間, 電子通信学会論文誌, Vol. 52-c, No. 1, pp. 25~32 (1969).
- 20) A.L. Scherr: An Analysis of Time-Shared Computer Systems, MIT Press, Cambridge Mass. (1967).
- 21) C.E. Skinner and J.R. Asher: Effects of Storage Contention on System Performance, IBM Syst. J., Vol. 8, No. 4, pp. 319~333 (1969).
- 22) C.V. Ravi: On the Bandwidth and Inteference in Interleaved Memory Systems, IEEE Trans., Vol. C-21, No. 8, pp. 899~901 (1972).
- 23) B.A. Powell and B. Avi-Itzhak: Queueing Systems with Enforced Idle Time, Operations Res., Vol. 15, No. 6, pp. 1145~1156 (1967).
- 24) C.E. Skinner: Priority Queueing Systems with Server-Walking Time, Operations Res., Vol. 15, No. 2, pp. 278~285 (1967).
- 25) M. Fujiki: Queueing Delay Formula for Common-Channel Signaling Systems, IEEE Trans., Vol. COM-20, pp. 787~791 (1972).
- 26) S.H. Fuller: Analysis of Drum and Disk Storage Units, Springer-Verlag, Berlin (1975).
- 27) E.G. Coffman: Analysis of a Drum Input/Output Queue under Scheduling Operation in a Paged Computer System, J. of ACM, Vol. 16, No. 1, pp. 73~9. (1969).
- 28) J. Abate and H. Dubner: Optimizing the Performance of a Drum-Like Storage, IEEE Trans., Vol. 18, No. 11, pp. 992~996 (1969).
- 29) E.G. Coffman, L.A. Klimko and B. Ryan: Analysis of Scanning Policies for Redncing Disk Seek Times, SIAM J. Comput., Vol. 1,

- No. 3, pp. 269~279 (1972).
- 30) C. C. Gotlieb and G. H. MacEwen: Performance of Movable-Head Disk Storage Devices, J. of ACM, Vol. 20, No. 4, pp. 604~623 (1973).
- 31) W. C. Oney: Queueing Analysis of the Scan

Policy for Moving-Head Disks, J. of ACM, Vol. 22, No. 3, pp. 397~412 (1975).

(昭和51年10月30日受付)

(昭和51年12月8日再受付)

---