耳介による個人認証システムの ロバスト化の試み

崔 英泰[†] 相馬 貢士[†] 渡部 大志[†] 酒井 勝弘[†] 中村 納^{††}

耳介認証システムによる防犯監視システムを目指し,耳介認証システムの姿勢 変化に対するロバスト性を向上させるアルゴリズムを提案した.カメラ平面外の 姿勢変化に対応するため,姿勢変化後の Gabor Jet を推測し判別分析に学習させ た.提案手法の有効性が実験的に確認でき,一つの姿勢の耳介画像を利用した監 視システムをロバスト化できる可能性が分かった.

An attempt of improving robustness of single-view-based ear surveillance-system.

Hideyasu Sai[†] Koji Soma[†] Daishi Watabe[†] Katsuhiro Sakai[†] and Osamu Nakamura^{††}

Aiming the surveillance-system based on ear biometrics, algorithms improving the robustness of the ear biometric system are proposed. In order to deal with pose variation by rotation in off-angle from camera, Gabor jets of different poses are estimated and used as a training data for discriminant analysis. Experimental evaluations show the effectiveness of the proposed-algorithm, and improvement possibility of robustness of single-view-based ear surveillance-system.

1. はじめに

1.1 背景

耳介の凹凸形状には個人を識別するのに十分な個人差があり, 経年変化が少ない ことが 1964 年 Iannarelli[1]により示された.この研究を基に,米国では 40 年以上に わたって壁に残る耳介の跡(耳紋)が,指紋と同様に犯罪捜査に利用されてきた.

共に犯罪捜査に利用されてきた耳介と指紋であるが、その中で耳介は指紋とは異な り耳介の凹凸構造には離れた場所からでも視認可能な大きさがある.そのことから、 監視システムにも利用できる可能性がある.

しかし、このように監視を目的とした認証を行う場合には、被認証者の協力は得ら れない.そのため、登録されている画像と入力される画像との間に姿勢や距離の変化 が生じる.耳介を用いた監視システムが有効に機能するためには、登録されている画 像と入力される画像との間に姿勢や距離の変化がある場合であってもロバストに認証 できるシステムが必要になる.

1.2 **先行研究**

現在, 姿勢や距離変化に最もロバストに対応していると考えられる耳介認証システムは 3D データを利用している[2][3]. これらの研究で利用された高精度の 3D データは高価なレーザーレンジファインダーで取得されているため, この方式が普及するにはまだ時間がかかると考えられる.

また,比較的安価な通常のカメラから取得される 2D 画像を用いたシステム[4][5]は 主に被認証者の協力が得られる個人認証を目的としているため,監視システムに必要 な姿勢や距離の大きな変化に対するロバスト性は必ずしも検討されていない.

以上の背景や先行研究から,我々は安価な 2D 画像で監視に必要な姿勢や距離変化 に対応を試みる手法を提案した[6]. この手法に関しては,異なる日に撮影された同一 人物の画像間に,最大 38.0%,平均 15.6%の大きさの変化,最大 31.1°,平均 13.1° の角度変化(カメラ平面内の回転)があるデータベース(XM2VTS)で,99.5%の rank1 認証率で認証できることを報告している.しかし,監視される人の耳が常にカメラ平 面に平行とは限らないので,より実用的な監視には,平面外回転に対するロバスト化 も必要になる.

1.3 目的

そこで、耳介認証システム[6][7]の平面外回転に対するロバスト化を試みる. 文献 [6][7]ではさまざまな姿勢の画像の耳介の Gabor Jet[8]を LDA[9]に学習させることで角

†† 工学院大学

[†] 埼玉工業大学

Saitama Institute of Technology

KOGAKUIN University

Vol.2011-CVIM-176 No.8 2011/3/17

情報処理学会研究報告 IPSJ SIG Technical Report

度変化に対するロバスト性を向上できることを報告している. さまざまな姿勢の Gabor Jet があらかじめ取得できれば良いが,実際には図1に示す,指名手配犯の横顔 写真のような画像が1枚しかない場合もありうる.



図1 犯罪者の横顔写真の例(パブリック ドメイン)

そのような場合には、1 枚の画像から様々な姿勢の画像を作って対応することが考 えられる.しかし、平面内で回転した姿勢の画像は画像の回転で作成することができ るが、平面外の回転に対応する画像を作成することは容易ではない.

そこで,角度変化後の Gabor Jet を直接推定し[10],それらを学習データとすることでロバスト化が可能かどうか検討する.

2. 提案手法

以下,今回利用した手法である Gabor Jet,線形 Jet 変換,判別分析についてそれぞれ概説し,提案手法の処理の流れを説明する.

2.1 Gabor Jet

座標平面上の点を $\mathbf{x} = (x, y)$ とする. 波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ の平面波をガウス関数 で局在化した関数

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{k}|^2 |\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right) \left[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]$$
(1)

を Gabor 関数という (式 (1)). ここで, σ はガウス関数で定められる関数の広がり を表す. また, $\exp(-\sigma^2/2)$ は直流成分をゼロにするための補正項であるが, σ が十分 に大きいときには無視してよい.

この関数は図1のように局在化した様々な方向の平面波が形作る様々な方向の凹凸

形状をもつ特徴がある.このような特徴を持つ Gabor 関数と画像との畳み込み積分からなる Gabor フィルタで、その画像の注目画素周辺の凹凸形状に対応する平面波の波長や方向性を読み取ることができる.



耳介の軟骨は様々な方向の凹凸形状を持つ. そこで,図2に示す耳介軟骨の稜線末 端および分岐点,突起点から成る7つの特徴点の周辺の凹凸形状を,Gaborフィルタ で捉えることにした.



図3 本実験で利用する耳介の特徴点

今回は、後述する実験画像の耳介の稜線の太さに合わせ、 $\sqrt{2}$ から $4\sqrt{2}$ の 5 波長、8 方向の平面波を $\sigma=2\pi$ のガウス関数で制限した Gabor フィルタのフィルタバンクを利 用して、7 つの特徴点から Gabor Jet を求めることにした.

2.2 Jet 空間類似度(Jet Space Similarity) による特徴点の検出

図3に示す特徴点を取得するために,修正弾性グラフマッチング法による特徴点探 索を行う.修正弾性グラフマッチング法とは,[8]で利用された弾性グラフマッチング 法であり,以下にその概要を述べる.

入力された画像に対し,登録画像から得た各特徴点の位置関係を平均した耳介グラフ(図4)を作成する.



図4 耳介グラフ

この耳介グラフをラスタスキャンし、入力画像のスキャン位置の Gabor Jet を取得す る.取得した入力画像の Gabor Jet を、登録画像群の Gabor Jet の主成分のはるベクト ル空間に射影する(図 5).このベクトル空間を Jet 空間と呼び、Jet 空間に射影した Gabor Jet の射影と入力画像の Gabor Jet の相関係数を Jet 空間類似度と呼ぶ[8].この Jet 空間類似度が一定しきい値以上の箇所を耳介として検出する.そして、検出した個所 でグラフを弾性変形しながら Gabor Jet を取得し、Jet 空間類似度が最高の箇所を耳介 の特徴点とする.



図 5 Jet 空間類似度

弾性グラフマッチング法では代表的なグラフや平均グラフにより探索を行うが、耳 介は個人差が大きいので、平均だけでなく、主成分を利用することで、個人差による ご検出を下げる効果を期待した.耳介の検出の際には、計算量を減らすため、図3に 示す対耳輪前脚,対耳輪後脚,対耳輪の3点を利用し,認証の際はすべての点をグラフの要素として利用した.それぞれの場合の耳介グラフを図6,図7に示す.



図6 検出の際の耳介グラフ



図7 認証の際の耳介グラフ

2.3 線形 Jet 変換

Gabor Jet は、それ自身角度変化に対してある程度ロバストであることが知られるが、 よりロバスト性を向上させるために、登録画像から別の姿勢の Gabor Jet を推定するこ とで登録データを増やすことを試みた.

まずは、人や物の姿勢の変化を画像処理により再現して Gabor Jet を得ることを考える. この場合、図8のような、カメラ平面内回転で生じる姿勢変化であれば画像を回転させることで Gabor Jet を得ることができるが、図9のようにカメラ平面が回転で生じる姿勢変化については画像を回転させて表現することができない.

Vol.2011-CVIM-176 No.8 2011/3/17

情報処理学会研究報告 IPSJ SIG Technical Report



図8 奥行のある被写体のカメラ平面内での回転



図9 奥行のある被写体のカメラ平面外回転

しかし,図10に示すような平面物体であれば、平面外回転の変化を、画像を回転させて表現することができる.



図10 奥行のない被写体のカメラ平面外回転

そこで,図11のように,各特徴点周辺を接平面で近似し,その近似平面の回転を考える.そして,回転した近似平面に映る Gabor Jet を推定する.



図 11 奥行のある被写体の近似接平面によるカメラ平面外回転

以下に、別の姿勢の Gabor Jet の推定方法[10]について概説する. カメラ平面に x-y 座標系があり、カメラ平面と垂直に z 軸があるものとする. カメ ラ平面に平行な平面物体を y 軸に関して θ 回転したあと x 軸について ϕ 回転したとき、 平面物体の座標上の点 $\mathbf{u} = (x, y)$ は、カメラ平面内では、

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\theta\sin\phi\\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

にあることが単位ベクトルの変換先を考慮することから求まる.この平面物体が初め カメラ平面に対して平行でなく, (φ, θ)のところにあるとすれば,

 $\mathbf{x} = \mathbf{A}(\phi_2, \theta_2) \mathbf{A}(\phi_1, \theta_1)^{-1} \mathbf{u}$

になる. このとき, Gabor Jet がどのように変化するかを推定する. 以降, $A(\phi, \theta,)A(\phi, \theta)^{-1}$ をAと書くことにする.

変換後の Gabor Jet の成分は,式(1)の Gabor 関数と変換後の画像 *I*(A⁻¹x) との畳み 込みで求められ, x=Au, x'=Au'とおけば以下のようになる.

$$j'_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \int I(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}')\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$$
$$= \int I(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}\mathbf{u}') |\mathbf{A}| d\mathbf{u}$$

ここで,

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}\mathbf{u}') \mid \mathbf{A} \mid \approx \sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{A}) \Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{u}')$$

と, 近似できることを仮定すると,

$$j'_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \approx \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{c}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{A}) j_{\mathbf{k}'}(\mathbf{u})$$

(3)

(2)

と推定することができる.行列Cは (2) 式の両辺に $\overline{\Psi_{\mathbf{k}'}}(\mathbf{u}')$ をかけて積分することで 求めることができる.

上記推定アルゴリズムは各頂点に接平面が張れて、その法線方向がカメラ平面の法 線となす角が分かっていることが前提になる.しかし、一般には法線方向が初めから わかっていることは考えにくい.そこで頂点ごとに最良の認証率が出るようなθとφ を予め探索しておくこととした.

2.4 判別分析

登録データの他に、上記の手法で作成した様々な角度の Gabor Jet を学習データとして作成し、各個人の角度変化を含んだ複数のデータをひとまとまりの個人データの「クラス」として利用することで角度変化へのロバスト性を上げることを検討した.

ここではクラス分けを目的とした学習法として知られる多重判別分析を利用し、ク ラス分けをしやすい座標系へ座標変換することとした.

この座標変換を行う行列 Wは、クラス間の散布行列 \mathbf{S}_{b} と、クラス内の散布行列 \mathbf{S}_{w} の 変換後の比である、下式(4)の最大値を与える行列として求めることができる.

$$J(\mathbf{W}) = \frac{|\mathbf{W}'\mathbf{S}_b\mathbf{W}|}{|\mathbf{W}'\mathbf{S}_w\mathbf{W}|} \tag{4}$$

行列 Wの列ベクトル ω_i は(5)で与えられる一般化固有値問題を解くことで求めることができる.

$$\mathbf{S}_b \mathbf{\omega}_i = \lambda_i \, \mathbf{S}_w \mathbf{\omega}_i \tag{5}$$

式(5)には、サンプルの数がデータの次元(この場合 Gabor Jet の次元)に比べて 大きくない場合にはクラス内散布行列 \mathbf{S}_w が退化するため、ベクトル $\boldsymbol{\omega}_i$ が必ずしも全 て正確には求められないという問題(小サンプル問題)がある.この問題を解決する 方法には、クラス内の散布行列 \mathbf{S}_w の代わりに全散布行列 \mathbf{S}_r を利用する方法[12]、PCA で次元数を削減してから判別分析を用いる方法[9]が提案されている.

そこで本実験ではこれら2つを組み合わせ、PCAで次元を削減した後に、(5)式の クラス内の散布行列 \mathbf{S}_w の代わりに全散布行列 \mathbf{S}_r を利用することでこの問題を解決した.

2.5 提案手法の独創的な点と予想される効果

以下,上記 3 つの手法を発展させた提案手法と予想される効果を述べる.まずは, 取得した画像(入力画像)の各特徴点から Gabor Jet を求める.次に,登録画像から得 られる Gabor Jet と,登録画像から得られた Gabor Jet を線形 Jet 変換することで推測し た,異なる姿勢の Gabor Jet を学習データとする判別分析を用いてクラス分けしやすい 座標にデータを変換する.最後に相関関数で類似度を算出して認証率を求める. この手法の独創的な点は、図12に示すように、1つの登録データから異なる複数の 角度のデータを推定し、登録データと合わせて判別分析のための学習データとするこ とである.

通常,データが1種類しかない場合にはクラス情報を作成できないため判別分析が 機能しない.そこで,存在しないデータを推定することでデータの不足を補うことを 考えた.その際,角度変化に対するロバスト性を持たせるために,登録データとは異 なる角度のデータを推測し学習データに含めることにした.

このようにして推測データを利用して学習させた判別分析は,推定した角度のデー タが実際に取得できた場合の判別分析と同様に角度変化に対するロバスト性をもつ効 果があると予想される.



図 12 線形 Jet 変換による学習データの生成の例

3. 実験

3.1 実験画像

耳介画像を取得する際に想定される角度変化の方向は,図 13 に示すように 3 種類ある.ここでは、首を縦に振ったときに生じるような変化の方向を Pitch、横に振った時に生じるような変化の方向を Yaw, 傾げたときに生じるような変化の方向を Roll とする.

監視を目的とした場合には、平面内回転である Pitch だけでなく、平面外回転である Roll や Yaw の変化にも対応する必要がある.そこで、これらの方向に角度変化した画像が含まれる HOIP データベースを用いて認証実験を行った.



図13 耳介の角度変化の方向

HOIP データベースは,300人の顔画像を511方向から撮影したデータベースである. 回転台に乗せた椅子を5°ずつ回転させて撮影されている.これらの顔画像から90× 120に収まる大きさの耳介を利用して実験を行った.以下 Yaw 方向の角度を,正面を 0°,真左を90°,真後ろを180°とする角度で表記する.

実験に使用する耳介画像の特徴点については、Jet 空間類似度[11]を利用して、図 14 左のように検出した.ただし、図 14 右のように、誤検出があった場合には手動で特徴 点の位置を修正した.



図 14 Jet 空間類似度による検出の様子(左:検出成功,右:誤検出)

3.2 実験方法

提案手法の Yaw 方向に対する姿勢変化へのロバスト性を調べるため,真左(0°を 正面顔としたとき 90°, Roll 角変化 0°)から撮影された耳介画像を登録画像とし, 入力画像は,図 15 のように 30°から 120°まで 10°刻みで選び(ただし,登録画像 の角度である 90°を除く)認証実験を行った.



推定データを判別分析に入れる提案手法の効果を調べるため,

1. 学習データを利用しない場合

2. 学習データに推定データを利用した場合

3. 学習データに実際のデータを利用した場合

の3つの場合のロバスト性を比較検討することとした.

学習データを利用しない場合は、判別分析は利用できないので処理から除くこととし、学習データを利用する場合は 75°, 105°の推定データまたは実データを,90°の登録データの他に判別分析に学習させる.ここでは Gabor Jet の推定精度を確保するため、学習させる角度幅(75°~105°)は入力画像の角度の幅(30°~120°)より小さくした.

学習データの角度と入力,登録データの角度全てで図3の特徴点7点の内4点以上 見える画像を選択した.そのため,角度によって4頂点以上見える人数が異なる.入 力角度毎の人数を表1に示す.

表 1 入力 Yaw 角毎の人数									
角度(°)	30	40	50	60	70	80	100	110	
人数	162	159	166	165	168	163	169	168	

精度の評価には、検索照合(1対N照合)の精度を評価する際に利用される rank1 認証率と1対1照合の精度を評価する際に利用される EER(Equal Error Rate)を用いる. rank1認証率と EER は正確には登録人数に依存するため、角度間の認証精度の比較には必ずしも適さないが、各手法間の比較は可能である.

4. 実験結果

Yaw 方向への変化が生じたときの rank1 認証率の推移を図 16 に, EER の推移を図 17 に示す. ただし, Yaw 角 90° については登録画像と入力画像が同一のため, rank1

認証率を 1, EER を 0 とした.

図 16, 図 17 から,推定データで学習を行った場合,Yaw 角 30°から 120°のほとんどすべての入力画像で学習データを使わかなかったものよりも精度が向上していることが確認できる.実際のデータで学習した場合と比較すると精度が低下しているが,推定データで学習した時のrank1認証率とEERの推移の傾向が実際のデータで学習した場合の傾向と類似していることが確認できる.

以上の結果から,推定データを学習させる提案手法は,実際のデータを学習させる 手法には及ばないものの,学習データを利用しない場合よりもロバスト性が広範囲で 向上していることがわかる.



(1対N照合, rank1認証率)



(1 対 1 照合, EER)

5. まとめ

耳介認証システム[6]の平面外回転に対するロバスト化を試みた.平面外回転方向への姿勢変化後の Gabor Jet を推定させる提案手法を用いることで,平面外回転方向への 姿勢変化に対するロバスト化ができる可能性があることがわかった.特に,指名手配 犯の横顔写真のような画像が1枚しかない場合であっても,その1枚の写真を用いて ロバストに監視できるシステムができる可能性が示唆された.

謝辞 実験用データを提供していただいたソフトピアジャパンに感謝する.なお,本論文に使用した HOIP データベースは,財団法人ソフトピアジャパンから使用許諾 を受けたものである.権利者に無断で複写,利用,配布等を行うことは禁じられている.また,本研究は科研費(22700219)の助成を受けたものである.

参考文献

1) A. Iannarelli : Ear Identification, Forensic Identification Series, Paramount Publishing Company,

情報処理学会研究報告 IPSJ SIG Technical Report

Fremont,1989

2) H. Chen and B. Bhanu, : Human Ear Recognition in 3D, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 29, 4, 718-737, 2007

3) P. Yan and K. Bowyer, : Biometric Recognition Using 3D Ear Shape, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,29,8,1297-1308, 2007

 T. Yuizono, Y. Wang, K. Satoh and S. Nakayama : Study on Individual Recognition for Ear Images by Using Genetic Local search, Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation, 237-242, 2002

5) D. J. Hurley. M. S. Nixon. and J. N. Carter, : Force Field Energy Functionals for Image Feature Extraction , Image and Vision Computing Journal, 20, 311-317, 2002

6) D. Watabe, H. Sai, T. Ueda, K. Sakai and O.Nakamura, : ICA, LDA, and Gabor Jets for Robust Ear Recognition, and Jet Space Similarity for Ear Detection, ICMED J., 3, 1, 9-29, 2009.

 7) 渡部 大志,相馬 貢士,崔 英泰,酒井 勝弘,中村 納,:ロバストな耳介認証に最適な判 別分析,映情学技報,33,54,63-66,2009

8) L. Wiskott, J-M. Fellous, N. Kruger, and C. Malsburg, : Face Recognition by Elastic Bunch Graph Matching, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 19, No. 7, pp. 775-779, 1997.

9) P. Belhumeur, J. Hespanha and D. Kriegman, : Eigenfaces v.s. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19, 7, 711-720, 1997

10) T. Maurer and C. Malsburg, "Single-View Based Recognition of Faces Rotated in Depth", International Workshop on Automatic Face and Gesture Recognition, 1995.

Daishi Watabe, Sai Hideyasu, Katsuhiro Sakai, Osamu Nakamura, : Ear biometrics using jet space similarity, Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, pp1259-1263, 2008
K. Fukunaga, "Statisitical Pattern Recognition", Academic Press, 1990

付録

(2)式の両辺に $\overline{\Psi_{\mathbf{k}^{"}}}(\mathbf{u}')$ をかけて積分すると, $\sum_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{A}) \int \Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{u}') \overline{\Psi_{\mathbf{k}^{*}}}(\mathbf{u}') d\mathbf{u}' \approx \int \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}\mathbf{u}') \overline{\Psi_{\mathbf{k}^{*}}}(\mathbf{u}') |\mathbf{A}| d\mathbf{u}'$ $= \int \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') \overline{\Psi_{\mathbf{k}^{*}}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$

ここで,

 $\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k}'' \rangle = \int \Psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{u}') \overline{\Psi_{\mathbf{k}'}}(\mathbf{u}') d\mathbf{u}'$ $\langle \mathbf{k}''(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k} \rangle = \int \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}') \overline{\Psi_{\mathbf{k}'}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$

という記号を導入すると,

$$\sum_{\mathbf{k}'} \left\langle \mathbf{k}'' \middle| \mathbf{k}' \right\rangle c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \left\langle \mathbf{k}''(\mathbf{A}^{-1}) \middle| \mathbf{k} \right\rangle$$

となる.これを並べると,

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{k}_{1} | \mathbf{k}_{1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{k}_{1} | \mathbf{k}_{N} \rangle \\ \langle \mathbf{k}_{2} | \mathbf{k}_{1} \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{k}_{N} | \mathbf{k}_{1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{k}_{N} | \mathbf{k}_{N} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}_{1}} \\ c_{\mathbf{k}\mathbf{k}_{2}} \\ \vdots \\ c_{\mathbf{k}\mathbf{k}_{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{k}_{1} (\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k} \rangle \\ \langle \mathbf{k}_{2} (\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{k}_{N} (\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k} \rangle \end{bmatrix}$$

となる. 上記左辺の行列をTと書けば,

$$T\begin{bmatrix} c_{\mathbf{k},\mathbf{k}_{1}} & c_{\mathbf{k}_{2},\mathbf{k}_{1}} \\ c_{\mathbf{k},\mathbf{k}_{2}} & c_{\mathbf{k}_{2},\mathbf{k}_{2}} \\ c_{\mathbf{k},\mathbf{k}_{2}} & c_{\mathbf{k}_{2},\mathbf{k}_{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{k}_{1}(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k}_{1} \rangle & \langle \mathbf{k}_{1}(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k}_{N} \rangle \\ \langle \mathbf{k}_{2}(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k}_{1} \rangle & \\ \langle \mathbf{k}_{N}(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k}_{1} \rangle & \langle \mathbf{k}_{N}(\mathbf{A}^{-1}) | \mathbf{k}_{N} \rangle \end{bmatrix}$$

となる.上記の式を $\mathbf{T} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{S}$ と書けば、(3)式を与える変換行列 \mathbf{C} は

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{\mathsf{T}} \mathbf{T}^{-1}$$

となる. T,S は(4)式から定まるので、(4)式の積分を求めることにする. 任意の実 2 次行列 $\mathbf{M} = (\mathbf{a}_{ii})$ に対し $\langle \mathbf{k}(\mathbf{M}) | \mathbf{k}' \rangle$ を積分できれば十分である. この積分の非積分関数は

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{k}^{\prime 2}}{\sigma^{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{k}^{\prime 2}}{2\sigma^{2}}(x^{2}+y^{2})\right) \left[\exp\left(i\left(k_{x}x+k_{y}y\right)\right)-\exp\left(-\sigma^{2}/2\right)\right] \\ \times \frac{\mathbf{k}^{2}}{\sigma^{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{k}^{2}}{2\sigma^{2}}\left(\left(a_{11}x+a_{12}y\right)^{2}+\left(a_{21}x+a_{22}y\right)^{2}\right)\right) \left[\exp\left(-i\left(k_{x}(a_{11}x+a_{12}y)+k_{y}(a_{21}x+a_{22}y)\right)\right)-\exp\left(-\sigma^{2}/2\right)\right] \\ = \frac{\mathbf{k}^{2}\mathbf{k}^{\prime 2}}{\sigma^{4}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(\left(\left(a_{11}^{2}+a_{21}^{2}\right)\mathbf{k}^{2}+\mathbf{k}^{\prime 2}\right)x^{2}+\left(\left(a_{12}^{2}+a_{22}^{2}\right)\mathbf{k}^{2}+\mathbf{k}^{\prime 2}\right)y^{2}\right)+2\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\right)\mathbf{k}^{2}xy\right) \\ \times \left(\exp\left(i\left(\left(-k_{x}a_{11}-k_{y}a_{21}+k^{\prime}x\right)x+\left(-k_{x}a_{21}-k_{y}a_{22}+k^{\prime}y\right)y\right)\right)-\exp\left(-\sigma^{2}/2\right)\exp\left(i\left(-\left(k_{x}a_{11}+k_{y}a_{21}\right)x-\left(k_{x}a_{21}+k_{y}a_{22}\right)y\right)\right)\right)\right) \\ \times \left(\exp\left(-\sigma^{2}/2\right)\exp\left(i\left(-k^{\prime}x^{\prime}x-k^{\prime}y^{\prime}y\right)\right)+\exp\left(\sigma^{2}\right) \end{aligned}$$

と展開される.ここで

$$\iint \exp\left(-ax^2 - by^2 - cxy - igx - ihy\right) dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab - c^2}} \exp\left(-\frac{ah^2 - cgh + bg^2}{4ab - c^2}\right)$$

に注意すると積分(4)が解析的に求まる.

(4)