資　料

代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法*

山本哲朗** 古金卯太郎*** 野倉久美****

Abstract

This is a study of the Durand-Kerner and the Aberth methods for finding all the roots of a given algebraic equation simultaneously, with no accumulation of rounding errors. Some properties concerning the convergence of the methods are shown. Numerical examples are given, which show the usefulness of both methods.

1. まえがき

実係数または複素係数の n 次代数方程式

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$
$$a_n\neq 0 \qquad (1)$$

を数値的に解く問題はきわめて古典的であるが，電子計算機が発達した現在でも，決定的な解法は知られていない．代表的な解法は，たとえば，次のようなものであろう．以下（1）の根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とする．

（I） Bairstow 法

$P(z)$ を2次式 z^2-uz-v で割ったときの剰余を $b_{n-1}(z-u)+b_n$ とする．Newton 法を用いて

$$b_{n-1}(u, v)=b_n(u, v)=0$$

をみたす u, v を求め，2次方程式 $z^2-uz-v=0$ を解けば，2つの近似根 $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ を得る．次に次数を2次低下させた方程式 $P(z)/(z^2-uz-v)=0$ につき，同様な操作を行う．以下同様．

（II） Garside-Jarratt-Mack 法（略称 Jaratt 法）

この方法は $P(z)/P'(z)$ を z の有理1次式

$$g(z)=(z-a)/(b+cz)$$

で近似し，適当な3点 z_1, z_2, z_3 をえらんで，連立1次方程式

$$b+cz_i+aF_i=z_iF_i,\quad F_i=P'(z_i)/P(z_i)$$
$$i=1,\ 2,\ 3$$

を a について解く，次に3点を z_2, z_3, a として，同じ操作を行う．これを繰り返し，充分収束した a の値を（1）の近似根 $\tilde{\alpha}_1$ とする．次に次数を1次低下させた方程式

$$P(z)/(z-\tilde{\alpha}_1)=0$$

につき同様な操作を行う．

類似な方法として，$P(z)$ を2次多項式で補間する Muller 法，3次式を用いる鳥居・都田の方法などがある．

（III） Lehmer-Schur 法

Schur の定理[5]を用いて，根を逐次狭い範囲に追いつめる．1根が確定した後は，（II）と同様，次数低下を行う．この方法は，通常の計算機では，オーバーフローを起こしやすく，特別な配慮が必要である．

ところで，これらの方法に共通して用いられる次数低下は，丸め誤差の累積のために，えられる近似解の精度を次第に低下させる危険性をもつ．もちろん，Wilkinson[9]が述べているように，絶対値の小さい根から求めていけば，その影響がごくわずかである場合もあろう．しかし，それは常に成り立つことではない．

あらわな次数低下をさける方法として，Wilkinson は，$l(<n)$ 個の近似解 $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_l$ がすでに求まったとき，適当な初期値 z_0 から出発する反復法

$$z_{\nu+1}=z_\nu-P(z_\nu)\Bigg/\left(P'(z_\nu)-P(z_\nu)\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{z_\nu-\tilde{\alpha}_i}\right)$$
$$\nu\geqq 0 \qquad (2)$$

を記している．実際，次数を低下させた多項式を

$$f(z)=P(z)\Bigg/\prod_{i=1}^{l}(z-\tilde{\alpha}_i)$$

* The Durand-Kerner and the Aberth Methods for Solving Algebraic Equations by Tetsuro YAMAMOTO (Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University), Utaro FURUKANE (Department of Physics, Faculty of General Education, Ehime University) and Kumi NOGURA (Computer Center, Ehime University)

** 愛媛大学理学部数学科
*** 愛媛大学教養部物理学科
**** 愛媛大学計算機室

とおけば，(2)は $f(z)=0$ に適用された Newton 法に等しい．明らかに (2) によって求められる近似解の精度は，すでにえた $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_l$ の精度に影響されない．しかしながら，ある i につき $\tilde{\alpha}_i \fallingdotseq \alpha_i$ ならば，上記 $f(z)$ は依然 α_i を根にもつ．したがって，$\tilde{\alpha}_i$ が極限精度まで達していない場合，(2)はなお α_i に収束する可能性を残すことになる．

一方，次数低下を必要とせず，n 個の根を同時に求める次の2方法はあまり知られていない．

(Ⅳ) Durand-Kerner 法

$$z_i^{(\nu+1)}=z_i^{(\nu)}-P(z_i^{(\nu)})\Big/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(z_i^{(\nu)}-z_j^{(\nu)})$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \quad (\nu \geqq 0) \tag{3}$$

(Ⅴ) Aberth 法

$$z_i^{(\nu+1)}=z_i^{(\nu)}-P(z_i^{(\nu)})\Bigg/\left(P'(z_i^{(\nu)})-P(z_i^{(\nu)})\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i^{(\nu)}-z_j^{(\nu)}}\right)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \quad (\nu \geqq 0) \tag{4}$$

方法 (Ⅳ) は，n 個の変数 $z_1, \cdots, z_n$ に関する k 次の基本対称式を $Q_k(z_1, \cdots, z_n)$ とするとき，n 元連立非線形方程式

$$Q_k(z_1, \cdots, z_n)-(-1)^k a_k=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

を解く Newton 法にほかならない[3]．方法 (Ⅴ) は

$$R_i(z)=P(z)/\prod_{j\neq i}(z-z_j) \quad (1\leqq i\leqq n)$$

とおくとき，z_i において $R_i(z)=0$ に適用された Newton 法に等しい．あるいはまた，(2)の形式的拡張ともみなせよう．

これら2方法は，何れも適当な初期値 $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ から出発して，$\nu\to\infty$ のとき $z_i^{(\nu)}\to\alpha_i (1\leqq i\leqq n)$ となることを期待する．したがって，他の方法と異なり，誤差が累積しないという，きわめてすぐれた特徴を有する．

本稿の目的は，これら2方法の収束性につき若干の考察を加えるとともに，数値実験の結果を紹介し，その有用性を報告することにある．

2. Durand-Kerner 法の収束性

前述したように，この方法は n 元連立方程式を解く Newton 法であるから，(1)の根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が相異なれば，局所的に2次収束することは明らかであるが，さらに次に述べる意味において，ある種の大域収束性をもつ．

命題1 Durand-Kerner 法における初期値 $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ を，円

$$C: |z+a_1/n|=\rho(>0)$$

の周上にある n 等分点にえらぶ．このとき，ρ が充分大ならば，最初のうち $z_1^{(\nu)}, \cdots, z_n^{(\nu)}$ は，縮小率 $1-n^{-1}$ をもって，円 C の中心に向かって直進する：

$$z_i^{(\nu+1)}+\frac{a_1}{n}\fallingdotseq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu}\left(z_i^{(0)}+\frac{a_1}{n}\right)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

証明 $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ が円 C の周上にある n 等分点ならば

$$\prod_{j\neq i}(z_i^{(0)}-z_j^{(0)})=n(z_i^{(0)}+a_1/n)^{n-1}$$

が成り立つことより明らかである． (証明終)

命題2 任意の初期値 $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ に対し，次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^{(\nu)}=-a_1(=\alpha_1+\cdots+\alpha_n),\quad \nu\geqq 1$$

証明 Euler の公式[4]

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^k}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)}=\begin{cases}0 & (0\leqq k\leqq n-2)\\ 1 & (k=n-1)\\ z_1+\cdots+z_n & (k=n)\end{cases}$$

($z_1, \cdots, z_n$ は相異なる数)

より明らかである． (証明終)

さらに，(1)が重根をもつ場合にも，次のことが成り立つ．

命題3 (1) の相異なる根を $\alpha_1', \cdots, \alpha_s'$ とし，一般性を失なうことなく，$\alpha_1', \cdots, \alpha_k'$ はそれぞれ $m_1, \cdots, m_k$ 重根，残りの $\alpha_{k+1}', \cdots, \alpha_s'$ は単根であると仮定する．k 個の充分小さい円

$$C_j: |z-\alpha_j'|=\rho_j \quad (1\leqq j\leqq k)$$

の周上に m_j 個の $z_i^{(\nu)}$ がそれぞれ等間隔に位置し，残りの $z_i^{(\nu)}$ はすでに $\alpha_{k+1}', \cdots, \alpha_s'$ に収束しているものと仮定する．

(ⅰ) α_1' が $\alpha_2', \cdots, \alpha_k'$ と充分離れていれば，C_1 上の m_1 個の $z_i^{(\nu)}$ につき

$$z_i^{(\nu+1)}-\alpha_1'\fallingdotseq(1-m_1^{-1})(z_i^{(\nu)}-\alpha_1')$$

$$z_i^{(\nu)}\in C_1 \tag{5}$$

(ⅱ) 特に $\alpha_1', \cdots, \alpha_k'$ が相互に充分離れていれば，C_j 上の m_j 個の $z_i^{(\nu)}$ につき

$$z_i^{(\nu+1)}-\alpha_j'\fallingdotseq(1-m_j^{-1})(z_i^{(\nu)}-\alpha_j'),\quad z_i^{(\nu)}\in C_j$$

$$1\leqq j\leqq k$$

証明 (ⅰ)を示せば充分である．仮定によって

$$\frac{P(z_i^{(\nu)})}{\prod_{j\neq i}(z_i^{(\nu)}-z_j^{(\nu)})}\fallingdotseq\frac{(z_i^{(\nu)}-\alpha_1')^{m_1}\cdots(z_i^{(\nu)}-\alpha_k')^{m_k}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}(z_i^{(\nu)}-z_j^{(\nu)})}$$

$$M=m_1+\cdots+m_k \qquad (6)$$

さて，円 C_j 上の周上にある $m_j(=m)$ 個の近似解を $\beta_1, \cdots, \beta_m$ とすれば，適当な偏角 φ_j をえらんで

$$(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_m)=(z-\alpha_j')^m-\rho_j^m\exp[m\varphi_j\sqrt{-1}]$$

とかける．よって，$z_i^{(\nu)}\in C_1$ かつ $j>1$ のとき

$$(z_i^{(\nu)}-\alpha_j')^m\Big/\prod_{l=1}^{m}(z_i^{(\nu)}-\beta_l)$$
$$=\left[1-\left(\frac{\rho_j\exp[\varphi_j\sqrt{-1}]}{z_i^{(\nu)}-\alpha_j'}\right)^m\right]^{-1}\doteqdot 1 \qquad (7)$$

また，C_1 上の近似解を，一般性を失なうことなく，$z_1^{(\nu)}, \cdots, z_{m_1}^{(\nu)}$ とすれば，

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m_1}(z_i^{(\nu)}-z_j^{(\nu)})=m_1(z_i^{(\nu)}-\alpha_1')^{m_1-1} \qquad (8)$$

が成り立つ．(3)と(6),(7),(8)より(5)を得る． (証明終)

3. Aberth 法の収束性

すでに Aberth は，彼の方法 (V) が局所的には3次収束であることを注意している．この章では，この方法が，Durand-Kerner 法と類似な性質をもつことを示そう．

命題4 Aberth 法において，初期値 $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ を命題1と同様にえらぶ．このとき ρ が充分大ならば，反復の初期の段階では

$$z_i^{(\nu+1)}+\frac{a_1}{n}\doteqdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^\nu\left(z_i^{(0)}+\frac{a_1}{n}\right)(1\leqq i\leqq n) \qquad (9)$$

が成り立つ．

証明 適当な定数 ψ をえらべば，次式が成り立つ．

$$(z-z_1^{(0)})\cdots(z-z_n^{(0)})$$
$$=(z+a_1/n)^n-\rho^n\exp[n\psi\sqrt{-1}]$$

ここで両辺を対数微分し，ロピタルの公式を用いて $z\to z_i^{(0)}$ としたときの極限値を求めれば，容易に次式を得る．

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i^{(0)}-z_j^{(0)}}=\frac{n-1}{2(z_i^{(0)}+a_1/n)} \qquad (10)$$

また，$\rho=|z_i^{(0)}+a_1/n|$ が充分大ならば

$$\frac{P'(z_i^{(0)})}{P(z_i^{(0)})}\doteqdot\frac{n}{z_i^{(0)}+a_1/n} \qquad (11)$$

も成り立つ．よって，$w_i=z_i^{(0)}+a_1/n$ とおけば(4)，(10)，(11)より

$$z_i^{(1)}+\frac{a_1}{n}\doteqdot w_i-\left(\frac{n}{w_i}-\frac{n-1}{2w_i}\right)^{-1}$$
$$=\left(1-\frac{2}{n+1}\right)w_i$$

すなわち (9) を得る． (証明終)

命題5 命題3と同じ仮定と記号の下で，Aberth 法につき次のことがらが成り立つ．

(i) α_1' が $\alpha_2', \cdots, \alpha_k'$ と充分離れていれば，C_1 上の m_1 個の $z_i^{(\nu)}$ につき

$$z_i^{(\nu+1)}-\alpha_1'\doteqdot\left(1-\frac{2}{m_1+1}\right)(z_i^{(\nu)}-\alpha_1')$$
$$z_i^{(\nu)}\in C_1$$

(ii) 特に $\alpha_1', \cdots, \alpha_k'$ が相互に充分離れていれば，C_j 上の m_j 個の $z_i^{(\nu)}$ につき

$$z_i^{(\nu+1)}-\alpha_j'\doteqdot\left(1-\frac{2}{m_j+1}\right)(z_i^{(\nu)}-\alpha_j')$$
$$z_i^{(\nu)}\in C_j,\ (1\leqq j\leqq k)$$

証明 命題3，4の証明と同様である． (証明終)

4. 初期値のえらび方

2. および **3.** に示した結果は，両方法のもつ著しい性質であって，一般の Newton 反復における初期値選択の問題点をほぼ解消しているといえよう．

Aberth は，特に，$z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ を次のようにえらんだ．

$$P(z)=(z+a_1/n)^n+c_2(z+a_1/n)^{n-2}+\cdots+c_n$$
$$S(w)=w^n-|c_2|w^{n-2}-\cdots-|c_{n-1}|w-|c_n|$$

とおく．$n\geqq 2$ かつ $(c_2, \cdots, c_n)\neq(0, \cdots, 0)$ ならば，デカルトの符号法則によって，$S(w)$ はただ1つの正根 r をもつ．さらに $|w|>r$ のとき

$$|w^n+c_2w^{n-2}+\cdots+c_n|$$
$$\geqq|w|^n-|c_2||w|^{n-2}-\cdots-|c_n|$$
$$=S(|w|)>0$$

であるから，$P(z)=0$ のすべての根は閉円板

$$|z+a_1/n|\leqq r$$

の内部または周上にある．そこで，$S(r_0)\geqq 0$ となる正数 r_0 を任意にえらび

$$z_k^{(0)}=-\frac{a_1}{n}+r_0\exp\left[\left\{\frac{2(k-1)\pi}{n}+\theta\right\}\sqrt{-1}\right],\quad \theta=\frac{\pi}{2n}$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (12)$$

とおく．(θ を加える理由については Aberth の論文[1]をみよ．)

以下，初期値として(12)を用いる Durand-Kerner 法を Durand-Kerner-Aberth 法（略して DKA 法）と呼ぼう．また，Aberth 法 (4) も，以後，(12)を初期値として用いるものとする．

命題1と命題4によって，両者は最初のうち1次収束であるから，(12)における r_0 をなるべく小さくえ

らぶことが望ましい．したがって我々は，$S(x)=0$ に対し Newton 法を適用し，根 r に充分近い r_0 を求める(根 r の近傍で $S(x)$ は下に凸であるから，$S(x_0)>0$ なる x_0 から出発すれば，つねに r の過大評価がえられる)．

なお，解を評価するには，Smith[6]による次の結果を用いる．

定理 (Smith)　$z_1, \cdots, z_n$ を相異なる複素数とすれば，真の解は閉円板

$$\Gamma_i : |z-z_i| \leq n \left| \frac{P(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)} \right| \equiv \gamma_i$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

の合併に属す．特に $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ の連結成分が m 個の閉円板から成れば，その中に丁度 m 個の根がある．したがって，Γ_i がすべて互いに素ならば，各 γ_i は近似解 z_i の誤差限界を与える．

注意　この定理を用いる場合，γ_i は少なくとも 1 桁正しく計算されていることが暗黙の仮定である．したがって，求根計算において用いた桁数に関係なく，γ_i はできるだけ高精度計算されるのが望ましい．

5. 数値例

著者の一人古金は，あるプラズマ中の波動の分散式を解析する過程において，324 個の 10 次方程式のすべての根を求める必要を生じた*)．

この場合，一部の方程式に対しては高精度近似解を与えるが，他の方程式に対しては発散（オーバーフローも含む）をひき起こす，いわゆる不安定（繊細）な解法よりも，すべての方程式に対して，とにかく近似解を与える，いわゆる安定（タフ）な解法が望ましいことはいうまでもない．実際，ひとたび近似解が求まれば，前述した Smith の評価法によりその精度を判定できるからである．また種々の工夫によって，その解を補正することもできよう．

しかしながら，通常のサブルーチン・ライブラリーには，上記問題に対する安定な解法は見当らないようである．たとえば，各計算センターに用意されている Bairstow 法はモデル問題 300 個のうち半数以上が発散し，比較的新しい Jarratt 法でも 30 個（1 割）が求まらなかった．これに反し，DKA 法と Aberth 法では，上記 2 方法と比較して幾分多くの計算時間を要したものの，すべてに安定した解がえられた．ここでは，これら多くの計算例の中から，**Table 1** に掲げた 3 例をとりあげ，その結果を示す．計算は九州大学大型計算機センターの FACOM 230-75（複素倍精度，実部・虚部それぞれ 2 進 61 桁）で行った．収束判定は，DKA 法と Aberth 法の場合，

$$|z_i^{(\nu)}-z_i^{(\nu-1)}| \leq \varepsilon |z_i^{(\nu)}|,\ \ \varepsilon=10^{-13} \qquad (13)$$

を用い，最終段階で

$$|I_m(z_i^{(\nu)})| \leq \varepsilon$$

ならば実根とみなして Smith の定理を適用した．両方法による結果はほとんど同一であった．

また Bairstow 法と Jarratt 法の収束判定には，SSL 使用方法解説書に指定された標準値（$\varepsilon=10^{-15}$）を用いた．

例 1　Bairstow 法と Jarratt 法が何れも発散した例である．DKA 法による解 $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_n$ と，それらに対し Smith の定理を適用した結果とを **Table 2**（次頁参照）に示す．($\tilde{\alpha}_i$ は絶対値の大きい順に並べかえてある.) $\tilde{\alpha}_5$ と $\tilde{\alpha}_6$, $\tilde{\alpha}_7$ と $\tilde{\alpha}_8$ は完全な共役数ではない（15 桁目以降に差異がある）から，γ_5 と γ_6, γ_7 と γ_8 の計算値が異なっていても不思議ではない．

例 2　Bairstow 法では発散，Jarratt 法では収束した例である．DKA 法による解を **Table 3**（次頁参照）に示す．Jarratt 法による結果もほとんど同一であった．

例 3　Bairstow 法では収束，Jarratt 法では発散した例である．DKA 法による結果を **Table 4**（次頁参照）に示す．$\tilde{\alpha}_1$ の虚部にゴミ（微小な値）が残っているが，実根であることは明らかであるから無視してよい（根拠は Smith の定理!!）．

なお，以上の例には重根が存在しないから，次の数値例を追加しておく．

Table 1　Coefficients of $P(z)$ ($n=10$)

	Example 1	Example 2	Example 3
a_1	$-0.206D+03$	$-0.200D+05$	$-0.806D+03$
a_2	$0.108D+05$	$0.100D+09$	$0.284D+06$
a_3	$-0.215D+05$	$-0.214D+09$	$-0.572D+08$
a_4	$0.106D+04$	$0.226D+08$	$0.719D+10$
a_5	$-0.211D+02$	$-0.732D+06$	$-0.580D+12$
a_6	$0.211D+00$	$0.341D+04$	$0.294D+14$
a_7	$-0.106D-02$	$0.124D+03$	$-0.860D+15$
a_8	$0.217D-05$	$-0.353D-04$	$0.116D+17$
a_9	$-0.155D-09$	$0.244D-11$	$-0.198D+17$
a_{10}	$-0.114D-15$	$0.115D-19$	$-0.197D+13$

* 静磁場にそって異なる流れ速度をもつ 2 成分系プラズマ中で，磁場に対して任意方向に伝播する波動の波数ベクトルと振動数との間の関係式，いわゆる分散式を各成分の温度を 0 とした輸送方程式と Maxwell の方程式より求め，磁場の強さ，流れ速度について各々 3 通り，波の伝播方向，波長については各々 6 通りの場合につき解を求めた．本稿の 10 次代数方程式は上記組み合わせのある場合に対する分散式に相当するものである．

Table 2　Computer results for Example 1, obtained by the DKA method (N=number of iterations required to obtain the solutions)

i	$R_e(\tilde{\alpha}_i)$	$I_m(\tilde{\alpha}_i)$	$\lvert P(\tilde{\alpha}_i)\rvert$	γ_i	N
1	0.106332109163974D+03	0.0	0.37D+02	0.27D−14	15
2	0.975981712090324D+02	0.0	0.36D+02	0.51D−14	15
3	0.201966202100389D+01	0.0	0.10D−11	0.82D−17	43
4	0.145818217966618D−01	0.0	0.32D−26	0.42D−17	78
5	0.105283140603405D−01	−0.370649373016221D−02	0.10D−26	0.42D−17	78
6	0.105283140603405D−01	0.370649373016221D−02	0.15D−26	0.59D−17	79
7	0.717252949793519D−02	−0.187431993295470D−02	0.21D−27	0.26D−17	78
8	0.717252949793519D−02	0.187431993295470D−02	0.56D−28	0.70D−18	79
9	0.748251362890443D−04	0.0	0.20D−32	0.13D−21	81
10	−0.728060227631396D−06	0.0	0.0	0.0	81

Table 3　Computer results for Example 2, obtained by the DKA method

i	$R_e(\tilde{\alpha}_i)$	$I_m(\tilde{\alpha}_i)$	$\lvert P(\tilde{\alpha}_i)\rvert$	γ_i	N
1	0.101452357575671D+05	0.0	0.88D+21	0.27D−12	16
2	0.985262337107446D+04	0.0	0.25D+22	0.98D−12	16
3	0.203133831196705D+01	0.0	0.62D−08	0.46D−17	77
4	0.422753872604602D−01	0.572143466166178D−02	0.10D−19	0.12D−17	103
5	0.422753872604602D−01	−0.572143466166178D−02	0.68D−19	0.78D−17	104
6	0.346627217745842D−01	0.0	0.51D−20	0.15D−17	104
7	−0.968073448598706D−02	0.0	0.29D−21	0.13D−18	106
8	0.144550558029464D−06	0.786017985462602D−08	0.22D−37	0.76D−24	135
9	0.144550558029464D−06	−0.786017985462602D−08	0.27D−37	0.95D−24	135
10	−0.442538411734872D−08	0.0	0.0	0.0	134

Table 4　Computer resuts for Example 3, obtained by the DKA method

i	$R_e(\tilde{\alpha}_i)$	$I_m(\tilde{\alpha}_i)$	$\lvert P(\tilde{\alpha}_i)\rvert$	γ_i	N
1	0.208656481927376D+03	−0.607342210954871D−12	0.39D+08	0.10D−10	11
2	0.140962912987680D+03	−0.846384956893410D+02	0.49D+06	0.49D−12	14
3	0.140962912987680D+03	0.846384956893410D+02	0.30D+07	0.30D−11	15
4	0.667561192765570D+02	0.607897445151407D+02	0.14D+03	0.30D−14	19
5	0.667561192765570D+02	−0.607897445151407D+02	0.69D+03	0.15D−13	18
6	0.860643539009374D+02	0.0	0.77D+03	0.11D−12	19
7	0.469314780068872D+02	−0.180741497794309D+02	0.64D+02	0.17D−13	19
8	0.469314780068872D+02	0.180741497794309D+02	0.46D+02	0.12D−13	19
9	0.197824311858750D+01	0.0	0.19D−02	0.12D−17	19
10	−0.994891505705337D−04	0.0	0.0	0.0	20

Table 5　Computer results for Example 4, obtained by the DKA method

i	$R_e(\tilde{\alpha}_i)$	$I_m(\tilde{\alpha}_i)$	$\lvert P(\tilde{\alpha}_i)\rvert$	γ_i	N
1	−0.200000000070451D+01	0.0	0.0	0.0	26
2	−0.199999999922764D+01	0.0	0.0	0.0	27
3	0.100000000000000D+01	0.0	0.0	0.0	6
4	0.552173605188983D−20	0.100000000000000D+01	0.22D−19	0.66D−20	6
5	−0.100000000000000D+01	0.0	0.0	0.0	6
6	−0.496029669703932D−19	−0.100000000000000D+01	0.19D−18	0.60D−19	6

例 4　(A. Ralston[5])

$$P(z)=(z+2)^2(z^2-1)(z^2+1)$$
$$=z^6+4z^5+4z^4-z^2-4z-4$$

この場合，4つの方法はすべて収束した．2重根 −2 に対する精度は Bairstow 法が最もよく，以下 Jarratt 法，DKA 法，Aberth 法の順であった．最も悪い Aberth 法の結果を **Table 5** に示す．表中，$\tilde{\alpha}_i \neq -2$ $(i=1,2)$ であるにもかかわらず，$P(\tilde{\alpha}_i)=0$ したがって $\gamma_i=0\ (i=1,2)$ となっている．このあたり，山下・佐竹[10]のいう，（2重根に対する）多項式の計算限界であろうか．

なお，参考のため，上記4例の計算に対する各解法の所要時間を **Table 6**（次頁参照）に示す．

6. むすび

2.，3. の議論および数値実験の結果によって，われわれは次の結論をえている．

（i） DKA 法と Aberth 法はある種の大域収束性

Table 6 Comparison of computing time (msec)

	DKA	Aberth	Bairstow	Jarratt
Example 1	283	245	672(diverge)	193(diverge)
Example 2	407	350	621(diverge)	130
Example 3	101	87	35	123(diverge)
Example 4	54	50	19	30

をもち，我々の問題のすべてに満足すべき解を与えている．反復が発散する例は1例もない．ただし，重根または近接根の存在する場合には収束は遅く，200回程度反復しても判定条件 (13) が満たされないことがある．しかし，その場合でも，えられる値は充分実用に耐えるものとなっている．

(ii) 粗い解でよければ，単精度計算でも充分である．また (13) における ε の値を大きくして，倍精度計算するのもよい．

(iii) 計算所要時間は他の方法とくらべて幾分多い．また問題によってかなり異なる．

(iv) DKA 法2回弱の反復が Aberth 法1回の反復に相当する．1回の反復に要する乗除算回数（前者 $2(n-1)n$ 回，後者 $(3n-1)n$ 回）を考慮しても，計算所要時間は後者がやや少ない．

(v) 連立1次方程式における如き Gauss-Seidel 型反復は有効でない．すなわち（3）または（4）の右辺における $z_1^{(\nu)}, \cdots, z_{i-1}^{(\nu)}$ を，すでにえた $z_1^{(\nu+1)}, \cdots, z_{i-1}^{(\nu+1)}$ でおきかえて $z_i^{(\nu+1)}$ を計算する．これを各 $i(2\leqq i\leqq n)$ につき行えば，収束はかえって遅くなる．これは反復の対称性を自らくずすためであろう．

附記 実係数代数方程式の高精度解法としては，鳥居・都田によるすぐれた方法がある．この方法は，Jarratt 法における有理1次式のかわりに，3次 Hermite 補間式を用いて近似解を求め (RPEQ ルーチン)，次にそれらを Newton 法により補正する (ERROR ルーチン) ものである．しかし，テストしたモデル問題 25 個のうち6個が，ERROR ルーチンにおける多項式の値を計算する過程において，オーバーフローを生じた．これは，プログラムが複素演算をさけて実数演算のみで行われるよう工夫してあるため，絶対値のかなり大きい解を補正する場合に生じたものと思われる．解法自身の責任ではない（この理由からすれば，問題によっては DKA 法，Aberth 法にも同様な現象が起こる筈である．実際，このような例を人工的につくることは可能である．しかし幸運にも，我々の問題に対しては，DKA 法，Aberth 法共にこの現象は生じなかった．）．われわれの実験では，むしろ，RPEQ ルーチンのみを倍精度で用いる方が，減次操作が幸いして，そのようなオーバーフローも起こらず，よい結果を与えるようである．しかもこのとき，計算時間は他の方法よりはるかに少ない．ただし，RPEQルーチンを単精度（2進 26 桁）で用いて上記問題 25 個を解いたとき，途中で発散し，ERROR ルーチンでも補正できない例が1つみられた．DKA 法と Aberth 法では，たとえ単精度でも，このような例は見い出されていない．

参　考　文　献

1) O. Aberth: Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomials Simultaneously, Math. Comp., Vol. 27, 339～344 (1973)
2) G. R. Garside, P. Jarratt and C. Mack: A new method for solving polynomial equations, Comp. J., Vol. 11, 87～90 (1968)
3) I.O. Kerner: Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nulstellen von Polynomen, Numer. Math., Band 8, 290～294 (1966)
4) 奥川光太郎：代数学(数学演習講座)，共立出版，東京 (1956)
5) A. Ralston: A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York (1965)
6) B. T. Smith: Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gerschgorin's Theorems, J. A. C. M., Vol. 17, 661～674 (1970)
7) 鳥居達生，都田艶子：3次エルミート補間法に基づく根の計算法，情報処理，Vol. 14, No. 4, 253～259 (1973)
8) 鳥居達生，都田艶子：3次エルミート補間法に基づく実係数代数方程式の解法，情報処理，Vol. 14, No. 4, 288～289 (1973)
9) J. H. Wilkinson: Rounding Errors in Algebraic Processes, Her Majesty's Stationery Office, London (1963)
10) 山下真一郎，佐竹誠也：高次代数方程式の根の計算限界について，情報処理，Vol. 7, No. 4, 197～201 (1966)
11) 山本哲朗：ある代数方程式解法と解の事後評価法，数理科学，Vol. 14, No. 7, 52～57 (1976)

(昭和51年6月28日受付)