Vol.2011-MUS-89 No.27
2011/2/12

音圧関数の低周波フーリエ・スペクトルにおける楽曲構造の反映

三谷　尚†　　井手詩織††

楽曲の 1 / f 特性に関して、音圧関数のフーリエ・スペクトルを考える．同一音高の音符の相関を利用することによって相関関数が求められ、さらに Wiener-Khintchin の定理によりスペクトル関数が得られる．これによれば、スペクトル関数のべき数に、「同一音高の音符の分布」という観点での楽曲構造が反映される．一方で、直接的なフーリエ変換を、主として正弦波型のモデル音楽を用いて数値計算・解析計算等によって実行し、スペクトル関数を比較した．

Reflection of music structure on low-frequency Fourier spectrum of sound pressure function

HISASHI MITANI †　　SHIORI IDE††

We consider Fourier spectrum of sound pressure function in terms of 1/f character of music tunes. Using correlation of notes with same height (frequency), we can obtain a correlation function; and also a spectrum function using Wiener-Khintchin's theorem. Thus, a structure of music tune, in terms of a distribution of notes with same height, is reflected on a power of the spectrum function. On the other hand, we obtain and compare the above method with direct Fourier transformations, with a numerical calculation and an analytical calculation, mainly using "model music" with a sine-function.

1. はじめに

音の低周波 1/f 型スペクトルについては，1950 年代頃から，電流の熱雑音等と共に注目が集まった．この内容は，ほぼ Voss and Clarke [1] の論文を出発点とし，日本では、武者等による議論がさかんに行われた．但し，スペクトルとは横軸を周波数とするグラフであるが，縦軸に登場するスペクトル関数は一意ではなく、議論を整理しないといけない．表 1 は、主たるスペクトル関数を列挙したものである．

表１　低周波 1/f 型を提示するスペクトル関数

主たる対象	フーリエ像の形態	注釈	1/f 型の出現理由	
音圧関数 p(t)	(a)　p(t)の（１乗の）フーリエ変換	本稿では(a)の絶対値の２乗を‘パワースペクトル’と呼ぶ。	Intrinsic [a]	Voss et al.[1]
	(b)　p(t)＾２のフーリエ変換		Trivial [b]	Voss et al.[1]
音高の関数 h(t)	(c) Peak sequence 間隔のフーリエ変換	単旋律、一人の声に適用	Intrinsic [c]	Aoki et al. [2]
	(d) Zero level cross 点の密度のフーリエ変換	(c)と同様の適用の他、多声部にも適用可	Intrinsic [c]	Voss et al.[1]

上記に示される様に，スペクトル関数は音の基本量である音圧関数（大気圧からの変化分）p(t) のフーリエ変換と，その性質を抜き出した音高 h(t) に関連するフーリエ像[2] に大別される。通常、「1/f ゆらぎ」として語られる概念は後者であるが，本研究では，音圧関数の（１乗の）フーリエ変換について議論する．

2. 音圧関数のフーリエ・スペクトル

以下では、音圧関数 p(t) のフーリエ・スペクトルを求める．今後は，"スペクトル"とはこのことを指す．これを求める方法として， (1) 相関関数を求め，さらに、まず相関関数とスペクトルの関係である Wiener-Khinchin の定理を利用してスペクトルを求める方法，および， (2) 相関関数を経ずに直接求める方法がある．（図 1 参照）

† 福岡教育大学;　Fukuoka University of Education
†† 九州大学　芸術工学府;　Department of Acoustic Design, Kyushu Univeristy

a)　Trivial とは，有限区域のフーリエ積分によって音圧関数の定数成分が, 1 / f スペクトルを生むこと。
b)　Intrinsic では上記以外の理由で 1 / f スペクトルが登場。
c)　もし平均値を差し引く操作をしなければ、Trivial な 1 / f スペクトルが見える。しかし、Intrinsic な 1 / f スペクトルをも内在する。

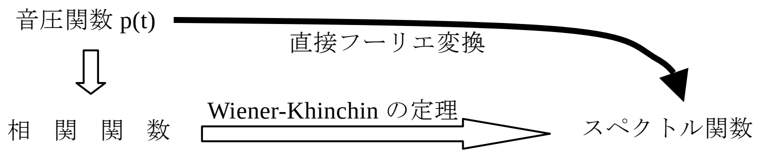


図１　スペクトルを得る２種の方法

以下の **2.1** では，スペクトル関数を同一音高の相関を利用して求める方法について述べ、**2.2** では，スペクトル関数を相関関数を経由せずに得る方法について述べる．

2.2 の直接法においては，さらに次の３つのアプローチについて紹介する：(i) モデル音楽をパソコン上でのフーリエ変換， (ii) フーリエ変換の解析的計算法， (iii) 録音からフーリエ変換する方法．なお、本研究を通して，音符に基づく振動状況に関して，音圧関数としては，正弦関数を念頭に置く（図２参照）．

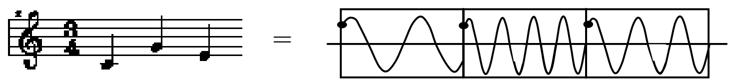


図２　音符に対応する典型的な音圧関数の波形

これによれば，音符の音圧は本質的に次の関数で表され、これで構成される音楽を「モデル音楽」と呼ぶ． $p_n(t) = C_0 \cos(\Omega_n(t - t_n) + \varphi)$，（$t_n < t < t_{n+1}$）．ここで少なくとも，同じ楽器の同じ音量、同じ音高の音は， $t = t_n$ における音開始時に，同じ付加位相 φ を有する．モデル音楽では，すべての音が同一の音量を持つものとする．

2.1　相関関数を経由する方法

相関関数の導出に使われる次の式を考える。(なお、以下で登場する時間間隔τは、楽曲における音符の間隔であり，その最小単位の長さの倍数を念頭に置く．）

$$<(p\ (t+\tau) - p(t))^2> \ = 2<(p(t))^2> - 2<p(t+\tau)\ p(t)> \qquad (1)$$

ここで，$<(p(t+\tau) - p(t))^2> \equiv D(\tau)$，$<p(t)\,p(t+\tau)> \equiv C(\tau)$ とする． $D(\tau)$ における平均操作＜　＞は特に断らなければ全時間についての平均であるが，ここで $D_C(\tau)$ を，時間間隔τを隔てて音高が一致する音どうしの平均、 $D_{non-C}(\tau)$ を音高が一致しない音どうしの平均とすると，次式が成り立つ．

$$D(\tau) = \alpha(\tau) D_C(\tau) + (1 - \alpha(\tau)) D_{non-C}(\tau). \qquad (2)$$

ここでα（τ）は，τ だけ隔てた間隔において，同一音高の音符ペアが存在する確率．さらに， $D_C(\tau) = 0$ ，加えて正弦波に対する性質を使うと， $C(\tau) = ((C_0)^2 / 2) \times \alpha(\tau)$．

Wiener=Khintchin の定理によれば，C（τ）をフーリエ余弦変換することでスペクトル密度関数（パワースペクトル）$S(f)$ を得ることができ，もしも $C(\tau) \propto \alpha(\tau) \propto \tau^{-\gamma}$（連続関数）であれば $S(f) \propto f^{-(1-\gamma)}$ となる．（今後一般に、べき数 $\tilde{\beta}$ を $S(f) \propto f^{-\tilde{\beta}}$ で定義する．）但し， C（τ）にはτが整数値か否かで不連続性があり、$\tilde{\beta}$ の値は(1−γ)より若干、大きくなると予想されるが、今後の課題である．

具体的に３曲の楽曲の楽譜を用いて，$\alpha(\tau)$ を求めた．　特に Bach のピアノ小品，Marsche においては、両対数グラフによってべき性が良好でγ=0.60 が得られ（図３参照），パワースペクトル $S(f) \propto f^{-\beta}$　では，ほぼβ=0.40 となると考えられる．

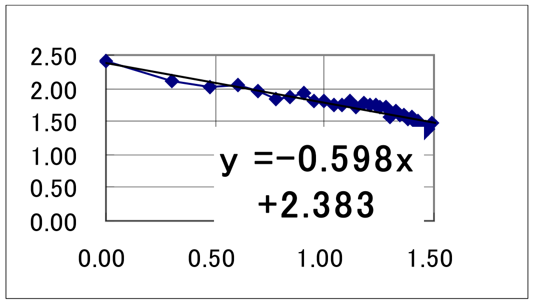


図３　Bach, “Marsch”の相関関数（両対数）

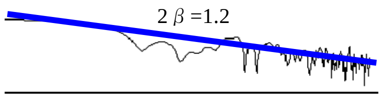
ここで求められたべき数と，その他のデータについては，後の節でまとめて紹介する．

2.2 相関関数を経由せずにスペクトル関数を得る方法

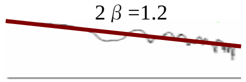
ここでは直接，フーリエ変換によってスペクトル関数を求める。具体的方法として，前述のとおり３種類がある．

（i）モデル音楽のパソコン上でのフーリエ変換

図１の様な関数を基本とする前述の楽曲を，パソコン上でフーリエ変換する．ここでは、$1/f$ 型スペクトルが見える低周波領域のみを示す．（図４参照）



（a） Menuett, 0<f<0.6



（b） Prelude (Cello) , 0<f<0.08

図４　Bach(モデル音楽)のスペクトル関数（両対数；unit as, one note = 1(sec)）

この低周波領域におけるべき数と、前述 **2.1** の結果とを併せて、表２に掲載する。

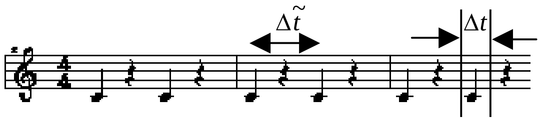
楽曲; いずれも Bach 作曲	解析において扱った楽曲の声部構成	相関関数のべき;γ、およびこれから求められるパワースペクトルのべき;$\tilde{\beta}$ ここで $\tilde{\beta} \geq 1-\gamma$		モデル音楽によるスペクトルのべき(β). 左列の $\tilde{\beta}$ と比較すべきは 2β.
Piano 小品, Menuett	総譜	γ=0.27	$\tilde{\beta} \geq$ 0.73	
	単旋律のみ	γ=0.25	$\tilde{\beta} \geq$ 0.75	β=0.6,　2β=1.2
Piano 小品, March	総譜	γ=0. 60	$\tilde{\beta} \geq$0. 40	
	単旋律のみ	γ=0. 50	$\tilde{\beta} \geq$ 0.50	β=0.5,　2β=1.0
Cell 曲 Prelude	単旋律のみ	γ=0.29	$\tilde{\beta} \geq$ 0.71	β=0.6,　2β=1.2
“譜例Ｂ”(後述)	同一音程	γ=0	$\tilde{\beta} \geq$ 1	β～1,　2β～2

表２　　2.1,　2.2-(i) による 1 / f　型スペクトルのべき数

（ii）　スペクトルを解析的に求める方法

ここでは, 単旋律，同じ長さの音符からなる楽曲を考える。音符の番号を，$n = n(m, k)$ とする．m は音高の番号，k はある音高の音の k 番目を意味する。さらに，m は１つの値のみ（同一音高）に限り，同一間隔で並ぶ音符（一般に休止符が入るもの、図５, “譜例Ａ”）とする．その音圧関数は次のように表される（式(3)）．

図５　“譜例Ａ” Δn=2 の場合



$$p(t) = \sum_n \cos\,(\Omega\,(t - t_n) + \varphi), \quad n = n\,(m_1, k), \;\; \Omega = \Omega(m_1) \qquad (3)$$

ここで，$t_n = k\,\Delta\tilde{t} = k\,\Delta n \cdot \Delta t \quad \Delta\tilde{t} \equiv \Delta n \cdot \Delta t$．　まず１音のフーリエ変換から考える．

$$F_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \cos(\Omega(t - t_n) + \varphi)\;\cos(\omega t)\;dt. \qquad (4)$$

（4）の積分を計算し，若干変形した上で，前述した音列に関して和をとる：

$$S(\omega) = \sum_n F_{n(m,\,k)}(\omega). \qquad (5)$$

(5)の和の結果は、$\omega << \Omega$ の近似において，

$$S(\omega) = \frac{\Omega}{4} \cdot \cos((\Omega/2)\Delta t + \varphi) \cdot \sin((\Omega/2)\Delta t) \times \left\{ \frac{\sin((N_k - 1/2)\,\omega\Delta\tilde{t})}{\sin(\omega\Delta\tilde{t}/2)} \right\} \approx \frac{1}{\omega}, \qquad (6)$$

であり、$S(f) \propto f^{-\beta}$ の定義では β～１となる．さらに図４の楽譜から休止を取り去り、４分音符の連続を考える場合を”**譜例 B**”とする．この場合でも，β＝1 となる。

一方、前節 2.1 の方法で，この”**譜例 B**”を解析すると，相関関数のべき数は，γ＝0 ，これから スペクトル関数は $\tilde{\beta}$＝1 となる。これは上記 2.2 -(ii) の式(6)と定量的一致はみないが、定性的な傾向は一致する．この定量的不一致の件、および、前述のとおり楽曲は種々の β 値をもたらす件，この点の解明は今後の課題である．

（iii）録音からフーリエ変換する方法

このスペクトルには，(i) , (ii)でも示したとおり 曲全体の長さに対応する超低周波の振動が必ず付随する．（式(7) の $\sin(\,(N_k - 1/2)\,\omega\Delta\tilde{t}\,)$ 項 ）．録音からフーリエ変換を行う場合，DFT で標準的に刻まれた振動数のみのデータからは，関数 $1/\sin(\omega\Delta\tilde{t}/2)$ の概形を見ることが難しく，現在，音楽の空白の時間を入れる等の改良を行っている．

参考文献

1) R.F.Voss and J.Clarke, J.Accoust.Soc.Am. 63(1), (78) 258
2)N. Aoki and T.Ifukube, J.Accoust.Soc.Am. 106(1), (99) 423, 電子情報通信学会誌 J82-A,(99-5) 649

謝辞　この研究方法の着想後，ただちに当理論の確認をして頂いた九州大学，河辺哲次教授，フーリエ変換の基礎につき教示頂いた九州共立大学，長井達三教授，その他多くの方々に，熱心に討論に応じて頂いたことに感謝する。