

## LES を用いた 2 次元および 3 次元エッジ トーンの数值解析

伊藤 泰典<sup>†</sup>,高橋公也<sup>††</sup>,宮本真孝<sup>†</sup> 高見利也<sup>†††</sup>,小林泰  
三<sup>†††</sup>,西田晃<sup>†††</sup>,青柳睦<sup>†††</sup>

圧縮流体の解析ツールである Large Eddy Simulation(LES)を用いて、2 次元、  
および 3 次元エッジトーンのシミュレーションを行った。Lighthill の音源分  
布を計算し、渦度分布と音源の関係を考察した。

## Numerical study on 2D,3D models of edge tone

Yasunori ito, Kinya Takahashi, Masataka  
Miyamoto<sup>†</sup>, Toshiya Takami, Akira Nishida, Mutumi  
Aoyagi<sup>††</sup>

We numerically studied the edge-tone by using 2D and 3D models.  
Particularly we investigated Lighthill's sound source distributions comparing  
with distributions of vorticity.

### 1. はじめに

この論文では、流体解析の 1 つである圧縮性の Large Eddy Simulation(LES) を  
用いて 2 次元および 3 次元 モデルを用いたエッジトーンについて報告する。エッジ  
トーンは、エアリード楽器の音源となっており、流体音(空力音)の典型的なモデルの 1  
つである。Brown は、エッジトーンについての著名な研究を含め長い研究の歴史があ  
るが、現在でもその詳細は完全に明らかにされているとは言えない。[1, 2, 3, 4]

近年、我々はエアリード楽器のシミュレーションに取り組み、圧縮性の LES を用  
いて小型エアリード楽器の発振の再現に成功し、楽器を特徴付ける基本的な発振特性  
も再現可能であることを示した。その過程で、流体音源の基礎的な性質を知ることが  
楽器の発音機構の解析において極めて重要であるとの認識に至った。そこで、この論  
文では、基礎研究として、エアリード楽器の音源となるエッジトーンに焦点を絞り、  
その流体音源の性質を数值計算を用いて解析する。[8]

### 2. エッジトーン

図 1 に示すように、エッジトーンは、エッジに衝突して振動するジェットが作り出す  
流体音[1, 2, 3, 4]であり、エアリード楽器の音源[4, 5, 6, 7]となる。エッジトーンの発  
音メカニズムは、ノズルからジェットが噴出するとその流れは下流に行くにつれて横  
方向の揺らぎを持つ。このジェットがエッジにぶつかると流れが揺らぎエッジにおい  
て薄利を起し、渦を発生する。この渦から微弱な音波が発生する。この音波が上流  
に伝わりノズル付近のジェットを刺激しジェットの振動に影響を与える。このフィ  
ードバックループが増幅され、ある一定の状態安定したときの音をエッジトーンと言  
う。このように、エッジトーンの発生原理は、一見簡単に見えるが、不安定なジェ  
ットの挙動とそこから発生する音を扱うために、現在でもその詳細は完全には理解され  
ていない。しかし、実験及びそれにもとづく半経験的な理論により、ジェットの流速  
と発振周波数の関係は、かなり正確に分かっている[1, 2, 3, 4]。それらの中で初期の  
最も重要な仕事は、Brown によって行われた[1]。次式は、Brown によって与えられ  
たジェットの流速  $V$  と発振周波数  $f$  の関係を表す式である。

$$f = 0.466j(100V - 40)(1/(100l) - 0.07) \quad (1)$$

<sup>†</sup>九州工業大学大学院 情報システム専攻

Physics Laboratories, Kyushu Institute of Technology

<sup>††</sup>九州工業大学大学院 情報工学研究院

Physics Laboratories, Kyushu Institute of Technology

<sup>†††</sup>九州大学 情報基盤研究開発センター

Research Institute for Information Technology, Kyushu University

ここで、 $l$  はノズルとエッジの距離で、 $j$  は振動の回数によって決まる係数で  $j=1,0,2,3,3,8,5,4$  となり、 $j=1$  が基音である。ジェットの流れ  $V$  の増加とともに、基音が発振し、その周波数  $f$  は  $V$  に比例して増加する。しかし、 $V$  がある閾値を越えると別の回数の振動へと遷移する。各振動状態間の遷移は履歴的で、 $V$  を減少させた時の遷移は、上昇時の遷移とは一般に異なる。この論文では、基音の発振状態での流体音に焦点を絞り、遷移は扱わない。

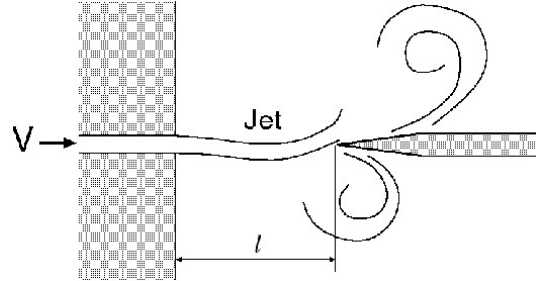


図 1: エッジトーン

### 3. Lighthill の音響的類推

乱流から発生する音は、一般に空力音または流体音と呼ばれる。それらは、高い Reynolds 数を持つ流体運動の極めて小さな副産物であると考えてよい。流体音源の定式化は、Lighthill によって行われた [9]。Lighthill は、流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式を組み合わせ、厳密な計算のもとで、音波に対する以下の様な非同次方程式を導いた。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2\right)(\rho - \rho_0) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2)$$

左辺の同次項は密度  $\rho$  ( $\rho_0$  は平衡状態の値) に対する音波の方程式なので、右辺の非同次項が音源項と解釈される。ここで、 $c_0$  は(平衡状態の)音速で、 $T_{ij}$  は Lighthill のテンソルと呼ばれ以下のように定義される。

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0))\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (3)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$  は粘性応力テンソルである。式(2)の右辺の非同次項は 2 階の偏微分で表せるので、流体音源は 4 重極的に振る舞うと予想される。音源から発生した音波は、流れがある場合にもあたかも静止流体中を伝搬する音波のように振る舞う。そのために、Lighthill の音響的類推と呼ばれることが多い。

Reynolds 数が大きい場合には  $\sigma_{ij}$  の効果を見捨てる事が可能である。さらに、線形断熱近似

$$(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0) = 0 \quad (4)$$

が、成り立つとすると、式(3)の第 2 項、第 3 項は無視でき、第 1 項  $\rho v_i v_j$  が主な音源を作り出す。一般に、音の粒子速度は流れのそれに比べ十分に小さいので、音源項の計算は、非圧縮性を仮定した計算で良い近似が得られると考えられる。そこで、 $\rho = \rho_0$ 、 $\text{div} \mathbf{v} = 0$  として、音源項を近似すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &\sim \rho_0 \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \rho_0 (s_{ij}^2 - w_{ij}^2) \\ &= \rho_0 \text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \rho_0 \nabla^2 \left(\frac{1}{2} v^2\right) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで、 $s_{ij}$  と  $w_{ij}$  は対称テンソルと非対称テンソルで、以下のように定義される。

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

2次元流体では、式(5)は以下のように書き直せる。

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \sim -2\rho_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (7)$$

この論文では、式(5)、(8)を用いて 3次元、2次元の音源を計算する。

#### 4. モデルと数値計算法

エッジトーンの数値計算では、ジェットの流れ運動とそれから発生する音波を同時に再現する。音速  $c$  は約  $340\text{m/s}$  であり、高々数十  $\text{m/s}$  のジェットの流速  $V$  に比べ極めて大きい。したがって、音波の伝搬を再現するには、通常の流体計算よりもより細かな時間刻みが必要である。一方、流体の渦には  $1\text{mm}$  以下の大きさのものも存在し、可聴領域の音波の波長( $10\text{kHz}$  で  $34\text{mm}$ ) に比べ遥かに小さい。したがって、通常の音波の計算よりもより細かなメッシュが必要である。このように、流体と音波の同時計算には、時間空間の両方で十分に細かな離散化が必要となる。さらに、音波の粒子速度は、流速に比べ極めて小さく、そのため、音波のエネルギーは流体のそれに比べ  $10^{-4}$  以下になる。そのため、減衰しながら伝搬する音波を遠方まで再現することは容易ではない。そこで、精度と計算効率を考慮し、近距離場(数十  $\text{cm}$  程度)に限定したシミュレーションを行う。

この論文の数値計算では、圧縮性 LES(Large Eddy Simulation)を用いた。LES は境界層における計算に多少の不確定さがあるが、長時間の計算において極めて安定度が高いために流体音の研究で近年広く用いられている。

図 2 (a) に 2 次元エッジトーンの計算に用いたモデルの形状を示す。ノズルの高さ及びエッジ板(エッジの付いた仕切り板)の厚みは  $d=1\text{mm}$ 、ノズルの出口からエッジまでの距離は  $l=5\text{mm}$ 、エッジ角は  $\theta=20^\circ$ 、仕切り板の長さは  $L=35\text{mm}$  である。図 2 (b) に数値計算に用いたメッシュの全体を示す。メッシュ大きさは  $30\times 30\text{mm}$  で、近距離場での流れと音波の振る舞いを記述するのに十分な大きさである。表 1 にメッシュのパラメータを示す。3 次元の計算では、紙面上の 2 次元モデルに垂直な方向に  $10\text{mm}$  の一様な厚みを付け加え、紙面に平行な 2 枚の滑らかな面で挟み込んだモデルを用いた。紙面内のメッシュは 2 次元モデルと同じに取り、厚み方向には 40 分割したメッシュを用いた。

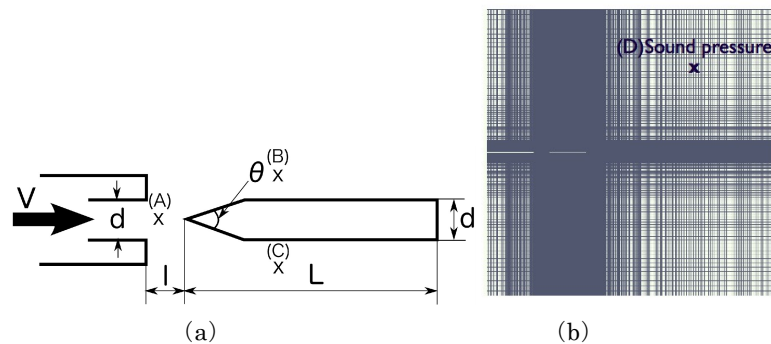


図 2: 2次元モデル (a) ノズルとエッジの配置 (b) メッシュの全体図

表 1: メッシュのパラメータ

points	cells	faces
210214	104116	417455

計算に用いたパラメータは以下の通りである。平衡状態の圧力と温度をそれぞれ  $p_0=100\text{kPa}$  と  $T_0=300\text{K}$  した。制御パラメータであるジェットの流速は、2次元モデルでは  $(5 \leq V \leq 30\text{m/s})$  の領域の代表的な値に取り、3次元モデルでは  $V = 10.0, 15.0, 20.0\text{m/s}$  の各値に固定した。時間刻みは  $\Delta t = 10^{-7}\text{sec}$  とし、2次元モデルでは  $0.05\text{sec}$  まで、3次元モデルでは  $0.02\text{sec}$  まで計算を行った。遠方の圧力(音圧)  $p$  の測定は、図 2 (b) の点 (D) で行い。渦度  $\omega$ 、Lighthill の音源、Howe の音源は、図 2 (a) の点 (A) 及び (B) で行う。点 (A) はノズルの中心軸上に置かれ、ジェットの渦度やそれが作り出す音源の測定に用いる。点 (B) は、エッジの後方に置かれ、ジェットがエッジに衝突する事で発生するローブアップした渦の渦度やそれらが作り出す音源の測定に用いる。

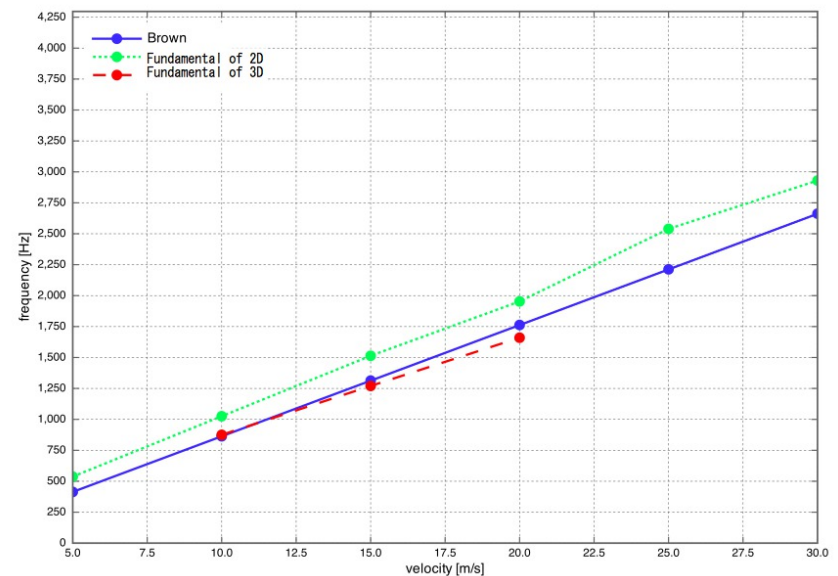


図 3: ジェットの流速と周波数の関係図

### 5. 数値解析

まず最初に、ジェットの流速  $V$  と発生する音波の振動数  $f$  の関係を調べる。図 3 は、ジェットの流速  $V$  と観測点 (D) における音圧  $p$  の周波数  $f$  の関係を 2 次元及び 3 次元モデルで計算し、Brown の理論式 (1) と比較したものである。3 次元の結果は都合により一部のデータしか表示していない。図 4 に、2 次元モデルを用いジェットの流速が  $V = 10\text{m/s}$  の時の観測点 (D) における圧力変化とそのパワースペクトルを示している。初期の過渡状態を除くと、少し雑音混ざっているがかなり周期的な圧力変化が起きているのが分かる。また、そのパワースペクトルを見ると基音、2 倍音、3 倍音のピークが明確に立ち、雑音成分は高い周波数成分からの寄与である事が分かる。この基音の周波数  $f$  をジェットの流速  $V$  を変えてプロットしたのが図 3 である。

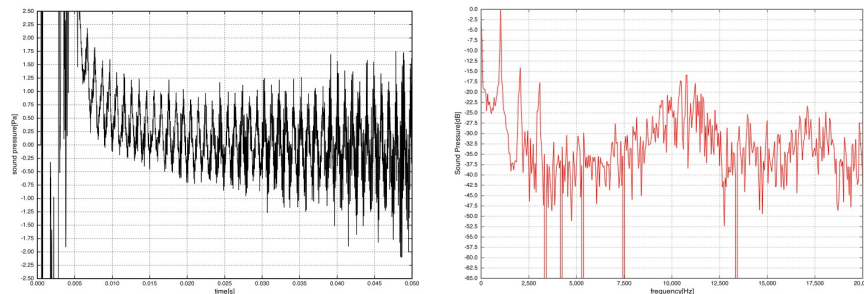


図 4: 観測点 (D) における音響的振動(2次元モデル,  $V = 10\text{m/s}$ ) (a) 圧力変化 (b) 圧力のパワースペクトル

2 次元及び 3 次元両方のモデルで、エッジトーンの周波数  $f$  は、ジェットの流速  $V$  にほぼ比例して増加し、Brown の理論式と良い一致を示している。特に、3 次元モデルは、Brown の式とほぼ一致していると言ってよい。2 次元モデルは、Brown の式よりも全体的に周波数が高くなる傾向が見られるが、ジェットの流速の全領域でほぼ Brown の式に沿って増加している。したがって、LES を用いた数値計算は、十分に信用できるものであり、また、2 次元モデルと 3 次元モデルにおけるエッジトーンの発振メカニズムには、本質的に大きな違いはないと考えられる。

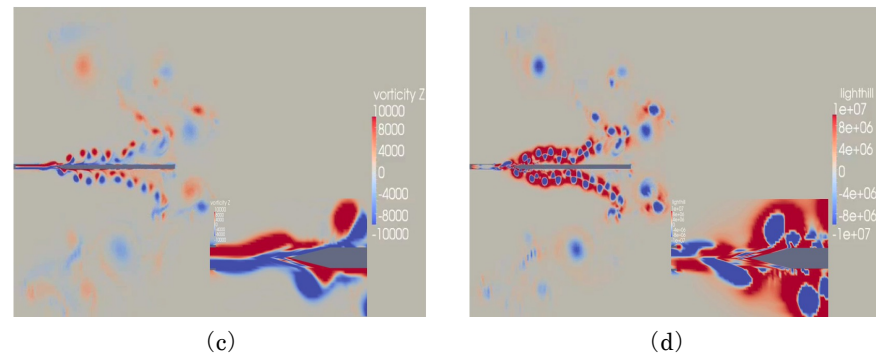
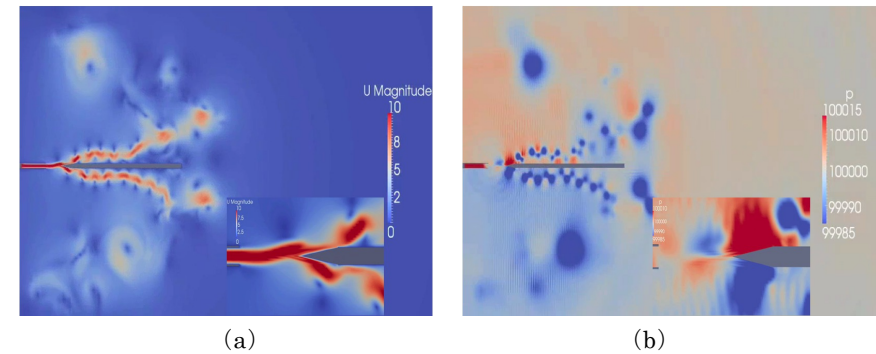
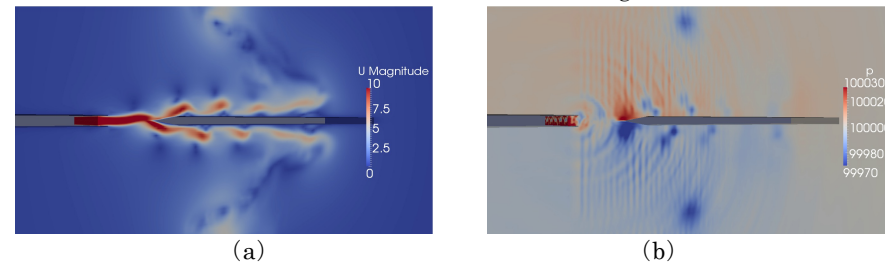


図 5: 力学量の空間分布(2次元モデル,  $V = 10\text{m/s}$ , 挿入図はジェットの部分の拡大図) (a) 流速分布 (b) 圧力分布 (c) 渦度分布 (d) Lighthill の音源分布



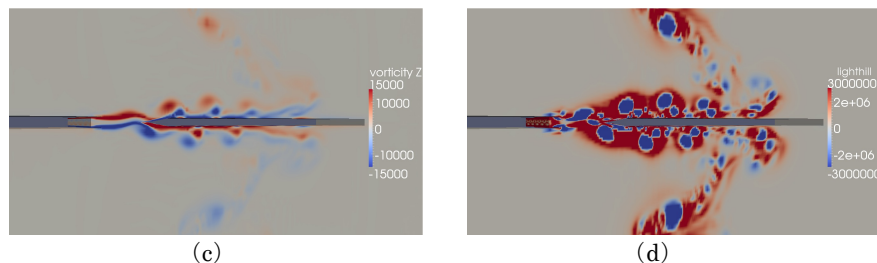


図 6: 力学量の空間分布(3次元モデル,  $V = 10\text{m/s}$ ) (a) 流速分布 (b) 圧力分布  
(c) 渦度分布 (d) Lighthill の音源分布

### 5.1 力学量の空間分布

図 5 は、2次元モデルで  $V = 10\text{m/s}$  の場合のある時刻の流速分布、圧力分布、渦度分布および Lighthill の音源分布である。図 5(a) に示すように、ジェットはノズルとエッジの間の開口部で波打って振動しエッジに衝突する。その結果、ジェットはエッジ板によって分裂し、上方および下方への供給流量は交互に周期的に増減する。上方または下方に供給された体積流は、エッジとの衝突の影響でロールアップした渦を作り、エッジ板に沿って下流へと流され、空間的にほぼ周期的な渦列を作り出す。

ジェットの振動の影響は、図 5(b) の圧力分布に明確に反映される。図に示した時刻では、エッジ板の上方に正の音圧、下方に負の音圧が発生している。半周期後には、これと逆符号の音圧が発生する。したがって、エッジ板の上下に逆位相で周期的に変動する音場が発生していると考えられる。ただし、エッジ板に沿って流れる渦の中心点近傍は必ず負圧になっている。

図 5(c) に示す渦度分布は、大きな流速を持つジェットやエッジ後方でできるロールアップした渦の近傍で大きな値を持つ。ロールアップした渦では、渦の回転方向により中心付近で正又は負の値を取る。ジェットとエッジの衝突によって正負のペアの渦が発生しエッジ板の上側又は下側に沿って互い違いに規則的に並んでいる様子が見取れる。一方、ジェットの部分では、挿入した拡大図を見ると分かるように、ジェットに沿って、上部が正、下部が負の帯状の分布になる。

Lighthill の渦音源分布を図 5(d) に示す。音源は、渦度分布の大きなところに局在しているのが分かる。音源は、渦の中心点近傍では、渦の回転方向と無関係に負の値を取り、その周辺領域で正の値を取る。したがって、エッジ板の上下に規則的に並んだ音源列を作り出す。一方、拡大図に示すように、ジェットの部分での Lighthill の音源分布は渦度分布と大きく異なり、上下左右に正負の符号が入れ替わる 4 重極的な分布になる。

図 6 に、ジェットの流速を  $V = 10\text{m/s}$  とした時の 3次元モデルの結果を示す。流速

分布、圧力分布、渦度分布および Lighthill の音源分布が、図 5 に示す 2次元のそれらと極めて類似している事が見取れる。これからもエッジトーンの発生のメカニズムの基本的な部分は 2次元モデルを用いて十分に理解可能であることが分かる。

## 6. 結論

この論文では、圧縮性 LES を用いて、2次元及び 3次元エッジトーンの解析を行った。その結果、2次元、3次元の両方で、ジェットの流速と周波数の関係において Brown の半経験的理論式とよい一致を得た。3次元の結果の方がより Brown の式に近い結果が得られたが、2次元モデルでも現実のエッジトーンの基本的なメカニズムを十分に捉えていると言える程度の一致が見られた。また、流速分布、圧力分布、渦度分布においても 2次元と 3次元の結果は極めて似ている。

**謝辞** 本研究は、科学研究費補助金挑戦的萌芽研究 No.20654035 及びサウンド財団の研究支援金の援助を受けている。また、JHPCN 学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点プロジェクトの一環として行われた。

## 参考文献

- [1] G.B. Brown, 'The vortex motion causing edge tones', Proc. Phys. Soc., London XLIX 493-507 (1937).
- [2] D.K.Holger, T.A.Wilson and G.S.Beavers, 'Fluid mechanics of the edgetone', J. Acoust. Soc. Am. 62 1116-1128 (1977).
- [3] D.G.Crighton, 'The jet edge-tone feedback cycle; linear theory for the operating stages', J. Fluid Mech. 234 361-391 (1992).
- [4] M.S. Howe, Acoustics of Fluid-Structure Interactions, (Cambridge Univ. Press, 1998).
- [5] M.S. Howe, 'Contributions to the theory of aero-dynamic sound with application to excess jet noise in the theory of the flute', J. Fluid Mech. 71 625- 673 (1975).
- [6] N.H.Fletcher and T.D.Rossing, 'The Physics of Musical Instruments', 2nd Edition (Springer-Verlag, New York 1998).
- [7] A.Hirschberg, "Aero-acoustics of Wind instruments." in "Mechanics of Musical Instruments," Eds. A.Hirschberg, J.Kergomard and G.Weinreich. (Springer-Verlag, Vienna and New York 1995), pp.291-369.

- [8] K. Takahashi, M. Miyamoto, Y. Ito, T. Takami, T. Kobayashi, A. Nishida and M. Aoyagi, "Numerical analysis on 2D and 3D edge tones in terms of aerodynamic sound theory", Proceeding of ICA2010(CD-ROM), paper no 621, August 23-27, Sydney, Australia.
- [9] M.J. Lighthill, 'On sound generated aerodynamically. Part I: General theory', Proc. Roy. Soc. London A211 564-587 (1952).