

Java Applets による 古典力学のシミュレーションとその可視化

泉 本 利 章^{†1} 色 川 由 季^{†1}

私達は、理工系学部の物理教育において大切な古典力学の例題 2 つを取りあげ、シミュレーションとその可視化をおこなった。まず、2 体中心力場における惑星の軌道を記述する Applets を作成し、Runge-Kutta 法やシンプレクティック積分法などの数値計算法を適用し、厳密解と比較してその近似の妥当性を検討した。次に、太陽周りを公転する惑星地球に月を加えた 3 体問題を記述する Applet を作成し、シンプレクティック 6 次積分を適用してそれら 3 体の軌道運動を求めた。3 体の中でも月の運動に焦点を当てて、月の公転の人為的逆転や月の遠ざかり問題を、双方向性を持たせた数値シミュレーションとして取り上げた。これらの可視化された Web ページ上のシミュレーションは学生達の自発的学習を支援する効果があると期待される。

Visual Simulation of Classical Mechanics in terms of Java Applets

TOSHIAKI IZUMOTO ^{†1} and YUKI IROKAWA ^{†1}

In this paper, some Java applets are made of the visual simulation of the classical mechanics. The orbit of the Kepler motion is first visualized by numerically integrating the differential equation of the 2-body central force problem. The magnitudes of numerical errors are evaluated of the Euler, the Runge-Kutta and the Symplectic integration methods by comparing the numerical results of the orbit and the constants of motion with the exact solution.

A visual 3-body simulation is then performed of the earth and the moon in the solar system by making use of the Symplectic 6th integration method, where the constants of motion are carefully observed. The virtual problems are discussed, for example, of the moon spiraling away. The visual simulation may facilitate learning in a virtual class.

1. はじめに

理工系学部の物理基礎教育において、教科書による自習を行う場合はもちろん講義の場合にも、取り扱う物理現象の可視化やアニメーションが有効であると期待される。実際このことを意識して、Java Graphics¹⁾ の機能を利用した取り組み²⁾⁻⁶⁾ もいくつか行われている。私達は、この論文で、古典力学や解析力学の題材として、中心星周りの惑星とその衛星の軌道運動を取り上げて、複数の数値計算法に基づいたシミュレーションを Java Applets に組み込み可視化をおこなう。また、重力が働く質点系として 3 体問題を取り上げて、軌道運動のシミュレーションを行う。

第 2 章の前半では、太陽を中心星とする惑星地球の公転運動 (Kepler 運動) を取り上げて、運動方程式と厳密解について整理するとともに、いくつかの代表的な数値解法による軌道計算の精度について検討を行う。グラフィックスを用いた可視化^{4),5)} や、大学物理学演習の課題⁷⁾⁻¹⁰⁾ でもこの問題が取り扱われている。Newton の運動方程式を、Euler 法、Runge-Kutta 法 (RK) 4 次までと並行して、古典力学の正準形式に基づく Symplectic 4 次積分法 (SI)¹⁰⁾⁻¹²⁾ までを行った、この Kepler 運動では、時間の関数として軌道を求めるとともに、系の角運動量・全エネルギー保存則が数値的に許容できる誤差の範囲内に収まっているのか調べた。

第 2 章後半では、さらに中心星太陽とその周りを公転する惑星地球と、その衛星月の軌道運動の 3 体問題を取りあげた。この課題については、ベルレ法 (Velocity-Verlet) を採用した太陽系の軌道シミュレーション⁵⁾ や RK 法の 2 次近似のプログラム例¹³⁾ の報告がある。ここでは、太陽と地球と月の運動を、質点系の 3 体問題として、古典力学の正準形式に基づく Symplectic 6 次積分法^{10),11)} に基づいて、計算精度に注意を払いながら求める。これら 3 体シミュレーションにおける軌道運動は、太陽を中心とする地球の公転面 (黄道面) の上から眺めることにする。さらに、次のような 2 つの仮想的設定におけるシミュレーションを行った:(1) 月の地球まわりの公転を、人為的に現在と逆向きにした場合、どのように見えるのが調べる (2) 仮想的に、地球と月の相対運動に、緩やかにエネルギーを付加してゆくことにより、「月の遠ざかり」現象^{14),15)} を、太陽系の 3 体問題としてシミュレーションを行った。月が地球の束縛状態から脱出して自由になるのかなども調べることができる。

^{†1} 立教大学理学部物理学科
Department of Physics, Rikkyo University

第3章では、前章の枠組みに沿った Applets を制作して、各種のシミュレーションを行った結果について報告する。簡単なまとめを、最後の章でおこなった。

2. 惑星運動の数値シミュレーション

2.1 1体問題の Hamiltonian と運動方程式

まず、固定した中心の周りを回る惑星（質量 m ）の運動を1体問題として取り扱う。中心力ポテンシャルを $U(q)$ とすると、系のハミルトニアンとハミルトン方程式は、次のように表される。

$$H = K + U(q) = \mathbf{p}^2/2m + U(q), U(q) = -k/|\mathbf{q}| \quad (1)$$

$$\begin{cases} d\mathbf{p}/dt = \{\mathbf{p}, H\} = -\partial H/\partial \mathbf{q}, \\ d\mathbf{q}/dt = \{\mathbf{q}, H\} = \partial H/\partial \mathbf{p} \end{cases} \quad (2)$$

ここに、 $\{\mathbf{p}, H\}, \{\mathbf{q}, H\}$ は、Poisson 括弧式である。次の関係式：

$$\begin{cases} \{\mathbf{p}, K\} = 0, & \{\mathbf{p}, U\} = -\partial U/\partial \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \\ \{\mathbf{q}, K\} = \mathbf{p}/m, & \{\mathbf{q}, U\} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

を用いて、運動方程式を整理すると

$$\begin{cases} d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = -k\mathbf{q}/|\mathbf{q}|^3, \\ d\mathbf{q}/dt = \mathbf{p}/m \end{cases} \quad (4)$$

となる。また、系のエネルギー E と角運動量 \mathbf{M} は、次のように表される：

$$E = \mathbf{p}^2/2m - k/|\mathbf{q}|, \quad \mathbf{M} = [\mathbf{q} \times \mathbf{p}]. \quad (5)$$

これらの時間微分の計算に (4) 式を用いると

$$dE/dt = 0, \quad d\mathbf{M}/dt = 0 \quad (6)$$

つまり、これらは運動の保存量であることが分かる。次章以下で採用する種々の数値積分法の計算精度（妥当性）を計る目安としてこの保存量に着目する。

また、重力のような逆二乗則の力が働き質点の運動が周期的になっている場合、ビリアル定理（the virial theorem）は、次の形をとる：

$$\bar{K} = -\bar{U}/2. \quad (7)$$

ここに、 \bar{K}, \bar{U} は、 K, U の時間平均値を表す。また、系のエネルギーの時間平均は、

$$\bar{E} = \bar{U}/2 \quad (8)$$

となる。特に、円軌道の場合は、 K, U, E は時間によらない一定値となる。

Newton の運動方程式は (4) 式から \mathbf{p} を消去することによって得られる：

$$m d^2 \mathbf{q}/dt^2 = -k\mathbf{q}/|\mathbf{q}|^3 \quad (9)$$

太陽（質量 m_1 ）の周りを地球（質量 m_2 ）が回る2体問題を取り扱う時は、先の m を換算質量 $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ と読み換えて、さらに $k = G m_1 m_2$ と置けば、(1) 式～(9) 式は、そのまま生きる。（ G は万有引力定数）また、運動の軌道の議論には、平面極座標系 $(r, \theta), (p_r, p_\theta)$ を用いると見通しが良い。エネルギー保存の式に、角運動量保存をあてはめ、さらに時間で積分すると、運動の軌道は次のように表すことができる¹⁶⁾。

$$r = C / \{1 + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)\}. \quad (10)$$

上の式において、半直弦 C と離心率 ϵ は、次式で与えられる：

$$C = \ell^2 / mk, \quad \epsilon = \sqrt{1 + 2E\ell^2 / mk^2}. \quad (11)$$

ここに出てくる E と ℓ は、それぞれ系のエネルギーの値と角運動量の値に等しい。

ここで、地球の公転半径を $R = 1$ 、換算質量を $m \approx m_2 = 1$ 、公転周期を $T = 1$ とする天文単位系（表 1～3）を採用する。 $t = 0$ の初期条件として、位置 $(r, \theta) = (1, 0)$ および速度 $dr/dt = 0, r(d\theta/dt) = R\Omega = v_0$ (Ω は公転の角速度) を設定すると、

$$C = v_0^2 / (2\pi)^2, \quad \epsilon = |1 - v_0^2 / (2\pi)^2| \quad (12)$$

となる。軌道の式を整理すると、次のように書ける：

$$r = v_0^2 / [(2\pi)^2 + \{v_0^2 - (2\pi)^2\} \cos \theta] \quad (13)$$

この軌道のパターンは、初速度 v_0 の大きさにより変化する：

- $v_0 < 2\sqrt{2}\pi$ のとき、 $E = v_0^2/2 - (2\pi)^2 < 0$ となり、楕円軌道を描く、（特に、 $v_0 = 2\pi$ の時は、円軌道）を描く、
- $v_0 = 2\sqrt{2}\pi$ のとき、 $E = v_0^2/2 - (2\pi)^2 = 0$ となり、放物線軌道を描く、
- $v_0 > 2\sqrt{2}\pi$ のとき、 $E = v_0^2/2 - (2\pi)^2 > 0$ となり、双曲線軌道を描く。楕円軌道の半軸長 a, b は、

$$a = C / (1 - \epsilon^2) = -k/2E = 1 / \{2 - v_0^2 / (2\pi)^2\} \quad (14)$$

$$b = a \sqrt{1 - \epsilon^2} = \sqrt{-\ell^2 / 2\mu E} = 1 / \sqrt{2(2\pi)^2 / v_0^2 - 1} \quad (15)$$

と求められる。また、面積速度は、 $\ell/2m$ であり、楕円の面積は、 πab であるから、軌道を1周する時間 T は、次のように求められる：

$$T = 2\pi ab/(\ell/m) = \sqrt{4\pi^2 a^3/GM} = 1/\{2 - v_0^2/(2\pi)^2\}^{3/2} \quad (16)$$

2.2 3体問題の Hamiltonian と運動方程式

太陽, 惑星, その衛星を3体系としてとらえ, それらの質量, 座標, 運動量を $m_i, \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$ ($i = 1, 2, 3$) とするとすると, その系のハミルトニアンと角運動量は,

$$H = K + U = \sum_i \mathbf{p}_i^2/2m_i - \sum_{i<j} Gm_i m_j/|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|, \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \sum_i [\mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i] \quad (18)$$

と書ける. この多体系の運動方程式は,

$$\begin{cases} d\mathbf{p}_i/dt = -\partial H/\partial \mathbf{q}_i, \\ d\mathbf{q}_i/dt = \partial H/\partial \mathbf{p}_i, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (19)$$

と表される. これから先の取り扱いは, 1体問題の場合と同様に行うことができる.

ここで関心があるのは, 太陽の位置座標 \mathbf{q}_1 から見た地球と月の座標 $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ の軌道運動である. それらの位置座標 $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ と運動量 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ を重心・相対系の位置座標 $\{\mathbf{R}_G, \mathbf{R}, \mathbf{r}\}$ と運動量 $\{\mathbf{P}_G, \mathbf{P}, \mathbf{p}\}$ で表すと:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = \mathbf{R}_G - (m_2 + m_3)\mathbf{R}/M_G, \\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{R}_G + m_1\mathbf{R}/M_G - m_3\mathbf{r}/(m_2 + m_3), \\ \mathbf{q}_3 = \mathbf{R}_G + m_1\mathbf{R}/M_G + m_2\mathbf{r}/(m_2 + m_3), \\ \mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{P}_G/M_G - \mathbf{P}, \\ \mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{P}_G/M_G + m_2\mathbf{P}/(m_2 + m_3) - \mathbf{p}, \\ \mathbf{p}_3 = m_3\mathbf{P}_G/M_G + m_3\mathbf{P}/(m_2 + m_3) + \mathbf{p}. \end{cases} \quad (20)$$

Hamiltonian と角運動量は, 重心・相対座標を用いて次のように表せる:

$$H = \mathbf{P}_G^2/2M_G + \mathbf{P}^2/2m + \mathbf{p}^2/2\mu - \{Gm_1m_2/|\mathbf{R} - m_3\mathbf{r}/(m_2 + m_3)| + Gm_1m_3/|\mathbf{R} - m_2\mathbf{r}/(m_2 + m_3)| + Gm_2m_3/|\mathbf{r}|\}, \quad (21)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{R}_G \times \mathbf{P}_G] + [\mathbf{R} \times \mathbf{P}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \quad (22)$$

ここで,

$$M_G = m_1 + m_2 + m_3, \quad m = m_1(m_2 + m_3)/M_G, \quad \mu = m_2m_3/(m_2 + m_3) \quad (23)$$

また, 3個の質点系における重心運動を除外したエネルギー \tilde{E} の値と角運動量 $|\tilde{\mathbf{M}}|$:

$$\tilde{E} = E - P^2/2M_G, \quad |\tilde{\mathbf{M}}| = |\mathbf{M} - [\mathbf{R}_G \times \mathbf{P}_G]| \quad (24)$$

の値は, 計算計算においても運動の保存量として一定値にならなければならない. 今回は, その一定値からのずれの程度を, 数値計算の妥当性 (あるいは精度) のチェックとして用いることにする.

ここで, $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{R}|$ および $m_2, m_3 \ll m_1$ の場合に, 上の重心を含むハミルトニアン (21) 式から求められる Newton の運動方程式は, そこに含まれる重力項を微小量 $|\mathbf{r}|$ の1次までで展開すると次のように書き表すことができる:

$$\begin{cases} M_G d^2\mathbf{R}_G/dt^2 = 0, \\ m d^2\mathbf{R}/dt^2 \approx -Gm_1(m_2 + m_3)\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^3, \\ \mu d^2\mathbf{r}/dt^2 \approx -Gm_2m_3\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 \\ \quad + Gm_1m_2m_3/(m_2 + m_3)\{3(\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^2 - \mathbf{r}\}/|\mathbf{R}|^3 \end{cases} \quad (25)$$

注目すべきは, この \mathbf{r} に関する方程式の右辺第2項に, \mathbf{R} との結合項が表れていることである. もちろん月が地球の重力で強く束縛されているときは, この結合項は, 第1項に比べて無視できるので, 月と地球の重心運動と相対運動は独立に取り扱うことができる. なお, 第3章の Java Applets による数値計算では, この微小近似は一切用いないで, 3体問題を解いている.

数値積分の初期条件として, 位置と運動量は,

$$\mathbf{R}_G = (0, 0, 0), \quad \mathbf{R} = (R, 0, 0), \quad \mathbf{r} = (r \cos \theta, 0, r \sin \theta), \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_G = (0, 0, 0), \quad \mathbf{P} = (0, mR\Omega, 0), \quad \mathbf{p} = (\mu r \omega \cos \theta, 0, \mu r \omega \sin \theta). \quad (27)$$

とした. 質量 M_G, m, μ , 半径 R, r および角速度 Ω, ω については, 表1~3を参照のこと. これらの座標と運動量の値を上記の(20)式に代入して, 太陽と地球と月という3つの星の位置 $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ と運動量 $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ の初期値として数値計算をスタートさせる. ここで, 地球の公転平面と月の公転平面がなす角, 軌道傾斜角 $\theta = 5.15$ 度を導入している.

2.3 数値計算法

2.3.1 Euler 法と Runge-Kutta 法

一般化座標 \mathbf{p}, \mathbf{q} をまとめて, $\mathbf{z} = \{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ と表すと, 先の運動方程式 (4) は, 次のような時刻 t に関する1階微分方程式の形をしていることが分かる. 時間微分 dz/dt を $\dot{\mathbf{z}}$ と表すと:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}) \quad (28)$$

表 1 太陽, 地球, 月の質量と質量比
Table 1 Masses and mass ratios of stars

星	記号	質量	質量比
太陽	m_1	1.9891×10^{30} kg	333,400
地球	m_2	5.974×10^{24} kg	1.
月	m_3	7.34767×10^{22} kg	0.0123000

表 2 公転半径
Table 2 Average distances of two stars

2つの星	記号	公転半径	長さの比
地球-太陽	R	1.496×10^8 km	1.
月-地球	r	3.844×10^5 km	0.0025696

まず, Euler 法についてまとめる. この右辺の微分を, 時刻 $t_n = n\Delta t$ に対して Taylor 級数展開による前進差分で置き換えると,

$$\mathbf{z}_{n+1} \approx \mathbf{z}_n + \Delta t \mathbf{g}(t_n, \mathbf{z}_n) \quad (29)$$

が得られる. Euler 法は Δt の 1 次までの精度である.

Runge-Kutta 法の場合は, Δt の 2 次までの精度がある表現として,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + \mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_1 &= \Delta t \mathbf{g}(t_n, \mathbf{z}_n), \quad \mathbf{k}_2 = \Delta t \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{z}_n + \mathbf{k}_1/2) \end{aligned} \quad (30)$$

これは, 2 次精度の中点差分法の 1 種であるが, 今回の Kepler 運動など, 周期的な振動系の記述においてエネルギー保存則からの破れが, 時間の経過とともに, 大きくなることが知られている.

また, Δt の 4 次までの精度がある表現として,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6, \\ \mathbf{k}_1 &= \Delta t \mathbf{g}(t_n, \mathbf{z}_n), \quad \mathbf{k}_2 = \Delta t \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{z}_n + \mathbf{k}_1/2), \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \mathbf{g}(t_n + \Delta t/2, \mathbf{z}_n + \mathbf{k}_2/2), \quad \mathbf{k}_4 = \Delta t \mathbf{g}(t_n + \Delta t, \mathbf{z}_n + \mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる.

2.3.2 Symplectic 積分法

一般化座標を $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ として, ハミルトン方程式は

$$\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, H\} \quad (32)$$

と表現することができる. ここに, $\{\mathbf{z}, H\}$ は Poisson 括弧である.

ハミルトニアン $H = K(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q})$ に対応する線形作用素 D_H を

表 3 公転の角速度 (地球の公転周期 T)
Table 3 Angular velocities of bounded motion

星	記号	公転角速度	角速度比
地球	Ω	$2\pi[T^{-1}]$	1.
月	ω	$2\pi/(27.32/365.24)[T^{-1}]$	≈ 13.369

$$D_H = \{\mathbf{z}, H\} \quad (33)$$

で定義すると, ハミルトン方程式の形式解は

$$\mathbf{z}(\Delta t) = \exp[\Delta t D_H] \mathbf{z}(0) \quad (34)$$

$$D_H = \{\mathbf{z}, K\} + \{\mathbf{z}, U\} = D_K + D_U \quad (35)$$

が成立するので,

$$\mathbf{z}(\Delta t) = \exp[\Delta t(D_K + D_U)] \mathbf{z}(0) \quad (36)$$

となる. 以下に, 6 次迄の Symplectic 数値積分法^{10),11)} をまとめておく:

- Symplectic 1 次積分法, これは $O(\Delta t^2)$ の近似
 $\exp[\Delta t(D_K + D_U)] \approx \exp[\Delta t D_K] \exp[\Delta t D_U] + O(\Delta t^2)$ (37)

- Symplectic 2 次積分法, これは $O(\Delta t^3)$ の近似
 $\exp[\Delta t(D_K + D_U)] \approx \exp[(\Delta t/2)D_K] \exp[\Delta t D_U] \exp[(\Delta t/2)D_K]$ (38)

- Symplectic 4 次積分法, これは $O(\Delta t^4)$ の近似
 $\exp[\Delta t(D_K + D_U)] \approx L_2[s_1(D_K + D_U)] L_2[s_2(D_K + D_U)] L_2[s_1(D_K + D_U)]$ (39)

ここで,

$$L_2[A + B] = \exp[(1/2)A] \exp[B] \exp[(1/2)A]$$

$$s_1 = 1/(2 - 2^{1/3}), s_2 = 1 - 2s_1$$

- Symplectic 6 次積分法, これは $O(\Delta t^6)$ の近似
 $\exp[\Delta t(D_K + D_U)] \approx L_4[s_3(D_K + D_U)] L_4[s_4(D_K + D_U)] L_4[s_3(D_K + D_U)]$ (40)

ここで,

$$L_4[A + B] = L_2[s_1(A + B)] L_2[s_2(A + B)] L_2[s_1(A + B)]$$

$$s_3 = 1/(2 - 2^{1/5}), s_4 = 1 - 2s_3$$

ここで, 一般にしばしば使われているベルレ法⁵⁾ (Velocity Verlet) について述べておくと,

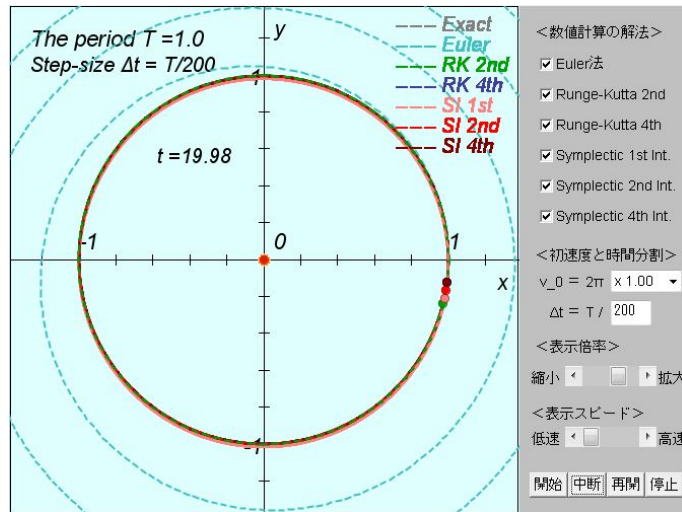


図 1 種々の数値計算法による地球の運動軌跡. ここでは, 初期位置 $r_0 = 1$, 初速度 $v_0 = 2\pi$ を選択したので, 厳密解は離心率 $\epsilon = 0$ の円運動である. Euler 法の結果のずれが顕著である. 公転周期は 1 年となる.
Fig.1 Orbits of the Earth, calculated by using numerical integration methods for the initial values of $r_0 = 1$ and $v_0 = 2\pi$. A circle is the exact solution in this case.

これは, 2 次精度の積分法として用いられる中点差分法の 1 つであり, 上記の Symplectic 2 次積分法とほぼ同等なものである. 計算が安定しているので, ゲームの記述などにも用いられている. しかし, 2 つの物体が近距離に接近して重力加速度が大きくなる場合などでは, 計算精度が極端に落ちることがあるので, より高次の積分法を用いるなど計算精度を保つための工夫が必要である.

3. Java Applets による惑星運動のシミュレーション

3.1 1 体問題の Java Applet

ここでは, 太陽系の惑星である地球の公転運動 (Kepler 運動) を取り上げて, 1 体問題としての種々の数値解法に基づくシミュレーションの可視化を行う Applet を制作した. シミュレーションにおいては, 表 1 ~ 3 を参照にして, 太陽と地球の平均距離 $|r|$ を 1 に, 地球の (換算) 質量を m を 1 に, 公転の周期を 1 におく天文単位系を採用した. その結果, 第 2.1 章 (9) 式の k の値は, $(2\pi)^2$ となる.

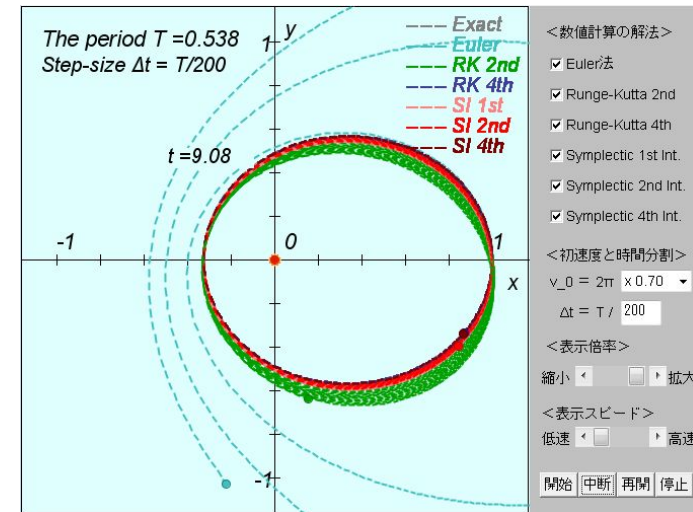


図 2 種々の数値計算法による地球の楕円運動の軌跡. 初期位置 $r_0 = 1$, 初速度 $v_0 = 2\pi \times 0.70$ を仮定したので, 厳密解は離心率 $\epsilon = 0.51$ の楕円である. 公転周期は 0.538 年となる. Euler 法および Runge-Kutta 法 2 次近似のずれが, 時間の経過とともに特に増大している.
Fig.2 Orbits of the Earth, calculated by using numerical integration methods for the case of the initial values of $r_0 = 1$ and $v_0 = (2\pi) \times 0.70$. An ellipse with the eccentricity $\epsilon = 0.51$ is the exact solution in this case.

Applet の数値計算法は, 選択メニュー: Euler 法, Runge-Kutta 法 (RK) の 2 次近似, および 4 次近似 と並行して, 古典力学の正準形式に基づく Symplectic 1 次, 2 次および 4 次積分法 (SI 法) から選択できる. これらの方法では, 時間刻み Δt による展開として, Newton の運動方程式あるいは正準方程式の解を数値的に求めていく. シミュレーションでは (i) 初期位置は r_0 に固定した上で, 初速度 v_0 の設定と (ii) 時間刻み Δt の設定を行った後で, 計算がスタートする. この Δt の大きさをより小さな値に設定すれば, 計算精度は改善するが, 必要な計算時間はそれに比例して増大する. つまり, 計算精度と計算時間はトレードオフの関係にある.

図 1 および図 2 に示されるのは, 時間の経過に従う各種計算法からの地球の公転軌道の予言で, 厳密解の楕円軌道方程式, (13) 式, と比較される. また, さきの目視による軌道運動の比較に加えて, 図 3 および図 4 では, この Kepler 運動の系の角運動量・全エネルギー保存則 (6) 式からの数値的破れが無い, 有るとすればどの程度なのかを, 各種数値計算

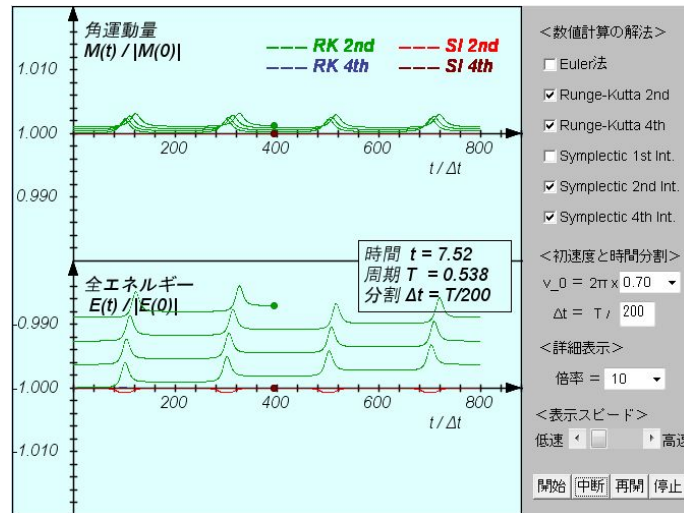


図3 Runge-Kutta 2次近似 (RK2nd) と Symplectic 2次積分 (SI2nd) の場合の角運動量とエネルギーの保存則からのずれの大きさの時間依存性。初期位置 $r_0 = 1$ 、初速度 $v_0 = 2\pi \times 0.70$ を仮定している。RK2nd における値のずれが、時間の経過とともに特に増大していることが分かる。
Fig.3 Time variation of the energy and the angular momentum, which are calculated with the 2nd-order RK (RK2nd) and the SI2nd methods for the initial values of $r_0 = 1$ and $v_0 = (2\pi) \times 0.70$. Note that the numerical deviation in the case of the RK2nd method grows monotonically as time elapses.

法の精度評価の目安として採用した。

図1, 図2に, 例として, 初期位置 $r_0 = 1$, 初速度 $v_0 = 2\pi$ および $2\pi \times 0.70$ 仮定した場合 (楕円軌道の離心率は, それぞれ $\epsilon = 0.0$ および 0.51) の計算結果を示している。どちらも時間刻み $\Delta t = T/200$, (T は公転周期) を仮定した。これらを眺めてみると, なかでも Euler 法による計算結果が大きく厳密解から大きなずれを示している。この理由を調べてみると, Euler 法では前進微分 (29) 式を採用しているが, 2次精度の Runge-Kutta 法2次近似 (RK2nd) (30) 式や Symplectic 2次積分法 (SI2nd) (38) 式では中点差分が採用されていることがわかる。しかし, 図2の結果を詳細にみると, Euler 法以外に RK2nd 法や SI2nd 法の軌道も, 厳密解の楕円軌道 (離心率は $\epsilon = 0.51$) からのずれが時間とともにゆっくりと増大している。

また, 図3には, 初期位置 $r_0 = 1$, 初速度 $v_0 = 2\pi \times 0.70$ 仮定した場合 (楕円軌道の離心

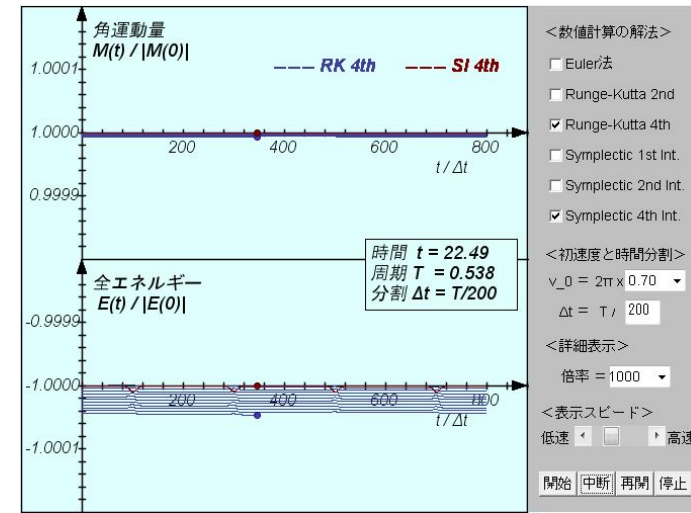


図4 Runge-Kutta 4次近似 (RK4th) と Symplectic 4次積分 (SI4th) の場合の角運動量とエネルギーの保存則からのずれの大きさの時間依存性。初期位置 $r_0 = 1$ 、初速度 $v_0 = 2\pi \times 0.70$ を仮定している。運動の保存量からのずれが, RK4th の計算において, 時間の経過とともに単調に成長している。ここで, 縦軸の目盛が図3より100倍細かいことに注意する。
Fig.4 Time variation of numerical deviations from the constants of motion, which are predicted with the 4th-order Runge-Kutta(RK) and the Symplectic Integrator(SI) methods for the initial values of $r_0 = 1$ and $v_0 = (2\pi) \times 0.70$. In the case of the RK4th method, the numerical deviation grows monotonically as time elapses. Note that the scale of the vertical axis is magnified by a factor of 100.

率は $\epsilon = 0.51$) の物理保存量のずれに関する計算結果を数値積分の2次および4次近似の場合に示している。図2の軌道計算例と同様に, RK2nd 法では, 物理保存量が長時間経過すると既知の一定値からはずれて行くが, SI2nd 法では, 物理保存量のずれはあるが拡大はしていない。残る RK4th と SI4th の結果については, 一定値の近傍に止まっているようである。今回取り上げた問題のような周期的な振動系への RK2nd 法の適用は好ましくないといえるようである。図4では, 縦軸を拡大して RK4th 法と SI4th 法の, 物理保存量のずれに関する計算結果を詳細に見ることができるようにしているが, RK4th 法では先の物理保存量が長時間経過すると既知の一定値からずれて行くことが見える。一方, SI4th 法では物理保存量のずれが拡大していないことと, 先の図2における軌道計算でも厳密解からのずれが微小であることから, 数値計算法として優れていることが分かる。

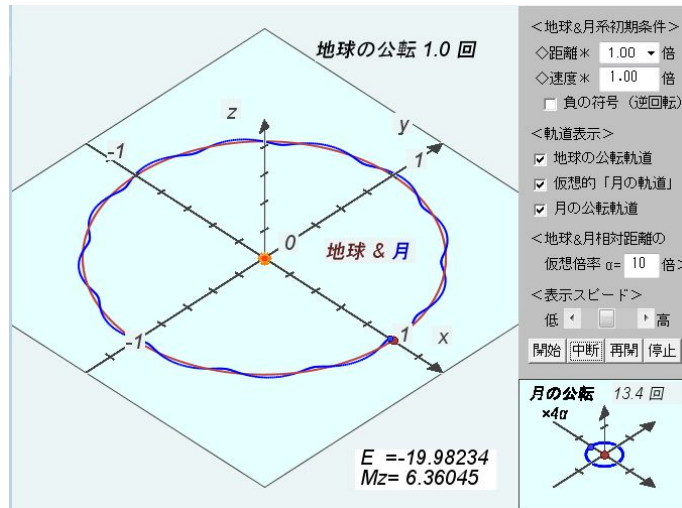


図 5 太陽の周りを公転する地球とその衛星である月の軸測投影法による軌道図。マウス操作により軸測軸のなす角は任意に変えられる。ここでは数値計算の描画の際に、重心運動 R はそのままにし、相対運動 r へのみ仮想表示倍率 α 倍 (囲み図の中では 4α 倍) を設定していることに注意する。

Fig. 5 The binary system of the earth and the moon moving around the sun. Note that the relative distance between the earth and the moon is apparently multiplied by α (, and 4α within an inset) after the numerical integration.

3.2 Java Applet による 3 体問題のシミュレーション

次に、地球の衛星である月を加えて、太陽と地球と月の運動を 3 体問題として取り扱う Applet を作成した。これを用いて、古典力学の正準形式に基づく Symplectic 6 次積分法を採用したシミュレーションを行う。特に、太陽の重力の影響下での月の地球まわりの公転運動に着目して議論を進める。数値計算には、表 1 ~ 3 の物理定数の値と第 2.2 章で示した運動の初期値を用いた。なお、グラフィックスとしては、3 次元の天体軌道図を軸測投影法¹⁷⁾を採用して、2 次元平面に投影したものを描画している。また、マウス操作により軸測軸のなす角度を任意に変えることができる。

これまで高校生や大学入門者向け教育用に、RK 法 2 次近似のプログラム例の報告¹³⁾ や第 2.3 章で紹介した Symplectic 2 次積分法とほぼ同等な Velocity Verlet アルゴリズムによる太陽系のシミュレーションの報告例⁵⁾ がある。これらは、Kepler 運動のシミュレーション例でみたとおり、精度が悪化する場合がある。3 体問題の数値シミュレーションとして、計

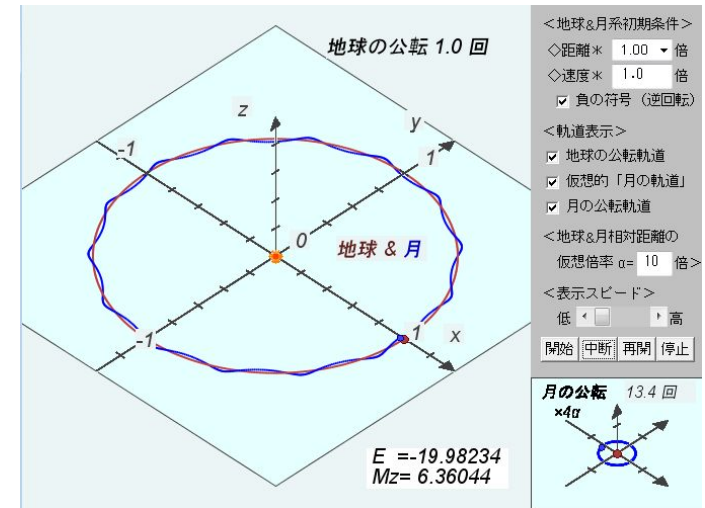


図 6 太陽の周りを回る地球と月の軸測投影法による軌道図。月の公転方向を逆向きに設定している。この図の描画に、先の図と同様に、相対運動 r へのみ仮想表示倍率 α 倍 (囲み図の中では 4α 倍) を設定している。

Fig. 6 The binary system of the earth and the moon which is set to circle in the opposite direction, is traveling around the sun. Note that relative the distance between the earth and the moon is apparently multiplied by α (, and 4α within an inset) in the drawing.

算を精度よく行うために、これまでより高次の Symplectic 6 次積分法を採用し、同時に、積分の時間刻み Δt を十分小さくとった。また、このとき 3 体系の内部エネルギー $|\tilde{E}|$ と角運動量 $|\tilde{M}|$ (24) 式の値の保存は確認されている。

まず、図 5 では、太陽の周りを、地球と月が引き合い束縛状態として離散することなく公転する様子が再現されているのが確認できる。月の軌道が、地球の軌道の周りに大きな凹凸模様を見せているように見えるが、これは、月と地球と重心ベクトル R はそのままに、その相対ベクトル r に仮想表示倍率 $\alpha = 10$ 倍 (囲み図の中では $\times 4\alpha = 40$ 倍) をかけて図示しているからである。市販の図書^{13),15)} の模式的な描画法を今回も採用している。アニメーションなしの印刷された図のみからだと読者に誤ったイメージを与えてしまうかも知れない。地球と月の重心は地球内部にあり、Applet 上でこの仮想表示倍率 $\alpha \rightarrow 1$ とすれば容易にわかるように、月の太陽周りの軌道は、12 角形か 13 角形かというより、地球の軌道とほぼ重なっているのである。

さらに、以下のような 2 つのシミュレーションと考察を行った：

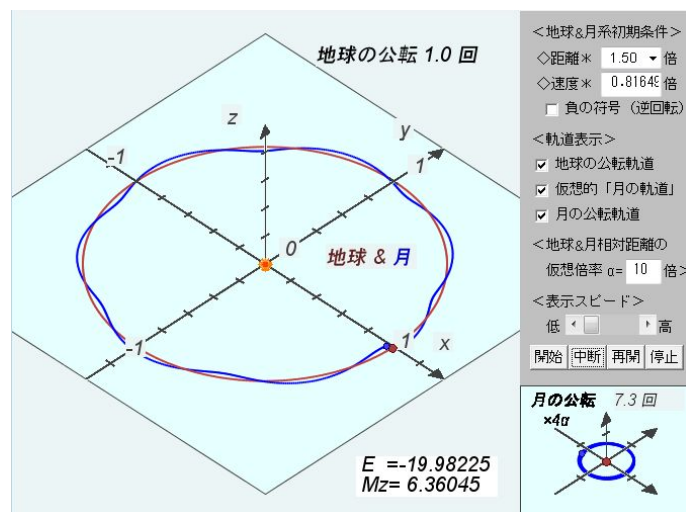


図 7 太陽の周りを公転する地球と月の軸測投影法による軌道図．数値積分において月の公転運動の半径 r の初期値を 1.50 倍に、またその初速度 v を $1/\sqrt{1.5}$ 倍に変更していることに注意する．この図の描画に、先の図と同様に、相対運動 r へのみ仮想表示倍率 α 倍（囲み図の中では 4α 倍）を設定している．

Fig. 7 The binary system of the earth and the moon moving around the sun. Note that the relative distance between the earth and the moon is apparently multiplied by α (, and 4α within an inset) after the numerical integration.

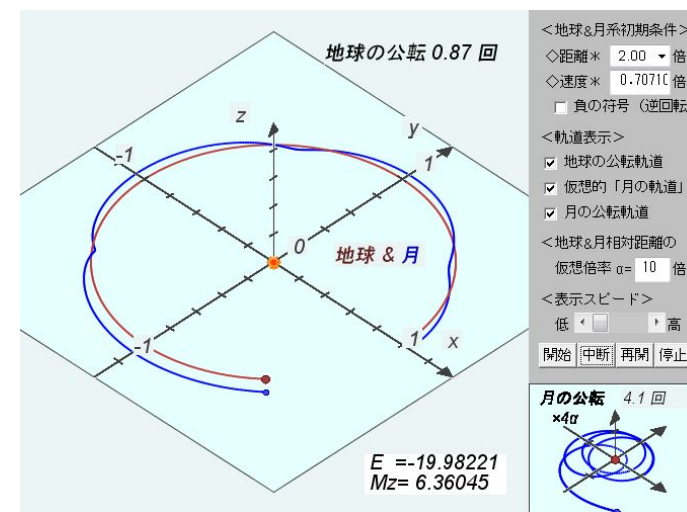


図 8 太陽の周りを公転する地球と月の軸測投影法による軌道図．数値積分において月の公転運動の半径 r の初期値を 2.0 倍に、またその初速度 v を $1/\sqrt{2.0}$ 倍に設定している．この図の描画に、先の図と同様に、相対運動 r へのみ仮想表示倍率 α 倍（囲み図の中では 4α 倍）を設定している．

Fig. 8 The binary system of the earth and the moon is moving around the sun. Note that the relative distance between the earth and the moon is apparently multiplied by α (, and 4α within an inset) after the numerical integration.

(1) 月の地球まわりの公転を、人為的に現在の向きから逆転（初期位置を変えず、初速度を逆向きに）させた時の 3 体系の運動を、図 6 のように問題なく記述できた．太陽と地球の間を月が 1 年間に横切る回数が、逆方向にすると現況の順方向よりもプラス 2 回となることがビジュアルに確認できる．これは、19 世紀後半のフランスの小説「80 日間世界 1 周」¹⁸⁾ を思い起こさせる．世界 1 周旅行に挑んだ英国の資産家が 80 日間という制限時間内に世界一周をすることが可能かどうかの結末に「東周りなのか西周りなのか」が絡んでくる、つまり日付変更線をどちら周りで横断するかによって ± 1 日の差が出るというものである．

(2) 仮想的に、地球と月の系に、周期運動を壊さないようにエネルギーを付加してゆくことにより、「月の遠ざかり」現象^{14),15)}（1 年間に 3.8cm）による軌道の変化を、太陽系の 3 次元アニメーションとして可視化した．図 7 および図 8 参照．具体的には、月と地球の相対運動の初期値を $0 < (1 + \beta)$ の範囲で

$$|\mathbf{r}| \rightarrow (1 + \beta)|\mathbf{r}|, \quad |\mathbf{v}| \rightarrow |\mathbf{v}|/\sqrt{1 + \beta} \quad (41)$$

と変化させて、シミュレーションを行った（この設定で、月の公転は、円軌道を維持するはずである。）これに対応して、月と地球の相対角運動量が $\sqrt{1 + \beta}$ 倍に増加する必要があるが、それは月の潮汐力などの相互作用により、地球の自転が遅くなることで補われると考えられている¹⁵⁾。（これは角運動量保存則からの考察である。）月は地球から遠ざかるとともに、月の公転のエネルギーも、周期運動のピリアル定理から、 $1/(1 + \beta)$ 倍に増加する。また、公転周期が $(1 + \beta)^{3/2}$ 倍に長くなるはずである。この「遠ざかり」は、50 億年程度で現在の月と地球の相対距離 r の平均の 1.5 倍程度になる。さらに月の潮汐力などの相互作用が続くかどうかは不明であるが、もし現在の平均距離の 1.8 ~ 2 倍に近づいてゆくと、図 8 に示すシミュレーション結果は、地球の重力が弱まるとともに、太陽重力の影響が大きくなり、月の公転運動は不安定になって地球重力圏からの離脱が起り太陽系の小惑星にな

ることを示している。これは月と地球の相対運動において、束縛状態を引き起こしている地球の引力が弱まり、太陽重力に起因する重心運動との結合項((25)式右辺参照)の大きさが無視できない大きさになることから起こる。

4. ま と め

私達は、理工系基礎教育としても大切な古典力学の例題2つを取り上げた。まず、中心力場における惑星の1体問題(重心を含めて2体問題)に対して、Runge-Kutta法やシンプレクティック積分法などの数値計算法を適用し、厳密解と比較してその精度を検討した。これは、基礎物理入門の演習にもしばしば採用されているが、Euler法の誤差がしばしば大きく増大するので、近似としては粗すぎると云える。そして、Runge-Kutta法2次や4次近似では、時分割 Δt を十分小さく選んでも、時間の経過とともに軌道のずれが発生し、エネルギーや角運動量の値も一定値からはずれて行く。Symplectic4次積分法以上の場合は、こうしたずれは比較的微小範囲に収まる。次に、公転する惑星に衛星を加えた3体問題を取り上げ、これら惑星および惑星・衛星系それぞれの軌道運動を取り扱うJava Appletを作成した。太陽の周りを、地球と月の系が離れることなく公転している様子が、精度よく再現された。また、人為的に月の地球まわりの公転を、現在と逆向きにした場合の3体系の運動も計算精度的に問題なく記述できた。太陽と地球の間を月が1年間に横切る回数が、順方向と逆方向とでは、2回分の差が生じることがビジュアルに確認できた。これらは、地球と月の系の重心運動と相対運動の結合項が小さく、2つの運動モードはほぼ独立であるとも表現することができる。また、仮想的に地球と月の系に、周期運動を壊さないようにエネルギーを付加していった3体問題を解くことにより、「月の遠ざかり」現象による軌道の変化を、3次元アニメーションとして可視化した。遠ざかるとともに、公転周期が長くなる。また、仮に月と地球の相対距離が、現在の平均距離から段々大きくなり1.8倍~2倍に近づくと、月の公転運動は不安定になり、ついには地球との束縛状態から解き放され、太陽系内へ彷徨い出してしまう結果になる。

私達の2体問題と3体問題のJava Appletsを用いたシミュレーションの可視化においては、Appletsを実行させる際に、ユーザが数値解法や初期値、積分のステップサイズを選択することができ、途中で中断/再開させることができる。また、その可視化¹⁹⁾は、Web page上で誰でもいつでも自由に利用できるものになっている。理工系学部の物理教育において、このような教材のアニメーションによる可視化には、学生達の自発的学習を支援する効果があると期待される。

謝辞 議論をしていただいた研究室の北本俊二教授、柳町朋樹准教授ほかの方々に、感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) Oracle Corporation, JavaTM Platform, Standard Edition 6 JDK.
- 2) 安藤高志, 高田壮起, 武田裕太, 津金澤雅人, 畑中涼, 泉本利章: JAVAを用いた物理現象の数値シミュレーションと可視化, 日本物理学会講演概要集(2009)28pYE-3.
- 3) 泉本利章, 畑中涼, 武田裕太, 柳町朋樹: Java Graphicsを用いた光波の干渉実験のシミュレーション, 情報処理学会研究報告 Vol.2009-CE-99, No.2, 1-8, 2009.
- 4) W. Fendt, <http://www.walter-fendt.de/ph14e/>.
- 5) PhET, Interactive Simulations, univ. of Colorado at Boulder, <http://phet.colorado.edu/>.
- 6) 覧具博義: 能動的学習を支援するPheETシミュレーション教材, 大学の物理教育 16(2010)34-37.
- 7) 3年物理実験「計算機」(2010, 立教大学理学部物理学科)
- 8) 計算物理学基礎(2007, 大阪市立大学工学部応用物理学科), <http://www.a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp/terai/comp-phys/comp.pdf>
- 9) 櫻庭中: 地球物理学演習: 時間発展問題の数値解法(2008), <http://www-solid.eps.s.u-tokyo.ac.jp/ataru/edu/ensyu08.pdf>
- 10) 渡辺尚貴: Symplectic 数値積分法 <http://cms.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~naoki/CIPINTRO/SYMP/symp1.html>
- 11) H. Yoshida, "Construction of higher order symplectic integrators", Physics Letters A150(1990) pp.262-268.
- 12) 早川尚男: シミュレーション概論(2008, Kyoto-University Open Courseware) <http://ocw.kyoto-u.ac.jp/faculty-of-integrated-human-studies-jp/introduction-to-simulation>
- 13) 岡田利男, 川田重夫: シミュレーション物理学3 FortranとPascalによる力学(1991, 近代科学社).
- 14) Wikipedia, Lunar distance(astronomy), [http://en.wikipedia.org/wiki/Lunar_distance_\(astronomy\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Lunar_distance_(astronomy))
- 15) 水谷仁: Newton ムック「月世界への旅」(2009, ニュートンプレス).
- 16) H. Goldstein, "Classical Mechanics", (1964, Addison-Wesley Pub. Company).
- 17) 峯村吉泰: Javaによるコンピュータグラフィックス(2003, 森北出版株式会社).
- 18) ジュール・ヴェルヌ/高野優訳: 八十日間世界一周(光文社古典新訳文庫).
- 19) 泉本利章: 物理シミュレーション, <http://www2.rikkyo.ac.jp/web/izumoto/MultimediaWorks.html>