

Taylor 展開を用いた対数美的平面曲線の Bézier 曲線近似

福 田 諒^{†1} 吉 田 典 正^{†1}
齋 藤 敏 雄^{†1} 齋 藤 隆 文^{†2}

対数美的平面曲線は曲率が単調に変化し曲率対数グラフが直線になる曲線である。対数美的平面曲線を自由曲線形式で表現する研究としては、有理 3 次 Bézier 曲線で対数美的平面曲線を近似する手法（疑似対数美的平面曲線）、対数美的曲線を離散化し、離散化された式を用いて曲線上に制御点を配置する手法などが行われている。疑似対数美的平面曲線は、曲線を生成するために、対数美的曲線セグメントを算出してから 2 変数の最適化を行う必要がある。対数美的曲線式の離散化を用いる手法は、曲線の次数を高くしなければ曲率対数グラフが直線にならないという問題を持つ。本研究では、対数美的平面曲線式を Taylor 展開することによって、低次の多項式 Bézier 曲線によって近似する手法を示す。また、生成された曲線に対話的に制御する手法を示す。

An Approximation of Log-Aesthetic Planar Curves by Bézier Curves using the Taylor Expansion

RYO FUKUDA,^{†1} NORIMASA YOSHIDA,^{†1} TOSHIO SAITO^{†1}
and TAKAFUMI SAITO^{†2}

Log-aesthetic planar curves are curves with monotonically varying curvature and linear logarithmic curvature graphs. Currently, there are two methods for representing log-aesthetic planar curves by free-form curves: One is quasi-log-aesthetic curves in rational cubic Bézier forms. The other method places control points on the discretized log aesthetic curves. Quasi-log-aesthetic planar curves need an optimization of two parameters after computing a log-aesthetic planar curves segment. The method of placing control points on discretized log-aesthetic curve has a problem that logarithmic curvature graphs are not linear enough unless the degree of Bézier curves gets higher. We present a method for approximating log-aesthetic planar curves by polynomial Bézier curves using the Taylor expansion. We also present an interactive control method for approximated Bézier curves.

1. はじめに

対数美的平面曲線¹⁾は、曲率が単調に変化し曲率対数グラフ²⁾が直線になる曲線である。本報告では、対数美的平面曲線を自由曲線形式で表現する従来の手法^{3),4)}と異なる第3の手法を提案する。

対数美的平面曲線を自由曲線形式で表現する手法としては、吉田らによる 3 次有理 Bézier 曲線による疑似対数美的平面曲線³⁾と三浦らによる対数美的曲線式を離散化し、離散化した式を用いて対数美的曲線上に制御点を置く手法⁴⁾が提案されている。疑似対数美的平面曲線は、曲線セグメントの曲率半径 ρ が 0 または ∞ の近傍を含む場合を除いて、曲率対数グラフの直線性がほぼ保たれ、質のよい曲線を生成することができる。しかしながら、この手法では、一度対数美的曲線セグメントを生成してから 2 変数のパラメータの最適化を行って 3 次有理 Bézier 曲線を生成するため、やや多くの処理時間を必要とするという問題点を持つ。三浦らの手法では、対数美的曲線を弧長または方向角を一定に離散化し、離散化した曲線上に制御点を配置する。次数を高くすると、近似された曲線は対数美的曲線に近づくが、低次の Bézier 曲線で表現しようとする、離散化した式を用いるため制御点が本来の対数美的曲線上から離れてしまうこと、また生成された曲線は制御点から離れた位置に生成されるという問題点を持つ。よって、曲率対数グラフの傾きが指定したものよりも大きくずれたり、曲率対数グラフの直線性が保たれなくなってしまう場合がある⁵⁾。

本研究では、対数美的平面曲線式を Taylor 展開することによって低次の多項式 Bézier 曲線によって表現する手法を提案する。また、生成された曲線に対話的に制御する手法を示し、多項式 Bézier 曲線で近似する三浦らの手法との比較を行う。

2. 対数美的平面曲線

対数美的平面曲線は、曲線方向角または弧長によって定式化されている。本研究では、方向角により定式化された対数美的曲線を用いる。この理由は、図 1 に示すように弧長による曲線式より方向角による曲線式の方が Taylor 展開をした際 (3 章で述べる) に広い範囲を

^{†1} 日本大学
Nihon University

^{†2} 東京農工大学
Tokyo University of Agriculture and Technology

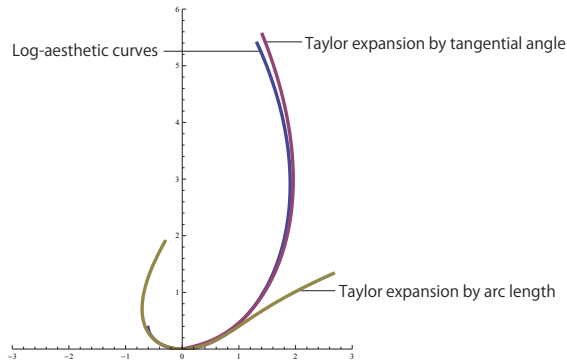


図 1 方向角と弧長の曲線式に Taylor 展開を行った際の曲線の違い ($\alpha = 1$)

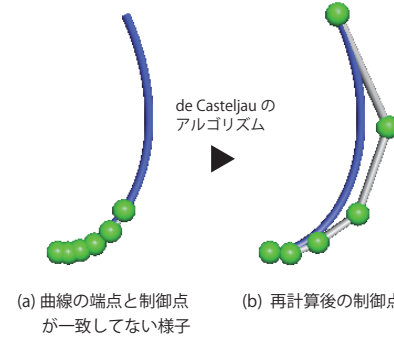


図 2 制御点の再計算

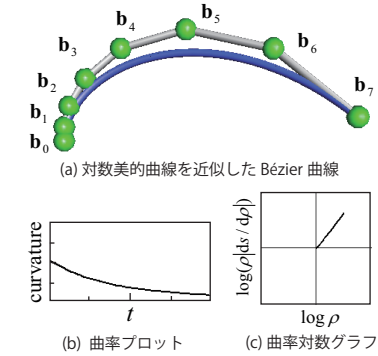


図 3 対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線

近似できるためである。

i を虚数単位, 曲率対数グラフにおける直線の傾きを α , 曲線方向角を θ とすると, 対数美的曲線は複素平面上で, 次式によって表わされる。

$$F(\theta) = \begin{cases} \int_0^\theta e^{(\Lambda+i)\varphi} d\varphi & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^\theta ((\alpha-1)\Lambda\varphi + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{i\varphi} d\varphi & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$\Lambda(>0)$ は, $\alpha = 1$ の場合には曲線形状を変更するパラメータであり, $\alpha \neq 1$ の場合は曲線を相似変換させるパラメータである。なお, 方向角 θ は α および Λ の値に依存して上限または下限が存在する場合がある¹⁾。

3. 対数美的平面曲線の多項式 Bézier 曲線近似

積分形式で表現されている対数美的平面曲線を多項式 Bézier 曲線によって表現する手法を示す。式 (1) の $F(\theta)$ を $\theta = c$ において Taylor 展開すると

$$C(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(c)}{n!} (\theta - c)^n \quad (2)$$

となる。ここで $F^{(n)}(c)$ は F の $\theta = c$ における n 次導関数である。式 (2) の $n+1$ 次以降の項を省略すると, 式 (2) は独立変数 θ の n 次多項式となる。しかしながら, $c \neq 0$ の場合

には, $\theta = 0$ において原点を通過しない。そこで, 本研究では, 式 (1) の導関数を Taylor 展開し, θ によって積分する手法を用いた。これによって $c \neq 0$ の場合でも必ず $c = 0$ で原点を通過する。ただし, $c = 0$ での接線は $c \neq 0$ の時に $[1, 0]^T$ 方向を向かなくなるので注意が必要である。

n を多項式の次数としたとき, 式 (1) の導関数を c において $n-1$ 次まで Taylor 展開し θ によって積分した式は, t に置き換えると, 次式のようなべき基底関数による多項式となる。

$$\hat{C}(t) = \mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1 t + \mathbf{d}_2 t^2 + \dots + \mathbf{d}_n t^n \quad (3)$$

$\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n$ は, 式 (3) を次式に示すように Bernstein 基底関数による多項式に変換すれば, 積分形式の対数美的平面曲線が多項式 Bézier 曲線によって表現できる。なお, $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ は n 次の Bézier 曲線の制御点である。

$$\hat{C}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \quad (4)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (5)$$

通常, Bézier 曲線は 0.0 から 1.0 のパラメータ区間によって曲線が表現される。対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線は, 0.0 から 1.0 以外の任意のパラメータ値 t で曲線を表現する。このため, 図 2(a) のように曲線の端点と制御点の端点が一致しないことがある。 t が

任意の値で対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線を表現するためには, 図 2(b) のように de Casteljau のアルゴリズムを用い制御点を計算すれば良い.

図 3 に, 対数美的平面曲線を近似した多項式 Bézier 曲線, 曲率プロット, 及び曲率対数グラフを示す. また, $\alpha = 1.3$, $\Lambda = 1.2$, $c = 1.0$, $n = 7$ とした.

4. 対話的制御手法

対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線を, 両端点での位置と接線方向から対話的に制御する手法を示す. ユーザが指定するパラメータは, 曲率対数グラフの傾き α , 曲線の次数 n , Taylor 展開の中心 c , 両端点での位置 P_0, P_2 と端点での接線方向を指定するための P_1 の 3 点である. 両端点における単位接線ベクトルは, それぞれ, $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)/|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|$, $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)/|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|$ とする. また, $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$ ($i = 0, \dots, n-1$) とする.

対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線は, α が指定された時, Λ によって式 (3) が求まり曲線が生成できる. しかし対数美的曲線を近似した曲線であるため, 曲線を生成してみないと終点の位置 (曲線の終点のパラメータ t_θ から決定) や接線方向がわからない. 曲線セグメントは常に $t = 0$ から描かれる. 対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線に対話的に制御するためには, Bézier 曲線の始点での位置と接線方向, および終点での位置と接線方向を, それぞれ, $\mathbf{P}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{P}_2, \mathbf{v}_1$ に一致させればよい. すなわち, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{v}_0 = \Delta \mathbf{b}_0/|\Delta \mathbf{b}_0|$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{b}_n$, $\mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{b}_{n-1}/|\Delta \mathbf{b}_{n-1}|$ を満足するような, 曲線の終点のパラメータ t_θ, Λ を求めればよい.

始点での位置と接線方向は $\mathbf{P}_0 = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{v}_0 = \Delta \mathbf{b}_0/|\Delta \mathbf{b}_0|$ とすることで容易に一致させることができる. 終点での位置の一致は, 図 4(a) のように制御点 \mathbf{b}_n が \mathbf{P}_0 と \mathbf{P}_2 を通る直線上となる t_θ とすればよい. これにより \mathbf{b}_0 を固定とし, 各制御点 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ を $|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0|/|\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0|$ 倍すれば, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{b}_n$ となる. 図 4(b) に $\mathbf{P}_2 = \mathbf{b}_n$ となる様子を示す. ただしこの時点では, 終点での接線方向は一致しない. 終点での接線方向を一致させるには, 次式が 0 になるように二分法を用い Λ を求める.

$$f(\Lambda) = \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\Delta \mathbf{b}_{n-1}}{|\Delta \mathbf{b}_{n-1}|} - 1 \quad (6)$$

式 (6) が 0 のとき, $\mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{b}_{n-1}/|\Delta \mathbf{b}_{n-1}|$ となる. 図 4(c) に端点での接線方向が一致した結果を示す. 以上により, 両端点での位置と接線方向を指定することによって, 対数美的平面曲線を近似した Bézier 曲線に対話的に制御できる.

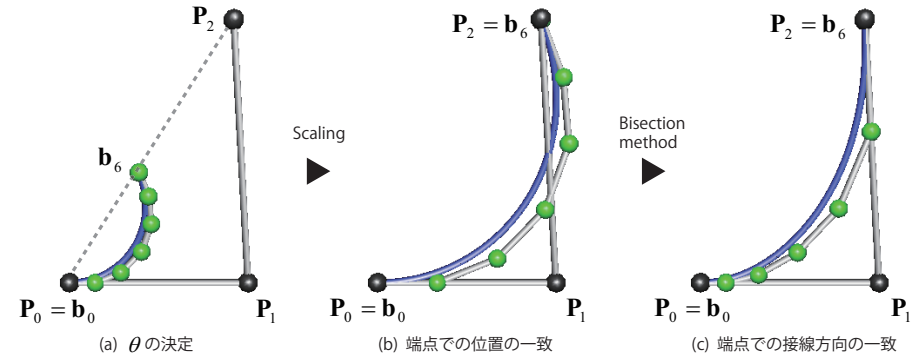


図 4 端点での位置と接線方向の一致

5. 実行結果

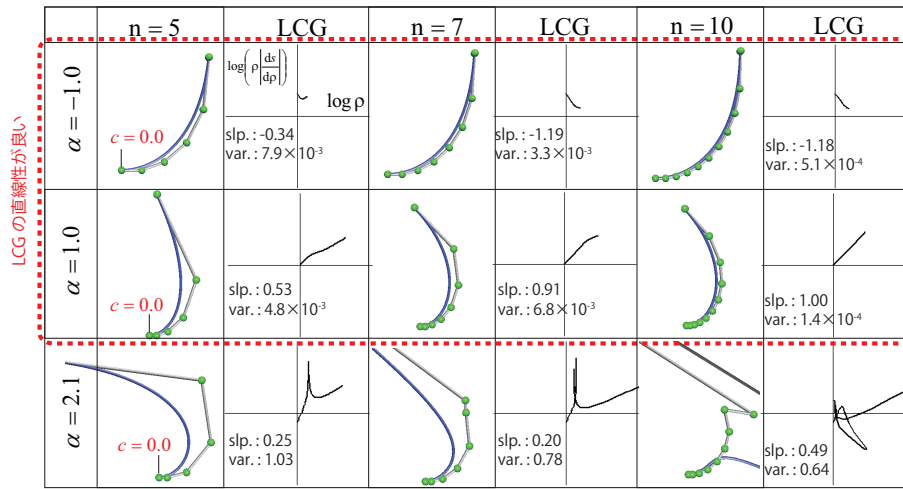
5.1 c 変化させた場合の曲率対数グラフの近似精度の違い

図 5 に $c = 0.0$ と $c = 1.0$ において Taylor 展開した場合の Bézier 曲線と曲率対数グラフ (LCG) の結果を示す. なお, 曲率対数グラフの傾き (slp.) と分散 (var.) は最小二乗法により曲率対数グラフを直線に近似することによって求めた. $c = 0.0$ の場合 $\alpha \leq 1.0$ のとき曲率対数グラフの近似精度が良い事がわかる. $c = 1.0$ の場合は, $\alpha \geq 1.0$ の場合に曲率対数グラフの近似精度が良くなる. この結果から, Taylor 展開を用いて対数美的曲線を近似した Bézier 曲線を生成する際には, α の値に応じて c を切り替える必要がある. 本研究では, $\alpha < 1.0$ の場合 $c = 0.0$ とし $\alpha \geq 1.0$ の場合 $c = 1.0$ としている.

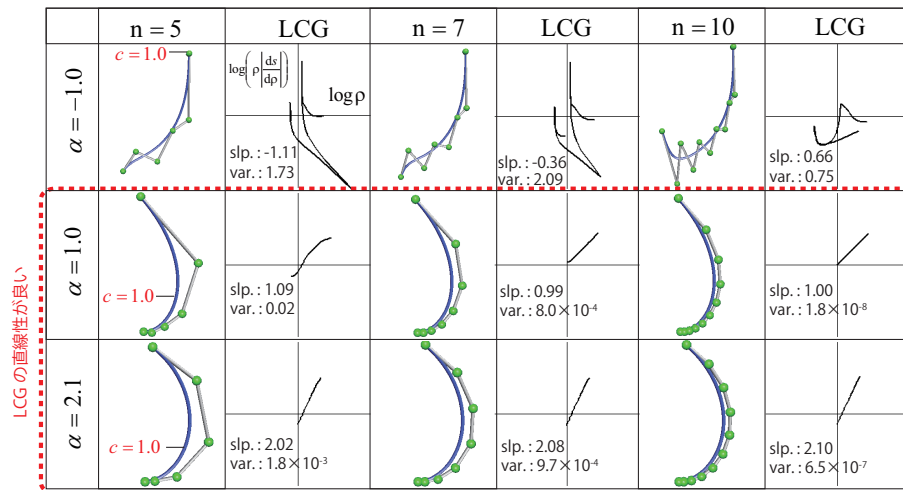
5.2 離散化による近似手法との比較

三浦により提案された, 対数美的曲線を弧長または方向角を一定にして離散化する手法⁴⁾と本手法を比較する. $\alpha = -1, 0, 1, 2$ の対数美的曲線と, 三浦らによる手法と本手法の曲線と曲率対数グラフの結果を図 6(a)~(f) と図 7(a)~(f) に示す. また, それぞれの手法と α に対し Bézier 曲線の次数 n を 6, 10, 20 と変化させている. 曲率対数グラフの傾き (slp.) と分散 (var.) は最小二乗法により曲率対数グラフを直線に近似し計算した.

三浦の手法では曲線の次数を高くしなければ, 曲率対数グラフの傾きが与えられた α に近づかないことがわかる. これに対し本手法では, 低い次数の曲線でも与えられた曲率対数グラフの傾きに近い結果が得られている. また, 本手法では対数美的曲線との誤差も小さい



(a) $c = 0.0$ で Taylor 展開



(b) $c = 1.0$ で Taylor 展開

図 5 c の違いによる Bézier 曲線と曲率対数グラフ

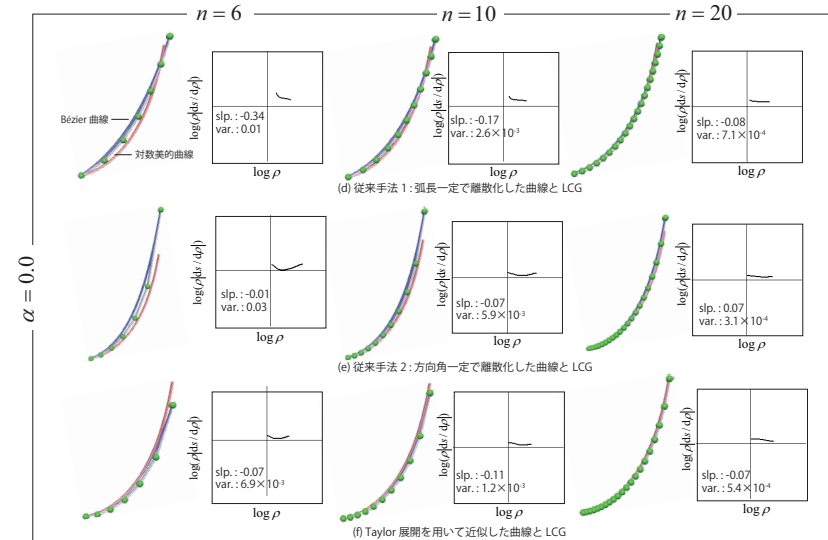
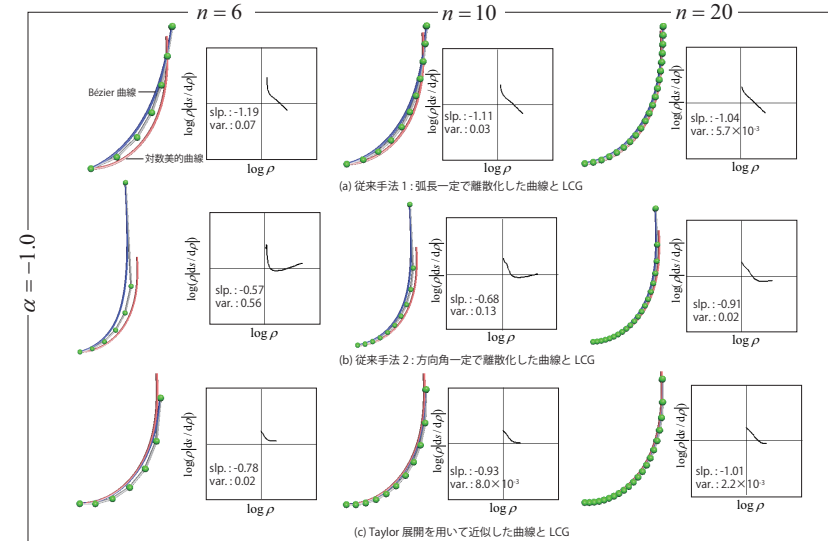


図 6 $\alpha = -1.0, 0.0$ での従来手法と本手法の比較

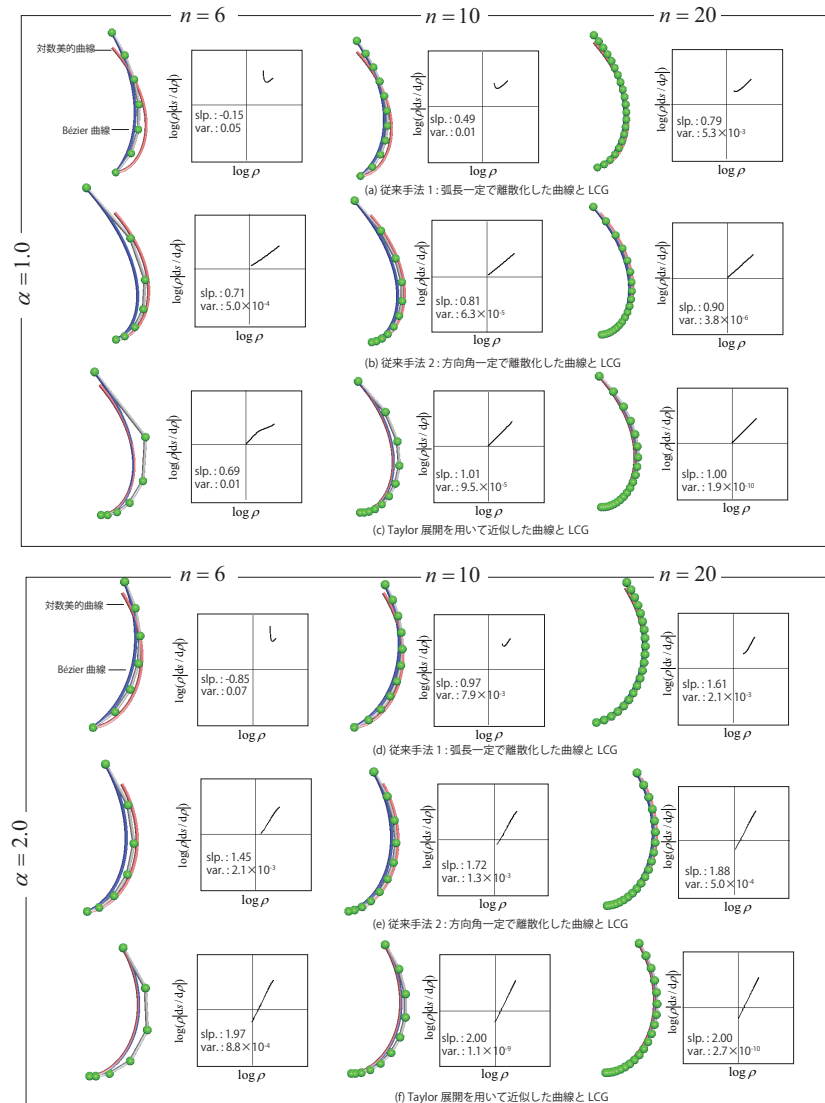


図 7 $\alpha = 1.0, 2.0$ での従来手法と本手法の比較

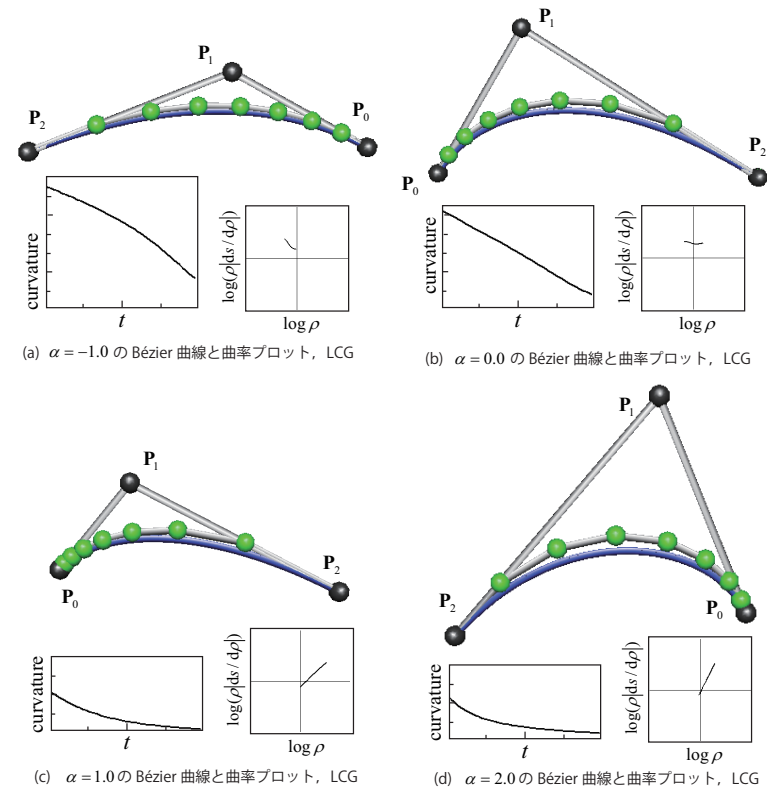


図 8 対話的生成の結果

事がわかる．どちらの手法とも共通して，次数を上げていくと指定された傾きに収束していくことがわかる．

5.3 対話的生成結果

図 8 に対数的曲線を近似した Bézier 曲線の対話的生成結果，曲率プロット，及び曲率対数グラフを示す．図 8(a)(b)(c)(d) は，それぞれ $\alpha = -1, 0, 1, 2$ の場合である．この結果から，両端点での位置と接線方向を指定する P_0, P_2, P_2 の 3 点から，対数的曲線を近似した Bézier 曲線が対話的に生成可能ながわかる．

5.4 提案手法の限界と今後の課題

提案手法の限界と今後の課題を述べる．本章の実行結果より， $\alpha \geq 1$ の場合には曲率対数グラフの直線性が非常に高いことがわかる．しかしながら， $\alpha < 1$ の場合には曲率対数グラフが直線になりにくい．特に $\alpha \leq 0$ の対数美的曲線は変曲点を持つ曲線である．本手法では，変曲点近傍を含む $\alpha \leq 0$ の場合に曲線の近似精度が悪くなる．

対数美的曲線が円弧を表現する $\Lambda = 0$ の場合の曲線の近似精度が悪くなり，曲率の単調性を保つこともできなくなる．これは多項式 Bézier 曲線では，円弧を表現することができないためである．この問題は，三浦らの手法においても⁴⁾ 同様である．

また，本手法では Taylor 展開を用いているため， c からの方向角の変化が $1(rad)$ より大きくなるときに近似精度が悪くなる場合がある．提案手法では，低い次数の多項式でも，従来法よりもよい曲率対数グラフの直線性を保つことができるが，より方向角の大きな場合にどのように対応していくのかは今後の課題である．

6. ま と め

本研究では，積分形式で表現される対数美的曲線を Taylor 展開を用いて多項式 Bézier 曲線に近似する手法を示し，低い次数の多項式 Bézier 曲線でも曲率対数グラフの直線性を保つことができることを示した．さらに，対数美的曲線を近似した多項式 Bézier 曲線を両端点での位置と接線方向の指定から対話的に制御する手法を示した．

今後の展望としては，有理 Bézier 曲線や NURBS で対数美的曲線を近似し，さらに曲率対数グラフの直線性が良い手法の提案などが挙げられる．

参 考 文 献

- 1) N.Yoshida, T.Saito : Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer, Pacific Graphics, Vol.22, No.9-11, pp.896-905, (2006).
- 2) N. Yoshida, R. Fukuda, T. Saito : Logarithmic Curvature and Torsion Graphs, in Mathematical Methods for Curves and Surfaces 2008 edited by Daehlen et al., LNCS 5862, Springer, pp.434-443, (2010).
- 3) N. Yoshida and T. Saito : Quasi-Aesthetic Curves in Rational Cubic BézierForms, Computer-Aided Design and Applications, Vol.4, Nos.1-4, pp.477-486, (2007).
- 4) 三浦憲二郎，白幡良，上利真一：典型的曲線の非定常化とその曲面への拡張，情報処理学会グラフィクスと CAD 研究会，Vol.2008, No.109, pp.73-78, (2008).
- 5) 福田諒，吉田典正，斎藤隆文，三浦憲二郎：Bézier 形式による対数美的平面曲線の対話的生成，精密工学会秋季大会，Vol.2009, pp957-958, (2009).