論 文

商 $g(x)/f(x)$ の高次導関数の公式について
——反復関数の次数と漸近誤差定数を定める一方法*——

竹 光 信 正**

Abstract

In general, we can determine the order and the asymptotic error constant of a given iteration function by the comparison theorem. However, in the case when we feel difficult to expand the iteration function as the power series of $u=f(x)/f'(x)$ or in the case of multiple roots, it is difficult to obtain them.

In this paper, a formula of the higher derivative of the quotient $g(x)/f(x)$ is given. By this formula, even in above cases, we can comparatively briefly determine the order and the asymptotic error constant of a given iteration function as compared with the comparison theorem.

1. まえがき

J.F. Traub[1]によれば，方程式の零点を求めるための反復関数は次の四種類にわけられる．

a) one-point iteration function
b) one-point iteration function with memory
c) multipoint iteration function
d) multipoint iteration function with memory

(a) のタイプのものは．新しい根の推定値を与えられた関数とその高階導関数のみからなる関数形で推定するもので，たとえば Newton-Raphson 法, Halley-Bailey 法などがこれに属する．(b)のタイプのものは，(a)のタイプでいくつかの古い推定値を併用するもので，たとえば，はさみうち法などがこれに属する．(c)のタイプのものは，(a)の場合と異なって新しい根を推定するのに与えられた関数とその高階導関数だけでなく，それらを独立変数とする関数をいくつか含んでいるもので，たとえば，Hummel-Seebeck 法[1]，中点傾斜法[1,2]などがこれに属する．(d) のタイプのものは，(c)のタイプでいくつかの古い推定値を併用する．

このような反復関数は古くから研究され，現在ではかなり体系づけられている[1]．しかし，その反面，出発値の推定や収束の加速，古い推定値を繰り返し使う際の数値解法の安定性，根の大域的問題，など解決すべき点，拡張・改良すべき点も多く残っている．また，反復関数の漸近誤差定数を求める方法も現在の体系化のなかでは必ずしも便利であるとはいえないように思われる．そこで，本研究において実用上の見地から反復関数の次数，およびその漸近誤差定数を求める一つの方法を他の方法と比較して提示した．

2. 漸近誤差定数の求め方

1.で述べたことを考慮して反復関数を次のように定義することができる．

いま，1価の方程式 $f(x)=0$ の零点 α に対して，$x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-n}$ を $n+1$ 個の古い推定値とする．このとき，新しい推定値 x_{i+1} が

$$x_{i+1}=\varphi(x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-n})$$

によって定められるものとする．この φ を反復関数と定義する．とくに，古い推定値が x_i のみである場合には

$$x_{i+1}=\varphi(x_i)$$

あるいは

* On the Formula of the Higer Derivative of the Quotient $g(x)/f(x)$——A Method to Determine the Order and the Asymptotic Error Constant of a Given Iteration Function ——by Nobumasa TAKEMITSU (Graduate Student of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Keio University)

** 慶応義塾大学工学部機械工学科大学院

$$x=\varphi(x)$$

とかく．

次に，反復関数 φ の order が P であるとき，これを $\varphi\in I_p$ とかくことにすると，漸近誤差定数(asymptotic error constant)を求めるための最も一般的な方法は次の定理で与えられる[1]．

定理1，$\varphi_1\in I_p$, $\varphi_2\in I_p$ で C_1, C_2 をそれぞれの漸近誤差定数，α を方程式 $f(x)=0$ の零点とし，

$$G(x)=\frac{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}{(x-\alpha)^p},\quad x\neq\alpha$$

とすれば，

$$C_2=C_1+\lim_{x\to\alpha}G(x)$$

あるいは，

定理2，$\varphi_1\in I_p$, $\varphi_2\in I_p$ で C_1, C_2 をそれぞれの漸近誤差定数，α を方程式 $f(x)=0$ の零点，$u=f(x)/f'(x)$ とし，

$$H(x)=\frac{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)}{u^p(x)},\quad x\neq\alpha$$

とすれば，m を零点の重複度として，

$$C_2=C_1+\frac{1}{m^p}\cdot\lim_{x\to\alpha}H(x)$$

これらは，いずれも一種の比較定理(comparison theorem)で，次数と漸近誤差定数のわかっている反復関数を使って次数のわかっている反復関数の漸近誤差定数を求めようとするものである．とくに，$m=1$ のときは，

定理3，$u=f(x)/f'(x)$ とすれば，

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-E_{p+1}(x)}{u^p(x)}$$

が存在して0でないとき，そのときに限り $\varphi\in I_p$ でその漸近誤差定数は，

$$C=\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-E_{p+1}(x)}{u^p(x)}$$

で与えられる．ただし，

$$E_n=x-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\cdot u^j\cdot\Sigma(-1)^r(j+r-1)!$$

$$\prod_{k=2}^{j}\frac{A_k{}^{\beta_k}}{\beta_k!},\quad A_k(x)=\frac{f^{(k)}(x)}{k!\,f'(x)}$$

で，中の Σ は $\sum_{k=2}^{j}(k-1)\beta_k=j-1$, $r=\sum_{k=2}^{j}\beta_k$ となるすべての非負整数 β_k についての和をとる．

この定理では，φ を u のべきに展開するだけでよい．いずれにしても，これらの定理を使う場合，L'Hospital の法則によって φ の高階微分を求めるか，あるいは φ を $u=f(x)/f'(x)$ のべきに展開しなければならない．したがって，こうした方法である反復関数 φ

$$\varphi=x-G(x)/F(x)$$

の次数と漸近誤差定数を定める場合，$F(x)$, $G(x)$ の関数形によってはかなりの困難を伴う場合がある．その最大の原因は商の高階微分にあるから，これを定式化できればこの困難はいくらか和らげることが可能であり，とくに，一般の m 重根の場合，べきに展開することの困難な場合には便利であると考えられる．

以上のような理由で，商の高階微分の公式化を試みるが，ここでは以下に示す方法をとる．

系1，商の高階微分は，$\mathcal{A}_0{}^{(\nu)}$ を $f(x)$ と $g(x)$ の高階微分を含んだ未知式として次の形に表せる．

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{n+1}(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,\frac{\mathcal{A}_0{}^{(\nu)}}{f^\nu}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,f^{n-\nu+1}\mathcal{A}_0{}^{(\nu)}}{f^{n+1}}\qquad(1)$$

ただし，$\mathcal{A}_0{}^{(1)}\equiv g^{(n)}$ で，簡単のため $f(x)$, $g(x)$ はそれぞれ f, g と記した．

〔証明〕 Leibniz の公式より，

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g^{(n-j)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(j)}\qquad(2)$$

であるが，これを

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\mathcal{A}_j{}^{(1)}\left(\frac{1}{f}\right)^{(j)}\qquad(3)$$

とかく．ところで，

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2},\quad \left(\frac{1}{f}\right)''=-\left(\frac{f'}{f^2}\right)'=-\left\{\binom{1}{0}f''\cdot\frac{1}{f^2}\right.$$

$$\left.+\binom{1}{1}f'\left(\frac{1}{f^2}\right)'\right\},\ \cdots$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}=-\left(\frac{f'}{f^2}\right)^{(n-1)}=-\left\{\binom{n-1}{0}f^{(n)}\frac{1}{f^2}\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{1}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{f^2}\right)'+\cdots+\binom{n-1}{n-1}f'\left(\frac{1}{f^2}\right)^{(n-1)}\right\}$$

であるから，$1/f$ の高階微分の第一項のみをとると，式(3)は，

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\mathcal{A}_0{}^{(1)}\frac{1}{f}-\sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{A}_j{}^{(2)}\left(\frac{1}{f^2}\right)^{(j)}\qquad(4)$$

の形にかける．同様に，

$$\left(\frac{1}{f^2}\right)'=-\frac{2f'}{f^3},\quad \left(\frac{1}{f^2}\right)''=-\left(\frac{2f'}{f^3}\right)'$$

$$=-2\left\{\binom{1}{0}f''\frac{1}{f^3}+\binom{1}{1}f'\left(\frac{1}{f^3}\right)'\right\},\ \cdots$$

$$\left(\frac{1}{f^2}\right)^{(n-1)}=-\left(\frac{2f'}{f^3}\right)^{(n-2)}=-2\left\{\binom{n-2}{0}f^{(n-1)}\frac{1}{f^3}+\binom{n-2}{1}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{f^3}\right)'+\cdots+\binom{n-2}{n-2}f'\left(\frac{1}{f^3}\right)^{(n-2)}\right\}$$

であるから，この第一項のみの和をとると式(4)は，

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\mathcal{A}_0{}^{(1)}\frac{1}{f}-\mathcal{A}_0{}^{(2)}\frac{1}{f^2}+2\sum_{j=0}^{n-2}\mathcal{A}_j{}^{(3)}\left(\frac{1}{f^3}\right)^{(j)}$$

となる．この操作を繰り返すと式（1）をうる．

次に，未知式 $\mathcal{A}_0{}^{(\nu)}$ の具体的な形を定めるため，一般に $\mathcal{A}_k{}^{(j)}$ で j が $1/f^j$ の j を示し，k が $(1/f^j)$ の k 回微分を表すものとして，次の漸化式を証明する．

系 2，$j\geq 1$，$m\geq 0$ とすれば，

$$\mathcal{A}_m{}^{(j+1)}=\sum_{\mu=m}^{n-j}\binom{\mu}{m}\mathcal{A}_{\mu+1}{}^{(j)}f^{(\mu-m+1)} \qquad (5)$$

ただし，$\mathcal{A}_m{}^{(1)}=\binom{n}{m}g^{(n-m)}$ である．

〔証明〕 系1から，

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\mathcal{A}_0{}^{(1)}\frac{1}{f}-\mathcal{A}_0{}^{(2)}\frac{1}{f^2}+2!\mathcal{A}_0{}^{(3)}\frac{1}{f^3}+\cdots+(-1)^j(j-1)!\left\{\mathcal{A}_0{}^{(j)}\frac{1}{f^j}+\mathcal{A}_1{}^{(j)}\left(\frac{1}{f^j}\right)'+\cdots+\mathcal{A}_{n-j+1}{}^{(j)}\left(\frac{1}{f^j}\right)^{(n-j+1)}\right\}$$

が成り立つ．ところが，系1の説明と同様にすると，

$$\left(\frac{1}{f^j}\right)'=-j\frac{f'}{f^{j+1}}$$

$$\left(\frac{1}{f^j}\right)''=-j\left\{\binom{1}{0}f''\frac{1}{f^{j+1}}+\binom{1}{1}f'\left(\frac{1}{f^{j+1}}\right)'\right\}$$

$$\left(\frac{1}{f^j}\right)'''=-j\left\{\binom{2}{0}f'''\frac{1}{f^{j+1}}+\binom{2}{1}f''\left(\frac{1}{f^{j+1}}\right)'+\binom{2}{2}f'\left(\frac{1}{f^{j+1}}\right)''\right\}$$

……

$$\left(\frac{1}{f^j}\right)^{(n-j+1)}=-j\left\{\binom{n-j}{0}f^{(n-j+1)}\frac{1}{f^{j+1}}+\binom{n-j}{1}f^{(n-j)}\left(\frac{1}{f^{j+1}}\right)'+\cdots+\binom{n-j}{n-j}f'\left(\frac{1}{f^{j+1}}\right)^{(n-j)}\right\}$$

が成り立つから，$j\geq 1$ とすれば，

$$\mathcal{A}_0{}^{(j+1)}=\binom{0}{0}\mathcal{A}_1{}^{(j)}f'+\binom{1}{0}\mathcal{A}_2{}^{(j)}f''+\binom{2}{0}\mathcal{A}_3{}^{(j)}f'''+\cdots+\binom{n-j}{0}\mathcal{A}_{n-j+1}{}^{(j)}f^{(n-j+1)}$$

$$\mathcal{A}_1{}^{(j+1)}=\binom{1}{1}\mathcal{A}_2{}^{(j)}f'+\binom{2}{1}\mathcal{A}_3{}^{(j)}f''+\cdots+\binom{n-j}{1}\mathcal{A}_{n-j+1}{}^{(j)}f^{(n-j)}$$

$$\mathcal{A}_2{}^{(j+1)}=\binom{2}{2}\mathcal{A}_3{}^{(j)}f'+\cdots+\binom{n-j}{2}\mathcal{A}_{n-j+1}{}^{(j)}f^{(n-j-1)}$$

……

$$\mathcal{A}_{n-j}{}^{(j+1)}=\binom{n-j}{n-j}\mathcal{A}_{n-j+1}{}^{(j)}f'$$

である．よって，ほとんど明らかに式（5）が成り立つ．また，$\mathcal{A}_m{}^{(1)}$ は Leibniz の定理（2）による．

とくに，

系 3，

$$\mathcal{A}_0{}^{(j+1)}=\sum_{m_j=1}^{n-j+1}f^{(m_j)}\mathcal{A}_{m_j}{}^{(j)} \qquad (6)$$

$$\mathcal{A}_{m_{j+1}}{}^{(j+1)}=\sum_{m_j=m_{j+1}}^{n-j}\binom{m_j}{m_{j+1}}\mathcal{A}_{m_j+1}{}^{(j)}f^{(m_j-m_{j+1}+1)},\quad j\geq 1 \qquad (7)$$

ただし，

$$\mathcal{A}_{m_1}{}^{(1)}\equiv\mathcal{A}_m{}^{(1)}=\binom{n}{m}g^{(n-m)},\quad m\geq 0 \qquad (8)$$

〔証明〕 系1，2による．

これより

系 4，$\nu\geq 3$ とすれば，

$$\mathcal{A}_0{}^{(\nu)}=\sum_{m_{\nu-1}=1}^{n-\nu+2}f^{(m_{\nu-1})}\sum_{m_{\nu-2}=m_{\nu-1}}^{n-\nu+2}\binom{m_{\nu-2}}{m_{\nu-1}}f^{(m_{\nu-2}-m_{\nu-1}+1)}\times\left\{\prod_{k=1}^{\nu-3}\sum_{m_{\nu-k-2}=m_{\nu-k-1}+1}^{n-\nu+k+2}\binom{m_{\nu-k-2}}{m_{\nu-k-1}+1}f^{(m_{\nu-k-2}-m_{\nu-k-1})}\right\}\binom{n}{m_1+1}g^{(n-m_1-1)} \qquad (9)$$

である．ただし，Σ や Π の上端の数は下端の数よりつねに小さくはないものとする．小さいときはその項全体を恒等的に1とおく．

〔証明〕 数学的帰納法による．

i）$\nu=3$ のとき．式（6），（7）から，

$$\mathcal{A}_0{}^{(3)}=\sum_{m_2=1}^{n-1}f^{(m_2)}\mathcal{A}_{m_2}{}^{(2)}=\sum_{m_2=1}^{n-1}f^{(m_2)}\sum_{m_1=m_2}^{n-1}\binom{m_1}{m_2}\mathcal{A}_{m_1+1}{}^{(1)}f^{(m_1-m_2+1)}$$

$$=\sum_{m_2=1}^{n-1}f^{(m_2)}\sum_{m_1=m_2}^{n-1}\binom{m_1}{m_2}\binom{n}{m_1+1}f^{(m_1-m_2+1)}g^{(n-m_1-1)}$$

となるが，これは，式（9）で $\nu=3$ としたものに一

致する．

ii) $\nu=\mu$ のとき．式 (9) が成り立つとすると，式 (6)，(7) から，

$$\mathcal{A}_0^{(\mu+1)}=\sum_{m_\mu=1}^{n-\mu+1} f^{(m_\mu)}\mathcal{A}_{m_\mu}^{(\mu)}$$

$$=\sum_{m_\mu=1}^{n-\mu+1} f^{(m_\mu)}\sum_{m_{\mu-1}=m_\mu}^{n-\mu+1}\binom{m_{\mu-1}}{m_\mu}\mathcal{A}_{m_{\mu-1}+1}^{(\mu-1)}\, f^{(m_{\mu-1}-m_\mu+1)} \tag{10}$$

ところで，式 (6) より (9) は，

$$\mathcal{A}_0^{(\nu)}=\sum_{m_{\nu-1}=1}^{n-\nu+2} f^{(m_{\nu-1})}\mathcal{A}_{m_{\nu-1}}^{(\nu-1)}$$

とかけるから，

$$\mathcal{A}_{m_{\mu-1}}^{(\mu-1)}=\sum_{m_{\mu-2}=m_{\mu-1}}^{n-\mu+2}\binom{m_{\mu-2}}{m_{\mu-1}} f^{(m_{\mu-2}-m_{\mu-1}+1)} \times\left\{\prod_{k=1}^{\mu-3}\sum_{m_{\mu-k-2}=m_{\mu-k-1}+1}^{n-\mu+k+2}\binom{m_{\mu-k-2}}{m_{\mu-k-1}+1} f^{(m_{\mu-k-2}-m_{\mu-k-1})}\right\}\binom{n}{m_1+1}g^{(n-m_1-1)}$$

よって，この式で $m_{\mu-1}$ のところに $m_{\mu-1}+1$ とおいて，式 (10) に代入すれば，

$$\mathcal{A}_0^{(\mu+1)}=\sum_{m_\mu=1}^{n-\mu+1} f^{(m_\mu)}\sum_{m_{\mu-1}=m_\mu}^{n-\mu+1}\binom{m_{\mu-1}}{m_\mu}f^{(m_{\mu-1}-m_\mu+1)} \times\left\{\prod_{k=1}^{\mu-2}\sum_{m_{\mu-k-1}=m_{\mu-k}+1}^{n-\mu+k+1}\binom{m_{\mu-k-1}}{m_{\mu-k}+1}f^{(m_{\mu-k-1}-m_{\mu-k})}\right\}\binom{n}{m_1+1}g^{(n-m_1-1)}$$

をうる．これは，式 (9) で $\nu=\mu$ としたとき，μ のところに $\mu+1$ とおいたものに等しい．したがって，式 (9) が成り立つ．

ここでは，記法の簡単さのため次の記法を採用しよう．

$$\mathop{\Xi}_{k=\mu}^{\nu}=\mu\cdot(\mu-1)\cdot(\mu-2)\cdots(\nu+2)\cdot(\nu+1)\cdot\nu \equiv\prod_{k=1}^{\mu+1-\nu}(\mu+1-k) \tag{11}$$

つまり，$\mathop{\Xi}_{k=\mu}^{\nu}$ は $k=\mu$ から ν までの積を表すものである．この記法を使うと式 (9) は，

$$\mathcal{A}_0^{(\nu)}=\sum_{m_{\nu-1}=1}^{n-\nu+2} f^{(m_{\nu-1})}\sum_{m_{\nu-2}=m_{\nu-1}}^{n-\nu+2}\binom{m_{\nu-2}}{m_{\nu-1}}f^{(m_{\nu-2}-m_{\nu-1}+1)} \times\left\{\mathop{\Xi}_{k=\nu-3}^{1}\sum_{m_k=m_{k+1}+1}^{n-k}\binom{m_k}{m_{k+1}+1}f^{(m_k-m_{k+1})}\right\}\binom{n}{m_1+1}g^{(n-m_1-1)}$$

となる．したがって，系1，4から，

系5，商の高階微分公式は次の式で表せる．

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{n+1}(-1)^{\nu-1}\cdot(\nu-1)!\,\frac{\mathcal{A}_0^{(\nu)}}{f^\nu}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n+1}\frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!\,f^{n-\nu+1}\mathcal{A}_0^{(\nu)}}{f^{n+1}} \tag{12}$$

ただし，$\nu\geq 3$ のとき，

$$\mathcal{A}_0^{(\nu)}=\sum_{m_{\nu-1}=1}^{n-\nu+2} f^{(m_{\nu-1})}\sum_{m_{\nu-2}=m_{\nu-1}}^{n-\nu+2}\binom{m_{\nu-2}}{m_{\nu-1}}f^{(m_{\nu-2}-m_{\nu-1}+1)} \times\left\{\mathop{\Xi}_{k=\nu-3}^{1}\sum_{m_k=m_{k+1}+1}^{n-k}\binom{m_k}{m_{k+1}+1}f^{(m_k-m_{k+1})}\right\}\binom{n}{m_1+1}g^{(n-m_1-1)} \tag{13}$$

$$\mathop{\Xi}_{0}^{1}\equiv 1$$

で，$\nu=1$，2 のとき，

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{A}_0^{(1)}\equiv\binom{n}{0}g^{(n)}=g^{(n)}\,,\\&\mathcal{A}_0^{(2)}=\sum_{m_1=1}^{n}\mathcal{A}_{m_1}^{(1)}f^{(m_1)}=\sum_{m_1=1}^{n}\binom{n}{m_1}g^{(n-m_1)}f^{(m_1)}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

である．

さて，この系を使って商の高階微分を書き下せば，

$$\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)''=\frac{g''f^2-f(2g'f'+gf'')+2f'^2g}{f^3}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'''=\frac{g'''f^3-f^2(3g''f'+3g'f''+gf''')+6f(g'f'^2+gf'f'')-6f'^3g}{f^4}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(4)}=\frac{\text{分子}}{f^5}$$

$$\begin{aligned}\text{分子}=\,&g^{(4)}f^4-f^3(4g'''f'+6g''f''+4g'f'''+gf^{(4)})\\&+2f^2(6g''f'^2+12g'f'f''+3gf''^2+4gf'f''')\\&-12f(2g'f'^3+3gf'^2f'')+24f'^4g\end{aligned}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)^{(5)}=\frac{\text{分子}}{f^6}$$

$$\begin{aligned}\text{分子}=\,&g^{(5)}f^5-f^4(5g^{(4)}f'+10g'''f''+10g''f'''\\&+5g'f^{(4)}+gf^{(5)})+10f^3(2g'''f'^2+6g''f'f''\\&+4g'f'f'''+3g'f''^2+gf'f^{(4)}+2gf''f''')\\&-30f^2(2g''f'^3+6g'f'^2f''+2gf'^2f'''\\&+3gf'f''^2)+120f(g'f'^4+2gf'^3f'')\\&-120f'^5g\end{aligned}$$

……

などとなる．

3. むすび

方程式の零点を求める反復関数の次数と漸近誤差定数を定める一つの方法として，商の高階微分公式を示した．商の高階微分公式は，積の高階微分公式である Leibniz の公式で原理的に解決されていると考えられる．しかし，反復関数の次数と漸近誤差定数を求める場合，Leibniz の公式，および比較定理だけでは計算上の困難を生じる．とくに，反復関数を$u=f(x)/f'(x)$のべきに展開することが困難な場合，多重根を求める反復関数の次数や漸近誤差定数を定める場合にはそうである．したがって，こうした応用上の見地から商の高階微分を公式化しておくこともあながち無意味ではないと思われる．

謝　辞　本稿をとりまとめるにあたり，慶応義塾大学浦昭二博士より種々有益な御助言を賜わりました．ここに記して深く感謝致します．

参考文献

1) J.F. Traub: Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice-Hall, Inc., (1964)
2) Nobumasa Takemitsu: Some Remarks on the Third-Order Iteration Function, Journal of Information Processing, 投稿中

(昭和51年4月2日受付)
(昭和51年11月2日再受付)