論 文

多項式の零点の決定論的評価*

大 中 幸三郎**

Abstract

This paper describes the deterministic evaluation method for the roots of polynomial equations. The authors give an inclusion radius of all roots, and show the criterion for the existence of roots and the behaviour of multiple root. We also show the algorithm of finding roots and some of the results. Our method is effective for deterministic error evaluation and can be extended to the roots of analytic functions.

1. まえがき

数値計算において，解の確度を正しく評価することは重要かつ困難な問題である．その評価方法として，誤差評価機能をもった可変精度演算[1),2)]，interval arithmetic[1)~3)] 等がすでに試みられている．しかしながら，アルゴリズムの誤差を考慮した解法は存在しているが，得られた解の広がりの中に真の解が含まれていることを断言できる解法は少ない．ここに我々はどのような場合においても決定論的に解を求めるということを目的にもち，そのなかでも係数に誤差を含む，すなわち係数に広がりがある場合の多項式の零点を決定論的に求める解法を得たので，その方法といくつかの問題に適用した結果を示す．このような解法として各々の零点の近傍を初期入力とする論文[4)]が発表されているが，零点の近傍をいかなる場合にも入力しなければならないということは困難であり，また重根の場合に得られる解の広がりについても言及していない．我々は係数に広がりをもつ多項式の零点が点とならず領域となることを考え，interval arithmetic の下に全根を含む初期領域を自動的に発生させ，その初期領域から各々の根を分離する方法をとる．また，一根を分離した時に次数の低下を行うことも考えられるが，そのために新しい係数に誤差が拡大されて根の広がりが大きくなるのをさけるために，我々は次数の低下を行わない．同様の理由から，原点移動やスケーリングも行わず，入力された係数の情報をそのまま利用することにする．このようにすれば各々の根の確度がその得られた順序に依存することはない．また，重根の場合に得られる解の広がりについてもその解析的な評価を行ったので，実験例とともに示す．

2. 根の存在領域

複素平面上で多項式のすべての零点を求めるためには，全根を含む初期領域を決定することが必要となってくる．計算機で表現可能な最大領域から探索してもよいが，初期領域を小さく決定できれば計算時間やメモリ容量の点で有利となる．したがって，まずはじめに初期領域を数値的に決定する方法について考える．

(1)式に複素係数の n 次方程式を示す．

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0. \qquad (1)$$

(1)式の全根は原点を中心とし，(2)式を満足する正数 σ を半径とする円領域に存在することが定理として示されている[5)]．

$$\sigma^n-\{|a_{n-1}|\sigma^{n-1}+\cdots+|a_1|\sigma+|a_0|\}=0. \qquad (2)$$

この σ を数値的に求めるために次の系を証明する．

系．実数かつ非負の係数をもつ n 次方程式，

$$f(x)=x^n-\sum_{j=1}^{n}b_{n-j}x^{n-j}=0,$$

は，$\alpha=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sqrt[j]{b_{n-j}}$ とすれば，区間 $0\leqq\alpha\leqq x\leqq 2\alpha$ 内に根はただ1つ存在する．

証 明

(1) $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{n-j}^2=0$ のとき

$f(x)=x^n=0$ かつ $\alpha=0$ となる．したがって，

* A Deterministic Evaluation Method for the Roots of Polynomial Equations by Kohzaburo OHNAKA (Computation Center, Osaka University).

** 大阪大学大型計算機センター

$f(x)=0$ の根が区間 $0=\alpha\leqq x\leqq 2\alpha=0$ 内にただ1つ存在することは明らかである.

(2) $\sum_{j=1}^{n} b_{n-j}^{2}\neq 0$ のとき

Descartes の定理[6]より, $f(x)=0$ はただ1つの正根をもつことが示されているので, 根が区間 $0<\alpha\leqq x\leqq 2\alpha$ 内に存在することを示せばよい. $\alpha=\max_{1\leqq j\leqq n}\sqrt[j]{b_{n-j}}=\sqrt[m]{b_{n-m}}$ とすれば,

$$f(\alpha)=\alpha^{n}-\sum_{j=1}^{n} b_{n-j}\alpha^{n-j},$$

となる. ところが $b_{n-m}\alpha^{n-m}=\alpha^{m}\alpha^{n-m}=\alpha^{n}$ かつ $b_{n-j}\geqq 0$ なので,

$$f(\alpha)=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} b_{n-j}\alpha^{n-j}\leqq 0,$$

となる. 一方, $f(2\alpha)$ は次式で表現できる.

$$f(2\alpha)=(2\alpha)^{n}-\sum_{j=1}^{n} b_{n-j}(2\alpha)^{n-j}$$
$$=2^{n}\alpha^{n}\left(1-\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}b_{n-j}\alpha^{-j}\right).$$

ところが α の定義より次の関係が成り立つ.

$$\alpha=\sqrt[m]{b_{n-m}}\geqq\sqrt[j]{b_{n-j}},\quad 1\leqq j\leqq n.$$

したがって $\alpha^{j}\geqq b_{n-j}$ となり, $2^{-j}b_{n-j}\alpha^{-j}\leqq 2^{-j}$ となる. 故に $f(2\alpha)$ は次式で評価できる.

$$f(2\alpha)=2^{n}\alpha^{n}\left(1-\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}b_{n-j}\alpha^{-j}\right)$$
$$\geqq 2^{n}\alpha^{n}\left(1-\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\right)>0.$$

$f(x)$ は連続関数であり, $f(\alpha)\leqq 0$ かつ $f(2\alpha)>0$ なので, $f(x)$ は区間 $0<\alpha\leqq x<2\alpha$ 内にただ1根存在する. (証終)

上記の系を(2)式に適用すれば $\alpha=\max_{1\leqq j\leqq n}\sqrt[j]{|a_{n-j}|}$ となる. したがって, 区間 $\alpha\leqq x\leqq 2\alpha$ 内で σ を探索すればよいことになる. 探索方法として, 我々はもっとも安定な方法として二分法を用いている. ただし, σ は根の存在範囲なので, 最後に残った区間の最大値を σ とする必要がある.

3. 根の存在の判定条件

この章では根の存在の判定条件を示す. このために解析関数 $f(z)$ とその導関数 $f'(z)$ を(3), (4)式に示す.

$$f(z)=u(z)+iv(z),\qquad(3)$$

ただし, $u(z)=u(x,y)$, $v(z)=v(x,y)$, $z=x+iy$.

$$f'(z)=u_x(z)+iv_x(z)=v_y(z)-iu_y(z),\qquad(4)$$

ただし, u_x, v_x, u_y, v_y は u, v の偏導関数.

凸かつ閉領域上で $\bar{f}(D)$ を(5)式で定義する.

$$\bar{f}(D)=\{u(z_1)+iv(z_2)\mid z_1, z_2\in D\}.\qquad(5)$$

$\bar{f}(D)$ の定義より $z\in D$ ならば $f(z)\in\bar{f}(D)$ なので, D 内に根が存在すれば $\bar{f}(D)\ni 0$ となる.

次に D 内に2根以上存在する場合を考える. 相異なる根の場合は根を z_1, z_2 とすれば平均値の定理より(6)式が成立する.

$$0=f(z_2)-f(z_1)=(z_2-z_1)\{u_x(\alpha)+iv_x(\beta)\},\qquad(6)$$

ただし, α, β は z_1, z_2 の2点を結ぶ線分 L 上の適当な2点.

したがって, $u_x(\alpha)=v_x(\beta)=0$ となるので, 次の結果が得られる.

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_x(D)\supset\bar{u}_x(L)\ni u_x(\alpha)=0\\ \bar{v}_x(D)\supset\bar{v}_x(L)\ni v_x(\beta)=0\end{aligned}\right\}.\qquad(7)$$

(7)式から $\bar{f}'(D)\ni 0$ となることがわかる. 重根の場合に $\bar{f}'(D)\ni 0$ は自明なので, 根が単根, 重根にかかわらず $\bar{f}'(D)\ni 0$ ならば $f(z)$ は D 内に2根以上存在する可能性がある. また対偶をとれば, $\bar{f}'(D)\not\ni 0$ のとき, $f(z)$ は D 内に高々1根しか存在しないことが示される.

しかしながら, (5)式を正しく計算することは困難である. したがって, $\bar{f}(D)$, $\bar{f}'(D)$ が interval arithmetic によって得られる結果の最も広がりの小さなものであることを考え, interval arithmetic を用いる. すなわち, interval arithmetic では各辺が実軸, 虚軸に平行な矩形領域が1つの interval number によって表現できるので, D を矩形にとり, 1つの interval number に対応させる. $f(z)$ を interval arithmetic で評価した値を $F(D)$ (以下 F', U, V 等も同様) とすれば, $F(D)\supset\bar{f}(D)$ となり, 根の存在の判定を F, F' で実行することができる. しかし, interval arithmetic は演算結果の広がりが過大となることが多いので, $F'\not\ni 0$ の場合には, u と v の単調性から u と v の最大値と最小値を与える点を限定し, F の広がりを小さくすることができる. とくに $U_x\not\ni 0$ かつ $V_x\not\ni 0$ の場合には u と v の最大値, 最小値を与える点を決定でき, $\bar{f}$ を正しく評価できる.

4. 重根の場合に求められた解の広がり

(3)式において p 重根が存在するときに, 3. で述べた判定条件を適用する場合の解の広がりについて考える. このとき, p 重根の近傍において(3)式は近似的

に次式で表現できる.

$$f(z)=(z-z_1)^p g(z) \fallingdotseq (z-z_1)^p g(z_1). \quad (8)$$

z_1 の近傍での $f(z)$ のふるまいを考えるため, (8)式に原点移動とスケーリングを行い, (9)式のように簡単化して議論を進める.

$$h(z)=z^p. \quad (9)$$

ここで $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすれば,

$$h(z)=r^p(\cos p\theta+i\sin p\theta), \quad (10)$$

となり, $h(z)$ の実数部, 虚数部をそれぞれ0とする θ は(11), (12)式によって表現することができる.

$$\theta=\frac{(2j+1)\pi}{2p},\ \ j=0,1,\cdots,2p-1. \quad (11)$$

$$\theta=\frac{2j\pi}{2p}=\frac{j\pi}{p},\ \ j=0,1,\cdots,2p-1. \quad (12)$$

interval number は矩形領域となるので, 矩形を1辺の長さ l の正方形 S と簡単化すれば, (11), (12)式の各々を満足する θ が S 内に存在するためには,

$$\frac{2\pi r}{4p} \fallingdotseq \sqrt{2}\,l, \quad (13)$$

となればよい. このときには(5)式より $\bar{f}(S)\ni 0$ となり, 根が存在することになる. (13)式を r についてとけば(14)式となる.

$$r \fallingdotseq \frac{2\sqrt{2}\,pl}{\pi}. \quad (14)$$

(14)式の r を半径とする円内には, 1辺の長さ l の正方形は, $\pi r^2/l^2 \fallingdotseq 2p^2$ 個存在する. $2p^2$ 個の正方形の中で真の根を含む領域は1個である. 残りは根を含まないが, $\bar{f}\ni 0$ となる領域であり, このような領域をゴースト領域と名付ける. $p=1$, すなわち単根の場合には, (11), (12)式から $\theta=0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ となり, したがって, 各辺が実軸, 虚軸に平行な矩形領域で $\bar{f}$ を評価するかぎりゴースト領域は現われない.

重根の場合にはゴースト領域の数は $2p^2$ 個程度であり, l に無関係となるので, $\bar{f}$ を判定条件とするかぎり l を小さくしてもゴースト領域は消滅しない. しかし, l を小さくすればゴースト領域の広がりは小さくなるので, ゴースト領域を含めた領域を根の範囲とすることにより, 決定論的に根を評価することができる. $\bar{f}$ のかわりに F によって根の判定を行うときには, ゴースト領域の数は $2p^2$ 個よりも多くなり, ある程度 l に関係してくる.

重根の場合のゴースト領域の数を示したが, 根の距離が l と同程度の近接根の場合にもゴースト領域が現われるものと考えられる.

5. ゴースト領域の部分的消去

F を評価関数とするかぎりゴースト領域は現われるので, 解析関数の特徴を利用してゴースト領域を消去することを考える. f が解析関数であれば(15)式の関係が成立する.

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\int_L f'(z)dz\right| \leqq \int_L |f'(z)||dz| \leqq |z-z_0|\max_{z\in L}|f'(z)|, \quad (15)$$

ただし, L は z と z_0 を結ぶ線分.

凸領域 D 内に根が存在し, その根を z_0 にとるとすれば, (15)式より D 内の任意の点 z に対して,

$$|f(z)| \leqq |z-z_0|\max_{z\in D}|f'(z)|, \quad (16)$$

が得られる. すなわち $|f(z)|>|z-z_0|\max_{z\in D}|f'(z)|$ が $^{\exists}z\in D$ かつ $^{\forall}z_0\in D$ について成立すれば, D 内に根が存在しないことが判定できる. D を半径 r_0 の円領域とし, z をその中心にとれば $|z-z_0|\leqq r_0$ なので, D 内に根の存在しない条件は(17)式となる.

$$|f(z)|>r_0\max_{z\in D}|f'(z)|. \quad (17)$$

(17)式の判定条件について **4.** と同様にゴースト領域の広がりを考える. (9), (10)式より $|h(z)|=r^p$ かつ $\max_{z\in D}|f'(z)|=p(r+r_0)^{p-1}$ となるので(17)式は,

$$r^p>r_0 p(r+r_0)^{p-1}, \quad (18)$$

となる. ここで $r\gg r_0>0$ として(18)式を近似的にとけば次式となる.

$$r^2-r_0pr-r_0^2p(p-1)>0. \quad (19)$$

$r>0$ なので(19)式の解は,

$$r>\frac{r_0p}{2}\left(1+\sqrt{5-\frac{4}{p}}\right) \fallingdotseq \frac{3}{2}r_0p. \quad (20)$$

となり, $r\leqq 3r_0p/2$ の内部のゴースト領域は消去できないことになる. すなわちゴースト領域を1辺の長さ l の正方形とすれば $r_0=l/\sqrt{2}$ となるので, ゴースト領域の数は,

$$\frac{\pi\left(\frac{3}{2}r_0p\right)^2}{l^2} \fallingdotseq \frac{9}{8}\pi p^2 \fallingdotseq 4p^2,$$

となり **4.** で述べた $2p^2$ 個より多くなる. しかしながら実際には interval arithmetic により判定を行うので, (17)式の左辺が点 z による値であり, $|f'|$ の最大値を与える点は最大値の原理によって境界上に限定できることと, f が多項式のときには f に比較して f' の次数が1次低いことから, F よりも F' の方が広がりを小さく計算でき, ゴースト領域は部分的に消

去可能となる.

また，ゴースト領域の個々について小領域に分割し，その小領域のすべてに対して $F\not\ni 0$ 又は (17) 式が成立したときに元の領域を消去する方法をとれば，ゴースト領域の数をもっと減少させることができる.

6. アルゴリズム

ここでは (21) 式の根を求めるアルゴリズムを段階をおって示す.

$$f(z)=\sum_{j=0}^{n} c_j z^j=0 \quad (c_n\neq 0). \tag{21}$$

第 1 段 階

2. の系によって σ を決定する段階である. σ を小さくするために根の重心を原点に移動する変数変換，すなわち $z'=z+c_{n-1}/(n\times c_n)$ を行い，(21) 式から z^{n-1} の項を消去した後，**2.** の系と二分法を用いて σ を求める. (2) 式の解は実際の根の範囲よりも大きいので，σ は (21) 式の根が要求されている精度に比較して低精度で充分である. 全根の存在する領域は中心 $-c_{n-1}/(n\times c_n)$, 半径 σ の円領域 D_0 となるので，interval number に対応づけるために D_0 に外接する正方領域を初期領域とする. 変数変換は演算誤差をともなうので変換をも interval arithmetic で行い，同様の理由から第 2 段階以降の計算には変換後の式を用いずに (21) 式を用いる.

第 2 段 階

矩形領域の各辺を各々 3 等分し，9 個の小領域に分割する. 各辺を 2 等分してもよいが初期領域の中心に根の重心が存在し，4 個の小領域のすべてに根が存在することになるので中心を通らない分割を行い，1 領域でも根の存在しない領域を早く求め，加速をはかった.

第 3 段 階

9 個の小領域の各々について F を計算し，$F\not\ni 0$ の領域を消去する. $F\ni 0$ であれば $F'\not\ni 0$, $F'\ni 0$ の 2 つの場合にわける. $F'\not\ni 0$ ならば Newton 法 interval version[3] を実行する. しかしながら，interval arithmetic は結果の広がりが大きくなるので，Newton 法よりも分割の方が早い場合がある. したがって，Newton 法を 1 回行った後の矩形領域の長辺の長さ（以下，領域の巾と言う）が元の領域の巾の d 倍 ($0<d<1$) より大きければ Newton 法を止め，分割を進めるために第 2 段階にもどる. d 倍よりも小さければ領域の巾が ε より小さくなるまで Newton 法をくりかえし，得られた領域に 1 根が存在するものとする. $F'\ni 0$ の場合は領域内に 2 根以上存在する可能性があるので，領域の巾が ε 以上なら分割を進めるために第 2 段階にもどる. ε 以下ならば第 4 段階に進む.

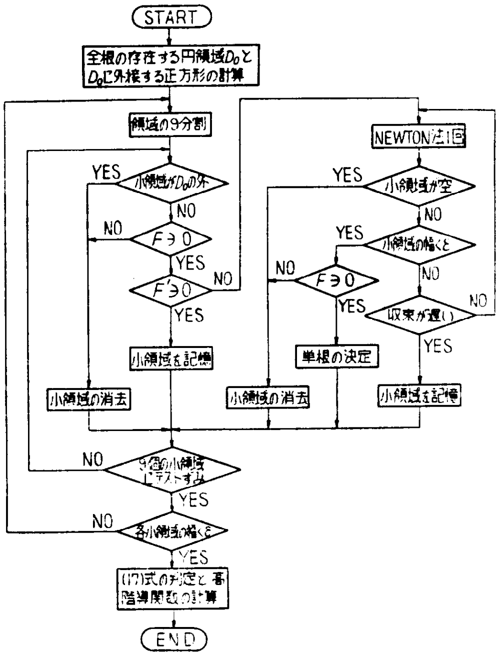

Fig. 1 Flow chart of our algorithm.

第 4 段 階

まず (17) 式によってゴースト領域の消去を行う. ただし各領域を再分割して判定することは，ε を小さくとることと本質的に同じことなので行っていない. 次に高階導関数を Horner の方法により計算し，$F\ni 0$, $F'=F^{(1)}\ni 0$, $F^{(2)}\ni 0, \cdots, F^{(j-1)}\ni 0$ かつ $F^{(j)}\not\ni 0$ となった j を多重根が含まれる領域の指標とする.

以上がアルゴリズムの概略であり，**Fig. 1** にそのフローチャートを示す.

7. 適 用 例

6. に述べたアルゴリズムを倍精度の実数で計算し，その適用例と結果を示す. 数は有限桁で表現されるので，係数はいずれの場合も領域として入力した. この章におけるパラメータと記号は次のように定義する.

ε : すべての小領域の巾が ε 以下になれば計算を終了する.

d : Newton 法から分割にもどる場合の判定定

Table 1 Results of 7.1 ($\varepsilon=10^{-10}$)

	INITIAL DOMAIN	CALCULATED ROOT	NF	ND	NN	NL	NB	M	T
Ex. 1	[7.5156886, −5.5156886] +i[4.7656886, −8.2656886]	[0.00000000001, −0,00000000001] +i[−3.99999999999, −4.00000000001] [5.00000000001, 4.99999999999] +i[−5.99999999999, −6.00000000001] [1.00000000001, 0.99999999999] +i[0.00000000001, −0.00000000001] [−1.99999999999, −2.00000000001] +i[3.00000000001, 2.99999999999]	664	102	71	100	45	45	4
Ex. 2	[3.6812963, −1.2812963] +i[2.4812963, −2.4812963]	[1.65525915697, 1.65525915696] ±i[2.22432736904, 2.22432736903] [−0.49590729842, −0.49590729844] ±i[0.90230030593, 0,90230030591] [3.68129628293, 3.68129628292] +i[0.00000000001, −0.00000000001]	1058	200	141	173	66	74	7
Ex. 3	[3.6091144, −5.0005430] +i[4.3048287, −4.3048287]	[0.49999999298, 0.49999999296] ±i[0.92195443861, 0.92195443860] [−0.49999999732, −0.49999999733] ±i[0.87177977536, 0.871177977535] [−4.99999999885, −4.99999999886] +i[0.00000000001, −0.00000000001] [1.12999999369, 1.12999999368] +i[0.00000000001, −0.00000000001] [−0.99999998612, −0.99999998613] +i[0.00000000001, −0.00000000001]	4017	511	296	349	245	314	34
Ex 4	[1.9362877, −1.6862877] +i[1.8112877, −1.8112877]	[1.00781750057, 1.00781750056] ±i[0.73222227464, 0.73222227463] [1.00000000001, 0.99999999999] +i[0.00000000001, −0.00000000001] [−1.24573093961, −1.24573093962] +i[0.00000000001, −0.00000000001] [0.00000000001, −0.00000000001] ±i[1.41421356238, 1.41421356237] [−0.38495203075, −0.38495203077] ±i[1.18476052768, 1.18476052767]	4425	653	393	473	258	283	43

数. ここでは $d=0.9$ とする.

NF : 分割によって F を計算した回数.

ND : 分割によって F' を計算した回数.

NN : 分割から Newton 法に切り換った回数

NL : Newton 法の総反復回数.

NB : Newton 法の収束が遅く分割にもどった回数.

M : 分割途中で小領域の数が増大するが, このときの小領域の最大数.

T : 大阪大学大型計算機センターの NEAC 2200-700 FORTRAN 700 による run に要した CPU time. (単位: 秒)

7.1 全根が充分に分離している場合

Ex. 1~Ex. 4 を実行した結果を **Table 1** に示す. 根が充分に分離していればゴースト領域は現われず, 根の数と得られた領域の数は等しくなる.

Ex. 1

$$(-7+8i)z^4+(-28-81i)z^3+(-57-64i)z^2 +(592-951i)z+(-500+1088i)=0.$$

Ex. 2

$$z^5-6z^4+14z^3-16z^2-7z-30=0.$$

Ex. 3

$$z^7+4.87z^6-0.67z^5-0.15430003z^4-0.4265z^3 -1.02113z^2-2.48608z-6.2771496=0.$$

Ex. 4

$$z^8-z^7+2z^6-2z^5+3z^3-3z^2+6z-6=0.$$

7.2 重根, 近接根が存在する場合

重根, 近接根が存在すれば **4.** に述べたようにゴースト領域が現われる.

Ex. 5

$$z^4+z^3=0.$$

Ex. 6

$$(z+1)(z-2)^2(z-3)-\delta =z^4-6z^3+9z^2+4z-(12+\delta)=0.$$

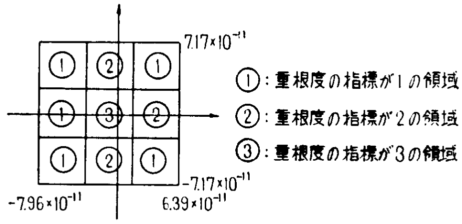

Fig. 2 Goast domains of example 5 ($\varepsilon=10^{-10}$).

Table 2 Domains and CPU times of example 6

δ \ ε	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
10^{-6}	4 #53 311 182	4 #46 311 207	4 4 310 214
10^{-10}	#6 #57 311 197	4 #46 311 232	4 #46 310 251
0	26 91 311 202	28 80 311 271	148 324 1651 407

上　段: (17)式による消去後の領域の数
中上段: 消去前の領域の数
中下段: 分割途中の小領域の最大数 M
下　段: CPU time T

Fig. 2 に Ex. 5 のゴースト領域の位置関係を示し，**Table 2** に Ex. 6 おける (17) 式の判定の前後の領域の数，M, T を示す．

Ex. 5 では z^2 以下の項が 0 なので演算回数が少なく，F の広がりが $\bar{f}$ に近くなり，**Fig. 2** に示すようにゴースト領域の数が **4.**, **5.** の推定と同程度となる．次に Ex. 6 の場合を考える．$\delta=0$ ならば重根をもつのでゴースト領域が現われるのは当然であるが，同じ4次式ながら Ex. 6 は Ex. 5 に比較して F の計算に要する演算回数が多く，F と $\bar{f}$ の差が大きくなり，**4.**, **5.** における推定の 2〜10 倍のゴースト領域が現われている．Table 2 の中で # 印は近接根でゴースト領域が現われる場合であるが，この場合のゴースト領域は重根の場合と本質的に異なっていて，(17)式の判定と，ε を δ に比較して充分小さくとることによって，消滅することが Table 2 よりわかる．

8. む す び

本論文に述べた解法は，係数に誤差がある場合を含めて，多項式の零点の存在領域を決定論的に正しく評価できる．充分に分離した単根の場合は Table 1 に示すように，得られた領域の数が多項式の次数と一致して正しく解が求まる．また重根や近接根の場合には真の根のまわりにゴースト領域が現われることを **4.** に示し，(17)式による判定が有効であることを Ex. 6 によって示した．この場合は充分に分離した根の精度に比較して誤差は大きくなるが，ゴースト領域を含めて根の存在領域とすれば，根の分布状態に無関係に根を決定論的に判定可能である．本論文で述べたアルゴリズムは根を決定論的に判定するために，メモリと演算時間にはあまり考慮をはらっていない．すなわち Table1, Table 2 からわかるように，次数が高い場合や重根，近接根が存在する場合にはメモリ，演算時間が増大する．我々のアルゴリズムの中で，初期領域の決定と高階導関数の計算以外の部分は解析関数で成立するので，F と F' が計算可能な解析関数であればどのような関数に対しても有効である．以上に述べたごとく，本論文に示した解法は根を決定論的に判定できるという特徴をもっており，得られた領域の内部には必ず全根が存在するので，誤差評価を含めてこの解法のもつ意義は大きいものと考える．

終りに，本研究を進めるに当たり終始有益な御教示を賜った大阪大学工学部久保忠雄教授，安井裕助教授，ならびに米谷文男助手に深謝いたします

参 考 文 献

1) 大中幸三郎，安井　裕：誤差評価の可能な多重精度演算，情報処理，Vol. 15, No. 2, pp. 110〜117 (1974).
2) K. Ohnaka, H. Yasui & T. Kubo: An Automatic Error Estimation Method in Numerical Calculation, Technol. Repts. Osaka Univ., Vol. 25, pp. 257〜265 (1975).
3) R. E. Moore: Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1966).
4) J. A. Grant & G. D. Hitchins: The solution of polynomial equations in interval arithmetic, Computer J., Vol. 16, No. 1, pp. 69〜72 (1973).
5) P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1, pp. 457〜458, John Wiley & Sons, New York (1974).
6) A. П. ミーシナ, И. B. プロスクリャコフ (麻嶋格次郎訳): 高等代数，現代応用数学ハンドブック 4, p. 174, 総合図書 (1967).

(昭和 50 年 9 月 22 日受付)