論　文

資源切り出し型待ち行列の解析*

紀　一　誠**

Abstract

This paper describes a queueing model for computer performance evaluation such as storage allocation problems.

The model consists of finite c units of resources, Poisson-input and exponential-using-time distribution.

The request which takes ω units out of c arrives with traffic density λ_ω, and it is scheduled in FIFO order as soon as sufficient free units of resources become available.

The probability distribution of ω is arbitrary ($1 \leqq \omega \leqq c$). In this model, renewal theory is applyed to analyze the distribution of used resources.

And the following items concerning performance evaluation can be obtained: expected utilization of resources, expected waiting time for resources, expected number of requests under using resources, equilibrium distribution of system size and used resources, existence condition of equilibrium distribution.

1. はじめに

コンピュータ・システムの性能評価を解析的に進めようとする際にはシステム全体を一挙にモデル化するのではなく，大略独立とみなせるいくつかのサブシステムに分割し，問題を局所化し解析していく階層構造モデルによる手法が提案されている[4]．

この場合は対象システムをその個性に即しながらどのように分割し階層構造化するのかといった問題と，分割局所化されたサブシステム個有の問題を如何に解明していくのか，といった２種類の問題が存在する．

このうち，サブシステムの解析では種々の競合問題の定量的な扱い方が問題になることが多く，待ち行列理論やトラヒック理論が有力な道具になる場合も多いのであるが，既存のモデルの中に適切なものを見出し得ない場合も多く，手掛りとなる理論の構築から始めねばならない場合も多い．

本稿は，有限な大きさからなる一定の領域に対してさまざまな大きさを持つ切り出し要求が発生してくるような競合問題を待ち行列の問題としてモデル化し，その理論的な扱いについて述べたものである．

本モデルはシステムの性能評価のためのものであることを念頭に置いて，待ち行列理論やトラヒック理論の窓口とか出線という言葉に換えて資源という用語を使うことにし，ある量の資源を確保しある時間使用することを資源を切り出し保留する，と言うことにする．

この型の競合問題は主としてメモリ域の競合問題を扱う場合に発生する事が多く[5]，この方向からの接近として，B. Randell[1] によるシミュレーション結果，T. Bettridge[2]，伊沢[3] による解析結果などが知られている．

Bettridge, 伊沢は待ち行列中に常に切り出し要求が存在するというトラヒックの飽和条件を前提とし，メモリ保留時間の平均値がマルチプログラミング多重度 m の関数となるようなモデルを設定し解析を行っている．

本稿で扱うモデルはこのトラヒックの飽和条件を取り外し，任意のトラヒックを前提に解析する．一方，

* Analysis of queueing model with finite number of resources and arbitrary request distribution by Issei KINO (EDP Systems Support Division, Nippon Electric Co., Ltd.)
** 日本電気(株)情報処理システム支援本部

資源の保留時間 H(確率変数) は m による影響は受けないものと仮定して解析する.

2. 資源切り出し型待ち行列モデル

資源に対する切り出し要求をトラヒック理論に従って “呼” と呼ぶことにし, 以下の如く待ち行列モデルを設定する (**Fig. 1** 参照).

モデルの設定

① 対象とする領域は全体で c 個よりなる資源に分割されており, そのうちの ω 個の切り出し要求を持つ呼が単位時間当り λ_ω 個なる到着率を持ってポアソン到着をするものとする. 但し, ω は, $1 \leqq \omega \leqq c$ なる現実的条件下で考えることにする. 系全体への到着率は, $\lambda = \sum_\omega \lambda_\omega$ である.

② 資源の切り出しは資源相互の物理的位置関係には無関係に, 即ち, 必ずしも連結した空き資源ではなくても, 要求個数以上の空き資源があれば切り出せるものとする.

③ 空き資源が切り出し要求個数に満たない場合には待ち行列に着き待つものとする.

④ 資源の切り出しは先着順 (FIFO ルール) に行われるものとし, 後着の呼は要求個数が空き資源数以下であっても先着呼より先に資源の割り付けを受けることはないものとする.

⑤ 呼の終了により資源が解放された場合には, 新たな空き資源に対して, 待ち行列の先頭から順次可能な限りの呼を割り付ける.

⑥ 呼の資源保留時間 H はパラメータ μ なる指数分布に従うものとする. (以上)

3. 記号の定義と解析方法

以降で用いる記号を示し, 解析を進める上での基本的な考え方を示す. **Table 1** に使用する確率変数とその定義を示す. **Table 2** に使用するパラメータと関数を示す.

Table 1 List of the random variables

記　号	定　義
$J(t)$	時刻 t において系に存在する系内呼数
$K(t)$	時刻 t において資源を保留している資源保留呼数
J	任意時点で系に存在する系内呼数
K	任意時点で資源を保留している資源保留呼数
H	呼の資源保留時間
X_i	呼 i の資源切り出し要求個数
Z	任意時点で保留されている資源総数
W	呼が資源を切り出せるまでの待ち時間
$W(\omega)$	ω 個の資源切り出し要求を持つ呼の待ち時間
L	任意時点における待ち行列長
$S(n)$	$S(n)=X_1+X_2+\cdots+X_n$

Table 2 List of the parameters and functions

記　号	意　味
λ_ω	ω 個の切り出し要求を持つ呼の到着率 (個/秒)
λ	$\lambda=\sum\lambda_\omega$ 系全体への到着率
h	$h=E(H)$ 平均資源保留時間
μ	$\mu=1/h$ 終了率
a	$a=\lambda h$ 資源切り出し呼量 (アーラン)
m	$m=[c/\min(\omega)]$ 資源保留最大呼数
$\{f_\omega\}$	$f_\omega=Pr\{Xi=\omega\}=\lambda_\omega/\lambda$
φ	$\varphi=E(Z)/c$ 平均資源占有率
$M(0)$	$M(0)=P_r\{W>0\}$ 到着呼が待ちに入る確率
$P(j)$	$P(j)=P_r\{J=j\}$
$D(k)$	$D(k)=P_r\{K=k\}$
$I(k)$	$I(k)=P(0)+P(1)+\cdots+P(k)$ J の分布関数
$Z(l)$	$Z(l)=P_r\{Z\leqq l\}$ Z の分布関数
$F_n(l)$	$F_n(l)=Pr\{S(n)\leqq l\}$ $S(n)$ の分布関数
$u_n(l)$	$u_n(l)=F_1(l)+F_2(l)+\cdots+F_n(l)$ (擬再生関数)
$r(j,k)$	$r(j,k)=P_r\{K=k^*\mid J=j\}$
$v(j,l)$	$v(j,l)=P_r\{Z\leqq l\mid J=j\}$
$\gamma(j)$	$\gamma(j)=E(Z\mid J=j)$
$l(k)$	$l(k)=F_k(k)+F_k(k+1)+\cdots+F_k(c), k\leqq m$; $l(k)=0, k>m$
$\varphi_j(l,m)$	呼の終了により系内呼数が j から $j-1$ に変る時に, 資源保留呼数が l から m に変る確率. $\sum_{m=l-1}^{j-1}\varphi_j(l,m)=1$
$\beta_j(l,m)$	呼の到着により系内呼数が j から $j+1$ に変る時に, 資源保留呼数が l から m に変る確率. $\beta_j(l,l)+\beta_j(l,l+1)=1$
$g_{j,k}(r)$	$g_{j,k}(r)=j-k+1-\{F_k(r)+F_{k+1}(r)+\cdots F_j(r)\}$

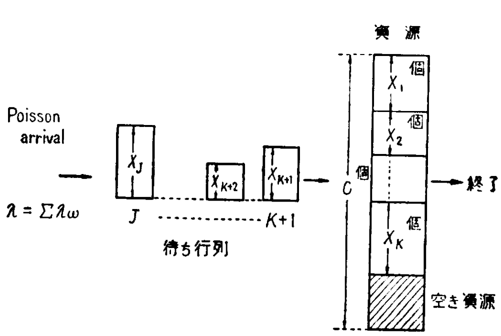

Fig. 1 Illastration of the model.

モデルの設定条件①から次のことが言える. ポアソン到着の重ね合わせはポアソン到着であるから呼は全体としてパラメータ λ のポアソン到着をする.

従って, $f_\omega=\lambda_\omega/\lambda$ とすれば, f_ω は到着呼の切り出し要求が ω 個である確率と考えることができる.

よって, 系は, 互に独立に同一の分布 $\{f_\omega\}$ に従う切り出し要求個数 X_i を持つ呼がパラメータ λ のポアソン到着をするもの, と考えることができる.

解析にあたっては, 系の状態推移がマルコフ過程をなすことを示し, これを用いて系の状態方程式を作り, 定常条件を付し解くことにより種々の結果を導く.

資源個数の有限性に起因する現象を扱うのには再生理論を利用する．即ち，トラヒックの飽和条件（λ が非常に大きく，常に待ち行列中に呼が存在するような非定常条件）の下では，資源を保留している呼数は次の $N(c)$ なる確率変数によって示される．

$$N(c)=\max\{n \mid X_1+X_2+\cdots+X_n\leqq c\}$$

ところが，再生理論で一般に時間パラメータとされているものを資源数 c と読み換えれば，$N(c)$ は c 以内の再生点の数を示す確率変数であり，その性質については既に研究がなされており結果を用いることができる[6)~8)]．対象としている系はトラヒックの飽和条件を取り外しているので，資源の有限性に関する性質は系の状態を記述する出生死滅過程の状態方程式の係数に $u_j(c)$ の形で反映されることになる．

4. 解析諸結果

λ_ω 及び c が与えられており，従って切り出し要求個数の分布 $\{f_\omega\}$ が与えられているものとする．

一方，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互に独立に同一の分布 $\{f_\omega\}$ に従う確率変数であるから，その n 個の和 $S(n)$ の分布関数 $F_n(c)=P_r\{S(n)\leqq c\}$ は $\{f_\omega\}$ の n 重のたたみ込みとして与えられる量であり，従ってまた，$F_n(c)$ の和 $u_j(c)$ もまた $\{f_\omega\}$ により求まる量である．よって，$F_n(c)$ 及び $u_j(c)$ なる関数を用いて求める諸量が表現できればよいことになる．

（1） 系内呼数に関連したもの

① 系内呼数の定常分布

$$P(j)=\begin{cases}\{a^j\Big/\prod_{i=1}^{j}u_i(c)\}P(0), & j\leqq m\\ \{a/u_m(c)\}^l P(m), & j=m+l,\ l\geqq 1\end{cases} \tag{4.1}$$

$$P(0)=\Big[1+\sum_{j=1}^{m-1}a^j\Big/\prod_{i=1}^{j}u_i(c)+a^m u_m(c)\div\{u_m(c)-a\}\prod_{i=1}^{m}u_i(c)\Big]^{-1} \tag{4.2}$$

② 平均系内呼数（J の期待値）

$$E(J)=\Big[\sum_{l=1}^{m}la^l\Big/\prod_{i=1}^{l}u_i(c)+[ma/\{u_m(c)-a\}+u_m(c)a/\{u_m(c)-a\}^2]a^m\Big/\prod_{i=1}^{m}u_i(c)\Big]P(0) \tag{4.3}$$

③ 定常分布が存在するための必要十分条件

$$|a/u_m(c)|<1 \tag{4.4}$$

（2） 資源保留呼数に関連したもの

① **資源保留呼数 K の分布**

$$D(k)=P_r\{K=k\}=F_k(c)\{1-I(k-1)\}-F_{k+1}(c)\{1-I(k)\} \tag{4.5}$$

② **平均資源保留呼数（K の期待値）**

$$E(K)=a \tag{4.6}$$

（3） 被保留資源個数に関連したもの

① **保留されている資源個数 Z の分布**

$$Z(l)=P_r\{Z\leqq l\}=\sum_{j=0}^{m-1}v(j,l)P(j)+[v(m,l)P(m)u_m(c)\div\{u_m(c)-a\}] \tag{4.7}$$

② **平均被保留資源個数（Z の期待値）**

$$E(Z)=\sum_{j=1}^{m-1}\gamma(j)P(j)+[\gamma(m)P(m)u_m(c)\div\{u_m(c)-a\}] \tag{4.8}$$

（4） 待ち時間，待ち行列に関連するもの

① 平均待ち時間（W の期待値）

$$\begin{aligned}E(W)/h=&\,g_{2,2}(c)F_1(c)P(1)\\&+\sum_{j=2}^{m-1}\Big\{g_{j+1,2}(c)F_1(c)-\sum_{k=2}^{j}F_k(c)g_{j+1,k+1}(c)\div(k-1)k\Big\}P(j)+\Big[\frac{u_m(c)P(m)}{u_m(c)-a}\Big\{g_{m,2}(c)\\&\times F_1(c)-\sum_{k=2}^{m-1}F_k(c)g_{m,k+1}(c)\Big/(k-1)k\Big\}\Big]\\&+\Big\{\frac{u_m(c)}{u_m(c)-a}\Big\}^2P(m)\Big\{F_1(c)-\sum_{k=2}^{m}F_k(c)\div(k-1)k\Big\}\end{aligned} \tag{4.9}$$

② 切り出し要求が ω 個の呼の平均待ち時間

$$\begin{aligned}E\{W(\omega)\}/h=&\,g_{1,1}(c-\omega)F_1(c)P(1)\\&+\sum_{j=2}^{m}\Big\{g_{j,1}(c-\omega)F_1(c)-\sum_{k=2}^{j}F_k(c)\times g_{j,k}(c-\omega)/(k-1)k\Big\}P(j)+\frac{aP(m)}{u_m(c)-a}\\&\times\Big\{g_{m,1}(c-\omega)F_1(c)-\sum_{k=2}^{m}F_k(c)\times g_{m,k}(c-\omega)/(k-1)k\Big\}+\frac{aP(m)u_m(c)}{\{u_m(c)-a\}^2}\\&\times\Big\{F_1(c)-\sum_{k=2}^{m}F_k(c)/(k-1)k\Big\}\end{aligned} \tag{4.10}$$

③ 平均待ち行列長（L の期待値）

$$E(L)=E(J)-a \tag{4.11}$$

④ 到着呼が待ち合わせねばならない確率

$$M(0)=1-\sum_{j=0}^{m-1}F_{j+1}(c)P(j) \tag{4.12}$$

5. 解　析

5.1 系内呼数の定常分布

$J(t)=j, K(t)=k$ なる状態を (j, k) と表現する．系が $\boldsymbol{i}=(i_1, i_2)$ に入ってから $\boldsymbol{j}=(i_1-1, j_2)$ に推移するまでの時間を $\tau(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ とする（但し，$i_2-1\leqq j_2\leqq i_1-1$）．呼の資源保留時間がパラメータ μ なる指数分布に従うことから，$\tau(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ はパラメータ $i_2\mu$ なる指数分布に従う．呼の到着はポアソン到着で，到着呼の資源切り出し要求個数分布は t に依らないので，1回の状態変化にともなう状態間推移の条件付き確率は変化前の状態により完全に規定することができる．従って，対象とする系は時間的に一様なマルコフ過程をなすと考えることができる．

あらためて，次のようなベクトル値をとる定常マルコフ過程を考えることにする．

$$\{X(t, \boldsymbol{u}), t\in T=[0, \infty), \boldsymbol{u}\in \Omega^2\}$$

但し，状態空間 Ω^2 は $\Omega=(0, 1, 2, \cdots)$ の直積空間とする．状態空間のうち，**Fig. 2** に示す●印を付けた点の集合 M が既約な集合となる．以後 M 上での状態推移について考えていくことにする．

$X(t, \boldsymbol{u})=(i_1, i_2)$ のとき，$(t, t+h)$ において1回の状態変化の生ずる確率（推移強度関数）を $q_{(i_1, i_2)}h+o(h)$ とし，1回の変化で (j_1, j_2) に移る確率（無限小パラメータ）を $q_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}h+o(h)$ とする．但し，$o(h)$ は $h>0$ の高次項とする．

$$P_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}(t)=P_r\{X(t, \boldsymbol{u})=(j_1, j_2) \mid X(0, \boldsymbol{u})=(i_1, i_2)\}$$

とすると，コルモゴロフの前向き微分方程式は次の如くに表わされる．

$$\frac{d}{dt}P_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}(t)=-q_{(j_1, j_2)}P_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)}(t) + \sum_{(k_1, k_2)} q_{(k_1, k_2), (j_1, j_2)} \times P_{(i_1, i_2), (k_1, k_2)}(t) \qquad (5.1)$$

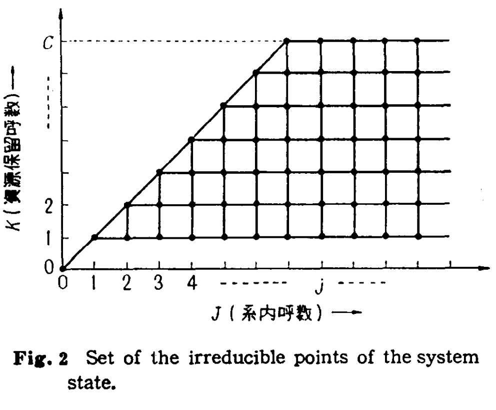

Fig. 2 Set of the irreducible points of the system state.

考えている系においては次の如くの関係が成り立っている（**Fig. 3** 参照）．

① $q_{(j, l)}=\lambda+l\mu, \quad 0\leqq l\leqq j$

② $q_{(j, l), (j-1, m)}=\varphi_j(l, m)l\mu, \quad 1\leqq l\leqq m+1\leqq j$

③ $q_{(j, l), (j+1, m)}=\lambda\beta_j(l, m), \quad 1\leqq l\leqq j, \quad m=l, l+1$

④ $q_{(0, 0), (1, 1)}=\lambda$

⑤ $q_{(j, l), (x, y)}=0$

但し (x, y) は①〜④にあげた以外の状態．

以上の関係を(5.1)に入れ次式を得る．

$$\frac{d}{dt}P_{(x, y), (j, k)}(t)=-(\lambda+k\mu)P_{(x, y), (j, k)}(t) + \sum_{l=1}^{k+1}\varphi_{j+1}(l, k)l\mu P_{(x, y), (j+1, l)}(t) + \sum_{l=k-1}^{k}\beta_{j-1}(l, k)\lambda P_{(x, y), (j-1, l)}(t) \qquad (5.2)$$

ここで，$P_{(x, j)}(t)$ を(5.3)の如くに定義し，上式の両辺について $\sum_{y=1}^{x}\sum_{k=1}^{j}$ の和をとり，後に証明する **5.2** の補題 **2.** を用いることにより，以下に示す如くの微分差分方程式を得る．

$$P_{(x, j)}(t)=P_r\{J(t)=j \mid J(0)=x\} = \sum_{y=0}^{x}\sum_{k=0}^{j}P_{(x, y), (j, k)}(t) \qquad (5.3)$$

微分差分方程式(5.4)　$(x\geqq 0)$

$$P'_{(x, j)}(t)=-\lambda P_{(x, j)}(t)-u_j(c)\mu P_{(x, j)}(t) + u_{j+1}(c)\mu P_{(x, j+1)}(t)+\lambda P_{(x, j-1)}(t) \qquad j\geqq 1$$

$$P'_{(x, 0)}(t)=-\lambda P_{(x, 0)}(t)+\mu P_{(x, 1)}(t), \qquad j=0$$

(5.4)は出生率を λ，死滅率を $u_j(c)\mu$ と考えた時の出生死滅過程についてのコルモゴロフの前向き微分方

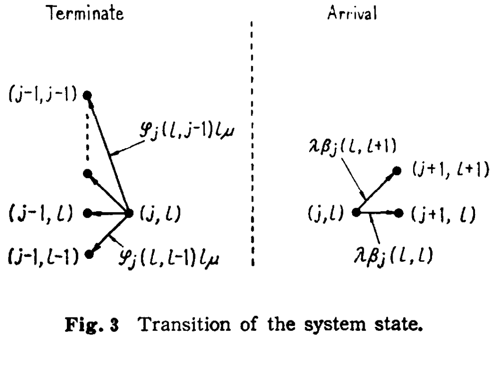

Fig. 3 Transition of the system state.

程式になっている．出生死滅過程については既に種々の性質が調べられている[6),7)]．

この出生死滅過程が再帰的正状態であるための必要十分条件は(5.5)に示される．

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^i}{u_1(c)u_2(c)\cdots u_i(c)}<\infty \tag{5.5}$$

この時定常分布 $P(j)=\lim_{t\to\infty}P_{(x,j)}(t)$ が存在し，(5.6)の如くになる．

$$P(j)=\left\{a^j\Big/\prod_{i=1}^{j}u_i(c)\right\}P(0) \tag{5.6}$$

確率条件 $\sum_{j=0}^{\infty}P(j)=1$ を付することにより $P(0)$ は次式の如くに求まる．

$$P(0)=\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}a^j\Big/\prod_{i=1}^{j}u_i(c)\right\}^{-1} \tag{5.7}$$

(5.5), (5.6), (5.7) 式は見掛け上無限級数の形をしているが，$n>m$ なる n に関しては $F_n(c)=0$ であり $u_m(c)=u_n(c)$ であることに注意して各式を整理し直すことにより，(4.1), (4.2), (4.4)を得る．

5.2 資源の保留状態に関する解析

(4.5)から(4.8)を証明する．その準備としていくつかの補題を証明しておく．

補題 1.

FIFO ルールの時，$r(j,k)$ は次の如くである．

$$r(j,k)=\begin{cases}F_k(c)-F_{k+1}(c), & 1\leqq k\leqq j-1\\ F_j(c), & k=j\end{cases}$$

証　明

$J=j$ のとき K は次式により定義される確率変数である．

$$K=\max\{k\,|\,S(k)\leqq c\},\quad 1\leqq k\leqq j$$

$1\leqq k\leqq j-1$ について次の関係が成り立つ．

$$P_r\{K\geqq k\,|\,J=j\}=P_r\{K\geqq k\}=P_r\{S(k)\leqq c\}$$

従って次の関係を得る．

$$\begin{aligned}r(j,k)&=P_r\{K=k\,|\,J=j\}\\&=P_r\{K\geqq k\,|\,J=j\}-P_r\{K\geqq k+1\,|\,J=j\}\\&=F_k(c)-F_{k+1}(c)\end{aligned}$$

$k=j$ の場合

$$P_r\{K\geqq j\,|\,J=j\}=P_r\{S(j)\leqq c\}$$

$$P_r\{K=j+l\,|\,J=j\}=0,\quad l=1,2,\cdots$$

よって，$r(j,j)=F_j(c)$ （以上）

補題 2.

$$E(K\,|\,J=j)=u_j(c)$$

証　明

補題 1. を用いて以下を得る．

$$\begin{aligned}E(K\,|\,J=j)&=\sum_{k=1}^{j}kP_r\{K=k\,|\,J=j\}\\&=\sum_{k=1}^{j}kr(j,k)=u_j(c)\end{aligned}$$

（以上）

補題 3.

$$v(j,l)=\begin{cases}u_j(l)-\sum_{i=1}^{j-1}F_{i+1}(c)F_i(l)/F_i(c), & j\geqq 2\\ u_j(l), & j=1\\ 1, & j=0\end{cases}$$

証　明

補題 2 より $j\geqq 2$ について次式を得る．

$$\begin{aligned}左辺&=\sum_{k=1}^{j}P_r\{K=k\,|\,J=j\}P_r\{S(k)\leqq l\,|\,S(k)\leqq c\}\\&=\sum_{k=1}^{j}r(j,k)F_k(l)/F_k(c)=右辺\end{aligned}$$

また，$P_r\{Z\leqq l\,|\,J=1\}=F_1(l)=v(1,l)$

$P_r\{Z\leqq l\,|\,J=0\}=1=v(0,l)$ （以上）

補題 4.

$$\gamma(j)=c+1-\sum_{k=1}^{j}l(k)r(j,k)/F_k(c)$$

証　明

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{c}v(j,l)&=\sum_{l=0}^{c}P_r\{Z\leqq l\,|\,J=j\}\\&=\sum_{m=1}^{c+1}mP_r\{Z=c+1-m\,|\,J=j\}\\&=c+1-E(Z\,|\,J=j)\end{aligned}$$

一方，補題 3. を用いて次式を得る．

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{c}v(j,l)&=\sum_{k=1}^{j}\{r(j,k)/F_k(c)\}\sum_{l=0}^{c}F_k(l)\\&=\sum_{k=1}^{j}l(k)r(j,k)/F_k(c)\end{aligned}$$

（以上）

補題 5.（証明略）

$|a/u_m(c)|<1$ のとき次式が成り立つ．

$$\sum_{l=1}^{\infty}P(m+l)=aP(m)/\{u_m(c)-a\}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}lP(m+l)=au_m(c)P(m)/\{u_m(c)-a\}^2$$

(1) (4.5)式の証明

$$D(k)=\sum_{j=k}^{\infty}r(j,k)P(j)$$

補題 1. を用いて以下の如くになる．

$$\begin{aligned}&=F_k(c)P_r\{J\geqq k\}-F_{k+1}(c)P_r\{J\geqq k+1\}\\&=F_k(c)\{1-I(k-1)\}-F_{k+1}(c)\{1-I(k)\}\end{aligned}$$

（以上）

(2) (4.6)式の証明

$$E(K)=\sum_{k=1}^{\infty} kP_r\{K=k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} k[F_k(c)P_r\{J\geqq k\}$$
$$-F_{k+1}(c)P_r\{J\geqq k+1\}]$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(c)P(k)=a\sum_{k=0}^{\infty} P(k)=a \qquad (以上)$$

(3) (4.7)式の証明

補題 3. を用いて次式を得る.

$$Z(l)=P_r\{Z\leqq l\}=\sum_{j=0}^{\infty} v(j,l)P(j)$$

上式は $j\geqq m$ に対して, $v(j,l)=v(m,l)$ であるので補題5を用いて整理することにより与式を得る.

(以上)

(4) (4.8)式の証明

補題4を用いて次式を得る.

$$E(Z)=\sum_{j=0}^{\infty} E(Z|J=j)P(j)=\sum_{j=0}^{\infty} \gamma(j)P(j)$$

$k\geqq m$ に対して, $l(k)=0, F_k(c)=0$ である.

補題5を用いて上式を整理することにより与式を得る. (以上)

5.3 待ち時間に関する解析

ω 個の資源切り出し要求を持つ呼が系に到着する直前の系内呼数が j である時, この到着呼が資源を切り出せるまでの待ち時間を $W_j(\omega)$ とする. この呼の到着時刻を τ_0 とし, その後の i 番目の呼の終了時刻を τ_i とする. 呼の終了間隔である, $T_i=\tau_i-\tau_{i-1}$ なる確率変数 T_i を考える. τ_0 に到着した呼が資源を切り出せるまでに終了した呼の数 (確率変数) を N とすると次の如くの関係がある.

$$W_j(\omega)=T_1+T_2+\cdots+T_N$$

(4.9) 以下の諸式を証明するためにいくつかの補題を証明しておく.

補題 6.

$$E\{W_j(\omega)\}=\sum_{n=1}^{\infty} P_r\{N=n\}\sum_{i=1}^{n} E(T_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty} P_r\{N\geqq i\}E(T_i)$$

証 明

$\xi_j(\omega,t)=P_r\{W_j(\omega)\leqq t\}$, $\Phi_n(t)=P_r\{T_1+T_2+\cdots+T_n\leqq t\}$ とする.

$$E\{W_j(\omega)\}=\int_0^t td\xi_j(\omega,t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} P_r\{N=n\}\int_0^t td\Phi_n(t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} P_r\{N=n\}\sum_{i=1}^{n} E(T_i) \qquad (以上)$$

補題 7.

$$E(T_i)=\sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k)/k\mu$$
$$=\begin{cases} h\{F_1(c)-\sum_{k=2}^{j-i+1}\dfrac{F_k(c)}{(k-1)k}\} & i\leqq j-1 \\ hF_1(c) & ,\ i=j \end{cases}$$

証 明

状態 (j,k) なる系の, 次の呼の終了までの時間間隔は, $G_k(t)=1-e^{-k\mu t}$ なる分布関数を持つ指数分布に従う. T_i は $(i-1)$ 個の呼が終了した後の呼終了間隔を示す事から, T_i の従う分布関数を $B_i(t)$ とすれば以下の如くに示される.

$$B_i(t)=\sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k)G_k(t)$$
$$=1-\sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k)e^{-k\mu t}$$

上式より期待値を計算し与式を得る. (以上)

補題 8.

$$P_r\{R_j(\omega)\leqq r\}=F_{j-r}(c-\omega)$$

但し, $N=R_j(\omega)$

証 明

切り出し要求 ω を持つ呼の到着直前の系が (j,k) であったとする. この呼が資源を確保するまでに終了する呼 $1,2,\cdots,r$ によって解放される資源個数を $Y_1, Y_2,\cdots,Y_r$ とすると, 待ち行列中に存在している呼の資源要求個数の総和は, $S(j)-S(k)+\omega$ である.

故に, $R_j(\omega)$ は次式で定義される確率変数となる.

$$R_j(\omega)=\min\{r|c-S(k)+Y(r)\geqq S(j)-S(k)+\omega\}$$
$$=\min\{r|Y(r)\geqq S(j)-(c-\omega)\}$$

ここで, $Y(r)\geqq y$ という事は, $R_j(\omega)\leqq y$ である事に注意して次式を得る (**Fig. 4** 参照).

$$P_r\{R_j(\omega)\leqq r\}=P_r\{Y(r)\geqq S(j)-(c-\omega)\}$$
$$=P_r\{S(j)-Y(r)\leqq c-\omega\}$$

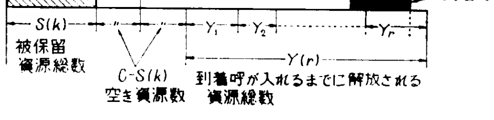

Fig. 4 Relations between the allocated requests and waiting requests.

ところが終了呼 $1, 2, \cdots, r$ は系内呼 $1, 2\cdots, j$ のいずれかである事より上式はまた次の如くになる.

$$=P_r\{S(j-r)\leqq c-\omega\} \qquad (以上)$$

補題 9.

$$\sum_{\omega} f_{\omega} g_{j,k}(c-\omega)=g_{j+1,k+1}(c)$$

証　明

$$左辺=\sum_{\omega} f_{\omega}\{(j-k+1)-\sum_{i=k}^{j} F_i(c-\omega)\}$$

$$=j-k+1-\sum_{i=k}^{j}\sum_{\omega} f_{\omega} F_i(c-\omega)$$

ここで, $\sum_{\omega} f_{\omega} F_i(c-\omega)=F_{i+1}(c)$ なる関係を上式に入れ整理し右辺を得る. (以上)

補題 10. (証明略)

$$^*P(j)=P(j)$$

但し, $^*P(j)$ は呼の到着直前の系内呼数が j である確率であり, 次式により定義される.

$$^*P(j)=\lim_{h\to 0} P_r\{J(t)=j\,|\,J(t+h)=J(t)+1\}$$

補題 11. (証明略)

$$P_r\{R_j\leqq r\}=F_{j-r+1}(c)$$

但し, R_j は系内呼数が j のとき到着した呼が資源を切り出せるまでに終了していく呼数を示す確率変数であり, $R_j=\sum_{\omega} f_{\omega} R_j(\omega)$ で定義される.

(1) (4.10)式の証明

$P_r\{N\geqq i\}=1-F_{j-i+1}(c-\omega)$ なる関係に注意し, 補題6を用いて次式を得る.

$$\frac{E\{W_j(\omega)\}}{h}=\begin{cases} F_1(c)g_{j,1}(c-\omega)-\sum_{k=2}^{j} g_{j,k}(c-\omega)\dfrac{F_k(c)}{(k-1)k} & ,\ j\geqq 2 \\ F_1(c)g_{1,1}(c-\omega) & ,\ j=1 \end{cases}$$

一方, 補題 10 を用いて次の関係を得る.

$$E\{W(\omega)\}=\sum_{j=0}^{\infty} E\{W_j(\omega)\}{}^*P(j)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} E\{W_j(\omega)\}P(j)$$

さらに, $j\geqq m+1$ に対して $F_j(c-\omega)=0$ であり, また $g_{j,k}(c-\omega)=g_{m,k}(c-\omega)+(j-m)$ である.

以上の関係と補題5を用いて上式を整理することにより与式を得る. (以上)

(2) (4.9)式の証明

$E(W)=\sum_{\omega} f_{\omega} E\{W(\omega)\}$ であるから(4.10)式の両辺についての和をとることにより与式を得る.

このとき, $g_{m+1,k}(c)=g_{m,k}(c)+1$, $g_{m+1,m+1}(c)=1$ なる関係に注意し, 補題9を用いる. (以上)

(3) (4.11)式の証明

$$E(L)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}(j-k)r(j,k)P(j)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\{j-u_j(c)\}P(j)$$

$$=E(J)-a \qquad (以上)$$

(4) (4.12)式の証明

$$M(0)=\sum_{j=0}^{\infty} P_r\{R_j\geqq 1\}{}^*P(j)$$

補題 10 及び補題 11 を上式に用いることにより与式を得る. (以上)

6. まとめ

資源切り出し型待ち行列に関する理論的な諸問題のうち基本的なものについて述べた.

本モデルの簡単な数値例は文献 5) に示されている.

本モデルの拡張方向としては呼の発生を呼源有限タイプのものとすること, 割り付け方式を先着順以外のものに拡張すること, 資源保留時間 H を ω の関数と考えて解くことなどが考えられる.

最後に, 本研究の機会を与えていただいた当社情報処理産業システム事業部 新田謙次郎課長, 伊達彬主任並びに有益な助言をいただいた関係各位に深く感謝いたします.

参考文献

1) B. Randel: A note on Storage Fragmentation and Program Segmentation, CACM, Vol. 12, No. 7, pp. 356～372 (1969)
2) T. Betteridge: An Analytic Storage Allocation Model, Acta Informatica, Vol. 3, pp. 101～122 (1974)
3) 伊澤喜美男：動的再配置の解析と最適システムの設計, 情報処理, Vol. 16, No. 5, pp. 410～418 (1975)
4) 関野　陽：階層構造モデルによる Multics システムの性能評価, 情報処理学会システム性能評価研究会資料, SE 15-1 (1976)
5) 紀　一誠：資源切り出し型待ち行列モデルによるメモリ競合問題の解析, 情報処理学会システム性能評価研究会資料, SE 13-2 (1976)
6) ホーエル・ポート・ストーン：確率過程入門, 東京図書 (1974)
7) 魚返　正：確率論, 朝倉書店 (1973)
8) 細川考行：待ち行列理論入門, 社内資料 (1972)

(昭和 52 年 2 月 7 日受付)
(昭和 52 年 8 月 16 日再受付)