Vol.2010-MPS-81 No.16
Vol.2010-BIO-23 No.16
2010/12/16

ボラティリティの予測手法とデルタヘッジ戦略の収益性

田中 健太郎[†1]　　宮 崎 浩 一[†1]

本研究では, オプションのデルタヘッジ戦略への利用を踏まえて, 将来の実現ボラティリティを予測するモデルを提案し, 既存モデルに基づく場合とデルタヘッジ戦略の収益性を比較検討する．提案モデルは, 実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比に関する時系列データを利用したものであり, デルタヘッジ戦略の収益性は, 既存モデルによるものよりも高い.

Volatility forecasting and profitability of delta hedging strategy

Kentaro Tanaka [†1] and Koichi Miyazaki [†1]

In this research, we propose a new volatility forecasting model to utilize it for delta hedging strategy and then examine its profitability in comparison with various kinds of existing models. The building block of our model is time series data of ratio of implied volatility to realized volatility. The profitability of the delta hedging strategy adopting our model is superior to those utilizing prominent existing models.

1. はじめに

デルタヘッジとは，オプション (金融商品の一つであり，所定の期日 (満期) に原資産 (株式や債券) をあらかじめ定められた価格 (権利行使価格) で売買する権利) の価格変動リスクを，原資産 (株式等) の売買によって回避 (ヘッジ) する方法である．このデルタヘッジによって得られるオプションと原資産のポートフォリオには価格変動リスクが無いため，そのリターンは無リスク金利に等しくなるという無裁定条件に基づいてオプションの価格付けがなされている．原資産の変動に幾何ブラウン運動を仮定してオプションの評価式を導出したものが著名なブラックショールズ[1)](以後 BS と略す.) モデルである.

BS モデルを用いると，オプション価格は，無リスク金利，現在の原資産価格，残存期間 (現時点から満期までの期間)，権利行使価格，原資産の満期までの価格変動性 (以下，ボラティリティと呼ぶ) の 5 つのパラメータをインプットすることで得られる．これら 5 つのパラメータの内，初めの 4 つはオプションの価格付けを行う時点で既知のパラメータであり，ボラティリティのみが未知パラメータである．よって，オプション市場価格は，原資産の満期までの価格変動性に市場が織り込む値 (インプライドボラティリティ) を用いて値付けされたオプション価格である．3.2 節で詳しく述べるが，インプライドボラティリティが満期までの期間における原資産の価格変動から実現したボラティリティ(以下，適宜，実現ボラティリティと呼ぶ) よりも高い場合には，オプションを売却してデルタヘッジ (株式のデルタ量の購入) を行えば収益が得られ，逆に，低い場合にはオプションを購入してデルタヘッジ (株式のデルタ量の売却) を行えば収益が得られる．よって，オプション市場においてデルタヘッジから収益を得るためには，満期までの期間における実現ボラティリティの的確な予測が鍵を握る.

日本の株式オプション市場の価格データを用いたデルタヘッジ戦略に関連する実証的研究は数少なく，著者等の知る範囲では，淵江 (2002)[2)]，矢萩・宮崎 (2005)[3)]，星加・宮崎 (2007)[4)]，加藤・宮崎 (2007)[5)]，内田・宮崎 (2008)[6)] に留まる.

ボラティリティの予測モデルとして，著名なものに ARCH モデルや GARCH モデルなどの時系列モデルがある．これらの時系列モデルのファイナンスへの応用も盛んに研究されている．しかしながら，オプションのデルタヘッジにおけるボラティリティの指標としての利用は見当たらない.

本研究では，満期までの期間における実現ボラティリティをデルタヘッジ戦略の開始時点で予測する新たなモデルを提案し，提案モデルに基づくデルタヘッジ戦略の収益性を既存の著名なモデルに基づくものと比較する.

2. 日経 225 インデックスに関するボラティリティ

本章では，2003 年から 2010 年までの期間において，日経 225 インデックスオプション市場価格 (残存期間が 20 営業日) から導出したインプライドボラティリティとオプションの残存期間における日次リターンから導出したボラティリティ(実現ボラティリティと呼ぶ) との推移 (図 1) と本研究におけるボラティリティのモデル化の基礎となるインプライドボラティリティと実現ボラティリティとの比の推移 (図 2) について確認する．図 1 から，両ボラ

†1 電気通信大学システム工学科
Department of Systems Engineering,The University of Electro-Communications

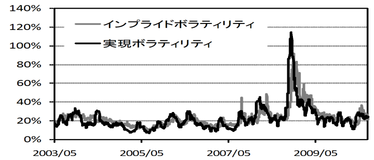

図 1　日経 225 オプションのインプライド
ボラティリティと実現ボラティリティの推移
Fig. 1　The process of Nikkei 225 implied volatility and actual volatility

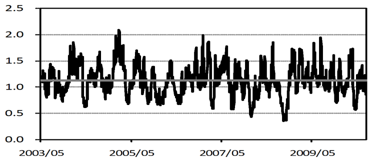

図 2　インプライドボラティリティと
実現ボラティリティの比の推移
Fig. 2　The ratio of Nikkei 225 implied volatility and actual volatility

ティリティは共に 20%前後で推移しているが，2008 年 9 月周辺に急上昇している．この時期はリーマンブラザーズが破綻した頃であり，日経 225 インデックスの株価が 1 日に数百円動くことが数日に渡って観測され，また，この実現ボラティリティの急騰に伴って，インプライドボラティリティも急上昇した．このように両ボラティリティは概して同じ水準ではあるが，時点によっては相応の乖離が見られる．この点を図 2 から，より詳細に確認する．

図 2 から，インプライドボラティリティと実現ボラティリティとの比には，(1) 強い平均回帰性が見られること，(2) この比の平均値は僅かながら 1 を上回ること，が確認される．(1) から，ある時点ではオプションを売却して株式をデルタ量購入するデルタヘッジ戦略が有効であり (比が 1 より大)，別の時点では，オプションを購入して株式をデルタ量売却するデルタヘッジ戦略が有効である (比が 1 より小) ことがわかり，しかしながら，(2) から，押しなべてみると，オプションを売却して株式をデルタ量購入するデルタヘッジ戦略の有効性が高いことが想定される．

3.　3 通りのボラティリティ，デルタヘッジ戦略とボラティリティ予測モデル

3.1　3 通りのボラティリティ

3 通りのボラティリティとして，インプライドボラティリティ，実現ボラティリティ，予測ボラティリティについて説明する．各ボラティリティが対応する期間に関しては図 3 に示した．図 3 において 20 営業日を 1 つの区切りとしているのは，本研究のデルタヘッジ戦略が残存期間 20 営業日のオプションを対象としているためである．また本研究では，投資開始時点が t から t+1 にずれれば，時点 t+1 から残存期間が 20 営業日のオプションを用いて新しくデルタヘッジ戦略を実行する．そのため各ボラティリティも t 時点から 1 日ずれたものを計測又は予測する．

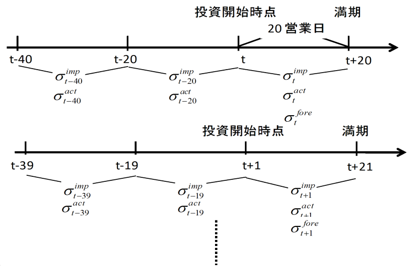

図 3　本研究の各ボラティリティに対応する期間の概略
Fig. 3　Outline at period corresponding to each volatility in study

3.1.1　インプライドボラティリティσ_t^{imp}

インプライドボラティリティは,「1．はじめに」で説明した通り，オプション市場価格に織り込まれる原資産の満期までの価格変動性のことである．デルタヘッジ開始時点 t におけるインプライドボラティリティσ_t^{imp} は，時点 t におけるオプション市場価格 (満期が 20 営業日のもの) から導出され，時点 t において市場参加者が実現するであろうと想定する t 時点から満期 t+20 時点までのボラティリティである．

3.1.2　実現ボラティリティσ_t^{act}

実現ボラティリティとは，株価リターンの実現値から計測されるボラティリティのことである．ここで，記法について確認しておく．時点に関する表現はインプライドボラティリティの場合に揃え，σ_t^{act} は t 時点から t+20 時点までの実現ボラティリティ，σ_{t-20}^{act} は t-20 時点から t 時点までの実現ボラティリティを表す．デルタヘッジ開始時点 t までに既知となる実現ボラティリティは i=20 の σ_{t-20}^{act} までである．t 時点でデルタヘッジ戦略を決定する際には，σ_t^{imp} に対応する t 時点から t+20 時点までの実現ボラティリティσ_t^{act} を予測する必要がある．

3.1.3　予測ボラティリティσ_t^{fore}

予測ボラティリティとはデルタヘッジ開始時点 t からオプション満期時点 t+20 までの実現ボラティリティσ_t^{act} を予測した値であり，デルタヘッジ戦略を実行する際には予測ボラティリティを用いてデルタヘッジを実行する．このボラティリティは 3.3 節のモデルを用いて予測される．

3.2　デルタヘッジの考え方とデルタヘッジ戦略

3.2.1　デルタヘッジの考え方

デルタヘッジの考え方を，コールオプションを売却し，株式を購入して無リスクポートフォリオを構築する場合に関して説明する．BS モデルでは，株価が従う確率過程として，式 (1) の幾何ブラウン運動を仮定する．

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \tag{1}$$

ここで，S は原資産価格，μ は株価リターンの期待値，σ は株価リターンのボラティリティ (実現ボラティリティに対応する $\sigma = \sigma_t^{act}$)，dW_t はウィナー過程である．原資産価格 S が式 (1) に従う時に，現時点におけるコールオプション価格を $f(t, S)$ で表すと，伊藤の公式から $f(t, S)$ が従う過程は式 (2) で与えられる．

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t \tag{2}$$

式 (1) をみると株価の確率的振る舞いを示す部分は $\sigma S dW_t$ であり，コールオプション価格の確率的振る舞いを示す部分は式 (2) の $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t$ である．そこで，コールオプションを 1 単位売却すると共に原資産株式をデルタ $\frac{\partial f}{\partial S}$(BS モデルを用いて計算すると $\frac{\partial f}{\partial S} = \Phi(d_1)$ になる) 単位購入することによって，オプションの売却に伴う価格変動リスクをヘッジすることができる．ここで Φ と d_1 はそれぞれ式 (3)，式 (4) である．

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \tag{3}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \tag{4}$$

デルタヘッジにより変動リスクをヘッジした無リスクポートフォリオを構築し，偏微分方程式を導き解くことで式 (5) の BS モデルのコールオプション価格を導出することができる．

$$f = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{5}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \tag{6}$$

この BS モデルにオプション市場価格 f，株価 S，権利行使価格 K，残存期間 $T - t$，無リスク金利 r を代入して σ を逆算することによりインプライドボラティリティσ^{imp} を求めることができる．

3.2.2　デルタヘッジ戦略

デルタヘッジを行うことで，株式と銀行預金 (収益率は無リスク金利) とのポートフォリオによってオプションの価値を複製することができる．オプション価格 (式 (5)) はボラティリティが大きいほど高くなるため，図 1 に示したようにインプライドボラティリティσ_t^{imp} と実現ボラティリティσ_t^{act} の大きさが違う場合には，市場オプションは割高や割安な状態で取引されていたことになる (デルタヘッジのコストは式 (5) のボラティリティが σ_t^{act} のときのコールオプション価格 ($f\left(\sigma_t^{act}\right)$) であるため)．そのためインプライドボラティリティσ_t^{imp} が実現ボラティリティσ_t^{act} よりも大きい場合 ($\sigma_t^{imp} > \sigma_t^{act}$) には，割高なコールオプション ($f\left(\sigma_t^{imp}\right)$) を売却して実現ボラティリティ$\sigma_t^{act}$ から計算されるデルタ ($\frac{\partial f}{\partial S}$) に基づくデルタヘッジ (コストは $f\left(\sigma_t^{act}\right)$) を行うことで収益をあげることができる．この取引は割高な市場オプションを売却し，割安な複製オプションを購入するといった反対売買をすることになるので，無リスクでオプション市場価格とデルタヘッジコストの差を収益として得ることができる ($f\left(\sigma_t^{imp}\right) - f\left(\sigma_t^{act}\right) > 0$)．

しかしながら，現実のデルタヘッジ戦略では，開始時点 t では実現ボラティリティσ_t^{act} の値を知ることができないため無リスクで収益が得られるようなデルタヘッジ戦略は存在せず，その収益性はどの程度正確に実現ボラティリティσ_t^{act} を時点 t で予測できるかにかかっている．本研究では実現ボラティリティを 3.3 節のモデルから予測 (σ_t^{fore}) し，オプション市場価格が割高 (割安) と判断されるならば ($\sigma_t^{fore} < \sigma_t^{imp}$) オプションを売却 (購入) して予測ボラティリティσ_t^{fore} に基づきデルタヘッジを行う．予測ボラティリティσ_t^{fore} が実現ボラティリティσ_t^{act} の完全な予測である場合には，オプション市場価格 $f\left(\sigma_t^{imp}\right)$ とボラティリティを $\sigma_t^{fore} (= \sigma_t^{act})$ としたときのコールオプション価格 $f\left(\sigma_t^{fore}\right)$ との差がデルタヘッジ戦略の収益として得ることができる．

3.3　予測モデル

本研究ではインプライドボラティリティと実現ボラティリティの比に着目した予測モデルを提案する．図 2 で確認したように，残存期間 20 営業日のオプションのインプライドボラティリティをその期間に対応する実現ボラティリティで割った比 ($\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}$) の時系列には平均回帰性が観測される．この点に焦点を当てて，本研究ではこの比を AR モデル (3.3.1 節) を用いてモデル化する．加えて，AR モデルにボラティリティに関する投資家の予想を加えた予測モデル (3.3.2 節) も提案する．提案モデルの比較対象となるモデルとして，3.3.3 節から 3.3.6 節には既存の予測モデルを導入する．本研究ではデルタヘッジ開始時点から満期までが 20 営業日のオプションを対象とするためデルタヘッジ開始時点から 20 営業日後ま

でのボラティリティを予測することになる．また，実現ボラティリティの時系列に単位根の存在が確認されたため，デルタヘッジ開始時点までに観測できる比 $(\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}})$ や実現ボラティリティσ_{t-20}^{act} の変化量を予測するモデルを構築する．各予測モデルのパラメータ $(\alpha_t, \beta_t^i, \gamma_t)$ やラグ数 (p=1，...，8，q=0，...，7) は投資開始時点までに利用可能なデータから AIC を基に決める．

3.3.1 実現ボラティリティ・インプライドボラティリティ比モデル 1

本モデルは，インプライドボラティリティと対応する実現ボラティリティの比の変動に注目し，AR モデルを用いて予測する (式 (7))．まず，式 (7) に基づき，過去における比の変化量のデータ $X_{t-i} = \Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right)$ から，将来の比の変化量 $\hat{X}_t = \Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)}$ を予測する．ここで，$\Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right)$ は 20 営業日ごとの階差 $\Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right) = \frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}} - \frac{\sigma_{t-20i-20}^{imp}}{\sigma_{t-20i-20}^{act}}$，$\Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)}$ は比の変化量の推定値を表す．本モデルと節 3.3.2 の予測モデルでは，式 (7) で予測した変化量 $\Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)}$ を取引開始時点に観測される比 $\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}}$ に加算して実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比を予測する (式 (8))．この式 (8) を変形した式 (9) から予測ボラティリティσ_t^{fore} を求める．

$$\hat{X}_t = \alpha_t + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_t^i X_{t-i} \tag{7}$$

$$\frac{\sigma_t^{imp}}{\widehat{\sigma_t^{act}}} = \frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}} + \Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)} \tag{8}$$

$$\sigma_t^{fore} = \widehat{\sigma_t^{act}} = \sigma_t^{imp}\left(\frac{\sigma_{t-20}^{imp}}{\sigma_{t-20}^{act}} + \Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)}\right)^{-1} \tag{9}$$

3.3.2 実現ボラティリティ・インプライドボラティリティ比モデル 2

投資家はオプションを評価する際に日々得られる実現ボラティリティの情報に今後のボラティリティの予想を加えていると考えられる．もし時点 t のインプライドボラティリティσ_t^{imp} が時点 t までの株価から計算される実現ボラティリティσ_{t-20}^{act} の値よりも大きいならば，投資家は今後ボラティリティが大きくなる予想をしていることになる．本モデルではインプライドボラティリティと実現ボラティリティの差 $\left(\sigma_t^{imp} - \sigma_{t-20}^{act}\right)$ の直近 20 営業日の平均を投資家の予想として捉え，3.3.1 節の AR モデルに投資家の予想を加えた予測モデルを提案する．

$$\Delta\widehat{\left(\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{act}}\right)} = \alpha_t + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_t^i \Delta\left(\frac{\sigma_{t-20i}^{imp}}{\sigma_{t-20i}^{act}}\right) + \gamma_t\left(\frac{1}{20}\sum\nolimits_{j=0}^{19}\left(\sigma_{t-j}^{imp} - \sigma_{t-20-j}^{act}\right)\right) \tag{10}$$

3.3.3 AR 型モデル

本モデルは式 (7) の AR モデルを $\hat{X}_t = \widehat{\Delta\sigma_t^{act}}$，$X_{t-i} = \Delta\sigma_{t-20i}^{act}$ としてボラティリティを予測する．3.3.3 節から 3.3.6 節の予測モデルではボラティリティの変化量 $\Delta\sigma_t^{act}$ を予測し，デルタヘッジ開始時点に観測されるボラティリティσ_{t-20}^{act} に加算して予測ボラティリティσ_t^{fore} を求める (式 (11))．

$$\sigma_t^{fore} = \widehat{\sigma_t^{act}} = \sigma_{t-20}^{act} + \widehat{\Delta\sigma_t^{act}} \tag{11}$$

3.3.4 ARCH 型モデル

一般的に株価リターンの時系列には，絶対値の大きなリターンの後には同じように絶対値の大きなリターンが伴い，ボラティリティが大きくなる傾向が知られている．ARCH 型モデルとは，その傾向を表現するために予測モデルにリターンの 2 乗を組み入れ，ボラティリティを予測するモデルである．ここで用いるリターンは 20 営業日のリターンから導出している ($\mu_t = \ln\frac{S_t}{S_{t-20}}$)．

$$\widehat{\Delta\sigma_t^{act}} = \alpha_t + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum\nolimits_{j=0}^{q} \gamma_t^j \mu_{t-20j}^2 \tag{12}$$

3.3.5 GJR 型モデル

株式市場では，株価が上がった日の翌日と下がった日の翌日を比べると後者にボラティリティの上昇傾向があることが知られている．本研究では，GJR 型モデルとして式 (12) の ARCH 型モデルにダミー変数 D_t を加えた式 (13) を用いる．ここで D_t は $\mu_t = \ln\frac{S_t}{S_{t-20}}$ が負であれば 1，それ以外では 0 となる変数である．

$$\widehat{\Delta\sigma_t^{act}} = \alpha_t + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum\nolimits_{j=0}^{q} \gamma_t^j \mu_{t-20j}^2 + \phi_t D_t \tag{13}$$

3.3.6 ヒストリカル・インプライド並列モデル

本モデルは，オプション市場価格から得られるインプライドボラティリティの変動をヒストリカルボラティリティの変動に加えて将来の実現ボラティリティを予測するモデルである．本研究における提案モデルである比モデルと予測に利用するデータは同じであるが，その利用法は異なる．

Vol.2010-MPS-81 No.16
Vol.2010-BIO-23 No.16
2010/12/16

$$\widehat{\Delta\sigma_t^{act}} = \alpha_t + \sum\nolimits_{i=1}^{p} \beta_t^i \Delta\sigma_{t-20i}^{act} + \sum\nolimits_{j=0}^{q} \gamma_t^j \Delta\sigma_{t-20j}^{imp} \tag{14}$$

4. 実証分析

4.1 分析の目的

本研究の目的は次の 2 つである．

(1) 第一の目的は，提案モデルに基づいてデルタヘッジ戦略の収益性が既存の予測モデルに基づくものよりも押しなべて高くなるかどうかを検証することである．つまり，提案モデルの有用性に関する総合的な検証である．

(2) 第二の目的は，オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行う場合と，オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行う場合に分けたうえで提案モデルの有用性を検証することである．これは，(1) において提案モデルが押しなべて有効であるとの結論を得た場合に，2 通り (オプションを売却・購入する場合) のデルタヘッジ戦略のどちらにおいて有用性が顕著に見られるかについて検証することである．

4.2 分析手法

デルタヘッジ戦略の収益性を検証する際に注目する項目は，(1) 勝率，(2) デルタヘッジ戦略の実行回数，(3) デルタヘッジ戦略一回あたりの収益，(4) 総収益，の 4 項目である．この中で (2) デルタヘッジ戦略の実行回数について説明しておく．第一の目的を検証する際には，全ての時点においてデルタヘッジ戦略を行うわけであるから全ての予測モデルで同じ回数 (分析対象期間の全時点) となるが，第二の目的を検証する際には，予測モデルに応じて，オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行うかオプションを購入してデルタヘッジ戦略を行うかについての判断が異なるため，この項目の回数が異なることになる．勿論，売却・購入のどちらかの回数が多ければ収益性が高まるといったものではなく，予測モデルの予測精度を高めて，デルタヘッジ戦略を実行する時点でどちらの戦略を行うかについて的確に判断することが収益性の向上に繋がる．これらを踏まえたうえで，第一，第二の目的を検証するために，ATM オプションを対象に以下の Step に基づいて検証する．

Step1

各デルタヘッジ開始時点において，各予測モデルのパラメータ値やラグ数 (p=1, ..., 8, q=0, ..., 7) を AIC に基づいて推定し，予測ボラティリティを導出する．

Step2

デルタヘッジ開始時点で予測したボラティリティとインプライドボラティリティの比 $\frac{\sigma_t^{imp}}{\sigma_t^{fore}}$ を求め，この比が 1 を上回ればオプションを売却するデルタヘッジ戦略を行い，1 を下回ればオプションを購入するデルタヘッジ戦略を行う．各時点から開始するデルタヘッジ戦略が，売却・購入のどちらが側であったか，また，その戦略を採用した場合に得られる収益及びその収益が正・負のどちらであったかを記録する．

Step3

第一の目的を検証するために，分析対象期間の全時点に関して，Step2 で得られた分析結果を集計する．第二の目的を検証するために，予測モデルがオプションを売却してデルタヘッジを行なうよう指示したデルタヘッジ戦略開始時点と購入してデルタヘッジを行うよう指示したデルタヘッジ戦略開始時点にわけて Step2 で得られた分析結果を集計する．

4.3 データと分析手法

実証分析に用いるデータは，大阪証券取引所が公表している 2003 年 5 月から 2010 年 8 月までに満期を迎える日経 225 コールオプションデータである．日経 225 コールオプションは各月に満期が 1 つ設定されているが，これだけではサンプル数が数十個程度しか確保できないため，本研究では残存期間 20 営業日のオプション価格データを線形補間によって構築する．具体的には各営業日で取引された残存期間の短い (5 営業日から 20 営業日) オプションと残存期間が 20 営業日よりも長いオプションのインプライドボラティリティを線形補間し，残存期間が 20 営業日のオプションの価格を構築する．なお本研究における無リスク金利は 0 と設定した．これらのオプションデータを用いて 2004 年 12 月 10 日から 2010 年 7 月 14 日までの 1371 営業日において開始するデルタヘッジ戦略の収益性の検証を行う．また，本研究では各予測モデルのパラメータを推定するために 2003 年 5 月 1 日からデルタヘッジ開始時点までの全データ (デルタヘッジ開始時点によってデータ数は変わる) を用いた．

4.4 分析結果

第一の分析目的に関する分析結果を表 1 に，第二の分析目的に関する分析結果を表 2(オプションを売却するデルタヘッジ戦略の収益性) と表 3(オプションを購入するデルタヘッジ戦略の収益性) に示した．

まず，表 1 に着目する．表 1 にあるインサンプルの列は，デルタヘッジ戦略を行う期間における実現ボラティリティをデルタヘッジ戦略開始時点において既知であるとした場合の結果を示す．3.2.2 節で述べたように，デルタヘッジ開始時点においてデルタヘッジ戦略を行

う期間における実現ボラティリティが既知であれば，デルタヘッジ戦略を採用すると，現実の株価過程が幾何ブラウン運動に近い場合には収益は殆どの場合にプラスになり勝率は 100 %に近くなる．各表においてインサンプルの列の勝率が 1 より小さくなっているのは，現実の株価過程が幾何ブラウン運動で捉えきれない部分があること，デルタヘッジのリバランスの間隔が日次であり連続的なデルタヘッジできないからことなどによる．しかしながら，やはり，インサンプルデータを用いたデルタヘッジ戦略の収益性をみると勝率は 87.5 %と高く戦略 1 回あたりの収益も 68 と大きい．この結果は，予測モデルが完全に将来の実現ボラティリティを予測できた場合にデルタヘッジ戦略からどの程度の収益が得られるかを示す指標であり，いわば予測モデルの目標値といえる．

表 1 から，提案モデルの収益性を既存モデルと比較すると，勝率で 3%から 5%上回り，一回当たりの収益や総収益は 3 倍程度となり，押しなべて見た場合に提案モデルの有効性が確認される．

次に，表 2 と表 3 から，第二の分析目的に関する分析結果を検討する．表 2 から，オプションを売却するデルタヘッジ戦略の勝率や一回当りの収益は，提案モデルと既存モデルではそれほど大きな違いは見られない．しかしながら，戦略の実行回数が提案モデルでは既存モデルよりも 2 割程度多くなるため，総収益も 2 割程度多くなる．次に，表 3 から，オプションを購入するデルタヘッジ戦略の勝率に着目すると，提案モデルの既存モデルに対する優位性は確認できない．ところが，一回当たりの収益は，何れの予測モデルを利用した場合でもマイナスとなるものの，提案モデルによるマイナス幅は既存モデルによるマイナス幅の半分以下となっている．また，総収益のマイナス幅でみると，提案モデルによるマイナス幅は既存モデルによるマイナス幅の四分の一程度となっている．これは，提案モデルに基づく場合にオプションを購入してデルタヘッジ戦略を採用するように指示する実行回数が既存モデル基づく場合より 200 回程度少ないことによるものと考えられる．表 2 の結果と合わせると，既存予測モデルでは，本来オプションを売却してデルタヘッジ戦略を行うのが望ましい場合に，オプションを購入してデルタヘッジ戦略を行うことをしばしば指示していたのではないかと考えられる．

表 1 デルタヘッジの収益性 (全体)
Table 1 Profitability of delta hedging strategy(total)

	インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
勝率	87.5 %	60.7 %	61.1 %	57.4 %	55.8 %	56.1 %	58.0 %
実行回数	1371	1371	1371	1371	1371	1371	1371
収益 (1 回あたり)	68.0	17.1	17.3	6.1	4.2	4.6	7.0
総収益	93238	23392	23689	8295	5728	6335	9589

表 2 オプションを売却するデルタヘッジ戦略の収益性
Table 2 Profitability of delta hedge strategy which sells a option

	インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
勝率	87.6 %	68.2 %	68.4 %	68.9 %	67.9 %	68.3 %	69.5 %
実行回数	920	1047	1049	913	844	842	875
収益 (1 回あたり)	56.6	25.7	25.7	21.3	23.9	24.3	24.2
総収益	52078	26871	26983	19430	20136	20431	21155

表 3 オプションを購入するデルタヘッジ戦略の収益性
Table 3 Profitability of delta hedge strategy which buys a option

	インサンプル	比 1	比 2	AR	ARCH	GJR	並列
勝率	87.4 %	36.4 %	37.3 %	34.7 %	36.4 %	36.7 %	37.7 %
実行回数	451	324	322	458	527	529	496
収益 (1 回あたり)	91.3	-10.7	-10.2	-31.2	-27.3	-26.6	-23.3
総収益	41159	-3479	-3295	-14281	-14408	-14096	-11566

5. まとめと結語

本研究では，オプションのデルタヘッジ戦略への利用を踏まえて，将来の実現ボラティリティを予測するモデルを提案し，既存モデルに基づく場合とデルタヘッジ戦略の収益性を比較検討した. 提案モデルは，実現ボラティリティとインプライドボラティリティの比に関する時系列データを利用したものであり，株価のみの時系列データを利用した既存モデルやインプライドボラティリティを株価データに加える形で利用した既存モデルとは異なる. 提案モデルに基づくデルタヘッジ戦略の収益性は，既存モデルに基づくものより高くなる．

参 考 文 献

1) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp.637-654 (1973).
2) 渕江哲郎: 日経平均株価オプションのダイナミック. ヘッジング, 日本経営財務研究学会第 26 回全国大会第 8 セッション第 2 報告書, (2002).
3) 矢萩一樹, 宮崎浩一: デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル, 情報処理学会論文誌数理モデル化と応用, Vol.46 No. SIG10(TOM12), pp. 158-171 (2005).
4) 星加裕文, 宮崎浩一: 日経 225 オプションのデルタヘッジに関する一考察, 京都大学数理解析研究所講究録, 1548, pp.218-225 (2007).
5) 加藤明, 宮崎浩一: 日本株式市場局面とインプライド・ボラティリティ, 京都大学数理解析研究所講究録, 1548, pp.210-217 (2007).
6) 内田康嗣, 宮崎浩一: 日経 225 オプション市場のボラティリティ・リスク・プレミアム, 現代ファイナンス, 23, pp.35-59 (2008).