



記憶空間配分の待ち行列モデル*

伊 澤 喜 三 男**

Abstract

Queueing theoretic models of memory space allocation are formulated with a view to throwing light upon the effect of finiteness of memory space and its impact on the efficiency of a multiprogrammed and/or multiprocessed computer system.

We analyse these models and show some stationary characteristics of the models such as the probability distributions of the degree of multiprogramming, the expectations for them, the probability distributions of the utilization of memory space, the expectations for them, and others.

1. ま え が き

多重処理を行う計算機システムの主記憶領域割当て方式の主なものにページ方式やコンパクション方式がある¹⁾。コンパクション方式では、同時処理を効率よく行うため、記憶空間の端から順に連続領域を割当て可能な限り多くのプロセスを配置する。この方式では、空き領域が生じると、ある時点で、使用中の領域を配置替えて空き領域を集め、これを新しいプロセスに配分する。ページ方式では、空間を無駄なく利用するため、等大に区画されたブロックを割当ての単位として、一般には散在する領域を各プロセスに配分する。ところで、ページ方式でも、スラッシング²⁾を回避するには、それに必要なだけの領域を各プロセスに割当てなければならない。従って、両方式の間には、連続領域を割当てるか、散在する領域を割当てるかといった違いや、プロセスの全域を収容するか、そのワーキングセット³⁾を収容するかといった違いがあるにしても、基本的には、両者は同等な空間配分方式である。

従来、上に述べたような記憶空間配分の解析として、Betteridge²⁾、Buzen and Rubin³⁾、および著者⁴⁾⁻⁶⁾は一括処理系に対する確率モデルをそれぞれ定式化

し、平衡状態における多重度や記憶空間利用率の確率分布などの諸特性を明らかにしてきた。しかし、そのモデルは、待ち行列系として無限に長い行列を維持するような系であり、換言すれば、プロセスの到着が密で、系が飽和状態に達している場合に対するものであった。ところが、プロセスの到着がある程度粗であるような系(実際、ジョブが常に混雑している計算機ばかりが現実にあるのではない)、すなわち即時処理系では、多重度や記憶空間利用率は、飽和状態にないので低下し、到着がさらに粗になれば、増々低下するから、このような場合には、これまでの結果をそのまま適用することはできない。

そこで、本稿は、即時処理系と同時に一括処理系にも対応できるようにモデルを構築する。このモデルは有限長の待ち行列を持つ空間配分の確率モデルである。まず、2.でモデルを定式化し、3.では、その平衡方程式を立て、容易に解ける場合の平衡状態分布を求め、さらに、それを基にして多重度や記憶空間利用率の確率分布などを明らかにする。最後に、4.では本モデルと従来の待ち行列モデル⁷⁾の関係について若干の考察を加える。

2. モデルの定式化

〔モデル〕 記憶空間配分の待ち行列モデルは、Fig. 1(次頁参照)に示すような2段階循環待ち行列が基本となる。これをモデルAと呼ぶ。これは、実は、系の長さ(系内の客数)に制限のある第2段だけからなる

* Queueing Models for Memory Space Allocation by Kimio IZAWA (Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology).

** 名古屋工業大学工学部情報工学科

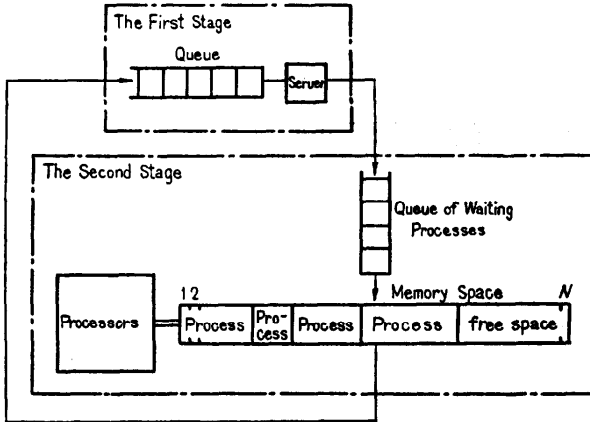


Fig. 1 Diagram for the Model A of Memory Space Allocation

開放型の待ち行列系に等価である。

モデルAにおいて、系内の客の総数は C 人とする。これらの客はそれぞれ系内の各段を経て循環する。

この2段循環待ち行列系の第1段は、窓口におけるサーバの数が1の普通の待ち行列系であって、サービス分布としてはパラメータ λ の指数分布を仮定する。従って、第1段に客が存在する限り、第2段への客の到着時間間隔はこの分布に従うことになる。モデルAでは第1段のサーバの個数は1であるが、それが C 個ある場合をモデルBと呼ぶ(Fig. 2)。モデルBは、客の母集団が有限 (C 人) の第2段だけからなる開放型待ち行列系に等価である。

モデルAまたはBにおいて、第2段の窓口の内容は、 N ブロックの大きさの記憶空間といくつかのプロセッサからなる。第2段での客をプロセスと呼ぶ。窓口においてプロセスは、ある大きさの領域の割当てを受けて記憶空間内に滞留し、一般に断続的に、ある場合には連続的に一つのプロセッサによってサービスされる。従って、一般に記憶空間内滞在時間はサービス時間より長くなる。割当てを受けたサービス時間の総

和がある値に達すれば、そのプロセスは第2段での処理を終了してそこを離れ、第1段に行く。

第2段の窓口におけるプロセスの滞在時間 X およびその間占有する記憶領域のブロック数 J は、それぞれ独立に一定の確率分布に従うものとする。

記憶空間滞在時間 X の分布として、記憶空間内に m 個のプロセスが存在する限りパラメータ μ_m の指数分布 ($P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\mu_m x}$ ($x > 0$)) を仮定する。これは、全プロセッサを m 個のプロセスに時間的にむらなく均等に割当てることを意味する。記憶空間内に存在するプロセスの個数 m を多重度という。多重度が m であるような時点 t から時間 Δt の間にあるプロセスが処理を完了して第2段から離れる確率は $\mu_m \Delta t + o(\Delta t)$ であり、 Δt の間に m 個のプロセスのうちどれか一つが終了する確率は $m \mu_m \Delta t + o(\Delta t)$ となる。ここで、 $o(\Delta t)$ は Δt に対して高位の無限小であることを示す Landau の記号である。

通常、パラメータ μ_1, μ_2, \dots は、次の条件を満たすと考えられる^{(4),(5)}。

$$\{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq \dots \quad (1)$$

$$\{\mu_1 \leq 2\mu_2 \leq \dots \leq m\mu_m \leq \dots \quad (2)$$

記憶領域要求 (占有) 量 J の分布としては、一般分布 $G(j) = P\{J \leq j\}$ ($g(j) = P\{J = j\}$) ($j = 1, 2, \dots, N$) を扱う。後に、一様分布を仮定してさらに具体的な結果も示す。

第2段での多重度 (確率変数 D で表わす) は、最大 M ($1 \leq M \leq N$) に制限される。この M を最大多重度という。なお、当然、 $M \leq C$ である。

いま、時刻 t に l ($0 \leq l \leq C$) 個のプロセスが第2段の内部にあるものとする。これらを第2段に到着した順に $\#1, \#2, \dots, \#l$ と書く。 $l > 0$ のとき、これらが占有または要求する記憶領域のブロック数をそれぞれ j_1, j_2, \dots, j_l とすると、

$$k = \max \left\{ i \mid \sum_{j=1}^i j_j \leq N, i \leq \min \{l, M\} \right\} \quad (3)$$

が定まり、系は、 $\#1, \dots, \#k$ のプロセスを記憶空間内に維持し、 $k < l$ ならば、 $\#k+1, \dots, \#l$ のプロセスは待ち行列を形成する。 $\#1, \dots, \#k$ のプロセスへの領域割当ては、この順、すなわち先着順に行い、待ち行列では、 $\#k+1$ が先頭となり、 $\#k+2, \dots, \#l$ の順に並ぶ。このとき、系は状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ にあるという。 $l=0$ ならば、系は状態 $[\cdot]$ にある。

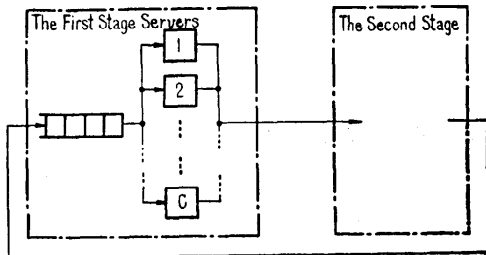


Fig. 2 Diagram for the Model B

系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ ($1 \leq k < l$) にあるとき、プロセス # h ($1 \leq h \leq k$) の処理が終了すると、このプロセスは第2段を離れ、第1段の客となる。この直後、第2段においては、

$$m = \max \left\{ i \mid \sum_{j \in \{1, \dots, k+i\} - \{h\}} j_s \leq N, k+i-1 \leq M, 0 \leq i \leq l-k \right\} \quad (4)$$

が定まり、系の状態は $[j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_{k+m}; j_{k+m+1}, \dots, j_l]$ になる。すなわち、プロセス # h が退いて、新たにプロセス # $k+1, \dots, k+m$ がこの順で待ち行列の先頭から記憶空間内に移る。

系が状態 $[j_1, \dots, j_k;]$ ($1 \leq k$) にあるとき、プロセス # h ($1 \leq h \leq k$) が終了すると、第2段は単にこのプロセスが第1段へ移るだけであるので、直後には、系の状態は $[j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_k;]$ となる。

また、系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ ($1 \leq k < M$ ならば $k < l$; $k = M$ ならば $k \leq l$) にあるとき、ある客が第1段におけるサービスを終了して、 j_{l+1} ブロックの大きさの領域を要求する # $l+1$ のプロセスとして第2段に到着すると、状態は $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l, j_{l+1}]$ になる。すなわち、到着したプロセスは待ち行列の後尾に付く。また、もし系が状態 $[j_1, \dots, j_k;]$ ($0 \leq k < M$) にあるときならば、プロセス # $k+1$ の到着によって

$$\sum_{j=1}^{k+1} j_s \leq N \quad (5)$$

が成り立つ限り、状態 $[j_1, \dots, j_{k+1};]$ に移る。すなわち、到着するプロセスは記憶空間内に配置される。もし式(5)の条件が満たされなければ、状態は $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}]$ となる。すなわち、到着するプロセスは待ち行列に入って待機する。 $k=0$ のとき、すなわち状態が $[;]$ のときの到着ならば、必ず記憶空間内に配置される。

次に、モデルAにおいて客の総数 C が非常に大きい場合を想定すると、これは、モデルAの第2段だけからなっていて、無限の入力母集団を持ち、しかも系の長さに制限のない待ち行列系によって近似される。そのような系を、ここではモデルCと呼ぶ。モデルAに関する諸結果は、 $C \rightarrow \infty$ とすると、モデルCに対する結果になる。言い換えれば、 $C \rightarrow \infty$ とすると、モデルAはモデルCに収束する。

3. 解析

2. で定式化した記憶空間配分の待ち行列モデルにつ

* 以下で、 δ_{ij} は、 $\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0(i \neq j)$ で定義される。

いて、まず、平衡方程式を求める。次に、それが容易に解ける場合について平衡状態分布を示す。さらに、紙数の許す範囲内で多重度 D の確率知布、記憶空間使用率 U の確率分布、行列の長さ L_q の確率分布などを明らかにする。

3.1 平衡方程式

微分差分法により平衡方程式を求める。ここでは、モデルAについて詳細に述べるが、モデルBとCに関しては若干の注意を述べる程度に扱う。

(モデルAの平衡方程式)

時刻 t に系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ ($0 \leq k \leq M, k \leq l$) にある確率を $p[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ あるいは $p_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_l}^{j_{k+1} \dots j_l}(t)$ (右腰の添字は M 個の数の系列である) と書く。

時刻 t と微小時間 Δt 後の時刻 $t + \Delta t$ の間に発生する系の状態変化に着目すると、以下のような場合が考えられる。

(1) 時刻 $t + \Delta t$ に系が状態 $[;]$ にある確率 $p_{00 \dots 0}(t + \Delta t)$ は、以下の互に排反する事象の確率の和である。

i) 時刻 t に系が状態 $[;]$ にあり、その後 Δt の間に客が第2段に到着しない。この確率は $p_{00 \dots 0}(t)(1 - \lambda \Delta t)$ 。

ii) 時刻 t に系は状態 $[j_0;]$ ($1 \leq j_0 \leq N$) にあり、 Δt の間に大きさ j_0 のプロセスが終了するが、新たにプロセスは第2段に到着しない。この確率は $p_{j_0 0 \dots 0}(t) \mu_1 \Delta t (1 - \lambda \Delta t)$ 。

iii) その他の変化の仕方では状態 $[;]$ に達する。これはほとんど起こり得ないので、確率は $o(\Delta t)$ である。

従って、

$$p_{00 \dots 0}(t + \Delta t) = p_{00 \dots 0}(t)(1 - \lambda \Delta t) + \sum_{j_0=1}^N p_{j_0 0 \dots 0}(t) \mu_1 \Delta t (1 - \lambda \Delta t) + o(\Delta t) \quad (6)$$

(2) 時刻 $t + \Delta t$ に系が状態 $[j_1, j_2, \dots, j_k;]$ ($j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, 1 \leq k \leq M$) にある確率 $p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0}(t + \Delta t)$ は、以下の互に排反する事象の確率の和である。

i) 時刻 t に系が状態 $[j_1, \dots, j_k;]$ にあり、 Δt の間に第2段において、 $k < C$ のときも客は到着せず、終了するプロセスもない。この確率は*

$$p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}(t) (1 - \mu_k \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t) (1 - \delta_{k,c})$$

ii) 時刻 t に系が状態 $[j_1, \dots, j_{k-1};]$ にあり, Δt の間に第 2 段で終了するプロセスはないが, 大きさ j_k のプロセスが到着する. この確率は

$$p_{j_1 \dots j_{k-1} 0 \dots 0}(\Delta t)(1 - \mu_{k-1} \Delta t)^{k-1} \lambda \Delta t g(j_k)$$

iii) $k < C$ の場合, 時刻 t に系が状態 $[j_0, j_1, \dots, j_\nu; j_{\nu+1}, \dots, j_k], [j_1, j_0, j_2, \dots, j_\nu; j_{\nu+1}, \dots, j_k], \dots,$ または $[j_1, j_2, \dots, j_\nu, j_0; j_{\nu+1}, \dots, j_k]$ (但し, $0 \leq \nu \leq \min\{k, M-1\}^*$, $j_0 + j_1 + \dots + j_\nu \leq N$, $\nu < \min\{k, M-1\}$ ならば $j_0 + j_1 + \dots + j_{\nu+1} > N$) にあり, Δt の間に第 2 段では大きさ j_0 のプロセスだけが終了するが, 新たに客が到着することはない. この確率はそれぞれ

$$p_{j_0 j_1 \dots j_k}^{j_0 \dots j_0}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t),$$

$$p_{j_1 j_0 j_2 \dots j_k}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t),$$

.....

$$p_{j_1 j_2 \dots j_k j_0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

iv) その他の変化の仕方では状態 $[j_1, j_2, \dots, j_k;]$ に達する. この確率は $o(\Delta t)$ である.

従って,

$$p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0}(\Delta t + \Delta t)$$

$$= p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0}(\Delta t)(1 - \mu_k \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{(1 - \delta_{k,c})}$$

$$+ p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0}(\Delta t)(1 - \mu_{k-1} \Delta t)^{k-1} \lambda \Delta t g(j_k)$$

$$+ (1 - \delta_{k,c}) \sum_{\nu=0}^{\min\{k, M-1\}}$$

$$\cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_\nu) \sum_{\nu \neq 0}^N \right.$$

$$j_0 = \left. \begin{matrix} N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 (\nu < \min\{k, M-1\}) \\ 1 (\nu = \min\{k, M-1\}) \end{matrix} \right\}$$

$$\cdot \{ p_{j_0 j_1 \dots j_k}^{j_0 \dots j_0}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

$$+ p_{j_1 j_0 j_2 \dots j_k}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

$$+ \dots + p_{j_1 j_2 \dots j_k j_0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu$$

$$\cdot (1 - \lambda \Delta t) \} + o(\Delta t) \tag{7}$$

(3) 時刻 $t + \Delta t$ に系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ ($j_1 + \dots + j_k \leq N$, $k < M$ ならば $j_1 + \dots + j_{k+1} > N$, $1 \leq k \leq M$, $k < l \leq C$) にある確率 $p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t + \Delta t)$

は, 以下の互に排反する事象の確率の和である.

i) 時刻 t に系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ にあり, Δt の間に第 2 段において, $l < C$ のときも客は到着せず, 終了するプロセスもない. この確率は

$$p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t)(1 - \mu_k \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{(1 - \delta_{l,c})}$$

* $\nu = k$ のとき, 例えば $[j_0, j_1, \dots, j_\nu; j_{\nu+1}, \dots, j_k]$ は $[j_0, j_1, \dots, j_k;]$ を意味する.

ii) 時刻 t に系が状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_{l-1}]$ にあり, Δt の間に第 2 段で終了するプロセスはないが, 大きさ j_l のプロセスが到着する. この確率は

$$p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t)(1 - \mu_k \Delta t)^k \lambda \Delta t g(j_l)$$

iii) $l < C$ の場合, 時刻 t に系が状態 $[j_0, j_1, \dots, j_\nu; j_{\nu+1}, \dots, j_l], [j_1, j_0, j_2, \dots, j_\nu; j_{\nu+1}, \dots, j_l], \dots,$ または $[j_1, j_2, \dots, j_\nu, j_0; j_{\nu+1}, \dots, j_l]$ (但し, $0 \leq \nu \leq \min\{k, M-1\}$, $j_0 + j_1 + \dots + j_\nu \leq N$, $\nu < M-1$ ならば $j_0 + j_1 + \dots + j_{\nu+1} > N$) にあり, Δt の間に第 2 段では大きさ j_0 のプロセスだけが終了するが, 新たに客が到着することはない. この確率はそれぞれ

$$p_{j_0 j_1 \dots j_l}^{j_0 \dots j_0}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t),$$

$$p_{j_1 j_0 j_2 \dots j_l}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t),$$

.....

$$p_{j_1 j_2 \dots j_l j_0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

iv) その他の変化の仕方では状態 $[j_1, \dots, j_k; j_{k+1}, \dots, j_l]$ に達する. この確率は $o(\Delta t)$ である.

従って,

$$p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t + \Delta t)$$

$$= p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t)(1 - \mu_k \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{(1 - \delta_{l,c})}$$

$$+ p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t)(1 - \mu_k \Delta t)^k \lambda \Delta t g(j_l) + (1 - \delta_{l,c})$$

$$\cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_\nu) \sum_{\nu \neq 0}^N \right.$$

$$j_0 = \left. \begin{matrix} N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 (\nu < \min\{k, M-1\}) \\ 1 (\nu = \min\{k, M-1\}) \end{matrix} \right\}$$

$$\cdot \{ p_{j_0 j_1 \dots j_l}^{j_0 \dots j_0}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

$$+ p_{j_1 j_0 j_2 \dots j_l}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu (1 - \lambda \Delta t)$$

$$+ \dots + p_{j_1 j_2 \dots j_l j_0}^{j_1 \dots j_1}(\Delta t) \mu_{\nu+1} \Delta t (1 - \mu_{\nu+1} \Delta t)^\nu$$

$$\cdot (1 - \lambda \Delta t) \} + o(\Delta t) \tag{8}$$

差分方程式(6)を書直すと

$$\frac{p_{00 \dots 0}(\Delta t + \Delta t) - p_{00 \dots 0}(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= -\lambda p_{00 \dots 0}(\Delta t) + \mu_1 \sum_{j_0=1}^N p_{j_0 0 \dots 0}(\Delta t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

となる. ここで, $\Delta t \rightarrow 0$ とすると, 微分方程式

$$\frac{d}{dt} p_{00 \dots 0}(\Delta t) = -\lambda p_{00 \dots 0}(\Delta t) + \mu_1 \sum_{j_0=1}^N p_{j_0 0 \dots 0}(\Delta t)$$

を得る. 式(7), (8)に対してもこれと連立する微分方程式が同様に得られる. 平衡状態の存在を仮定すると, この連立微分方程式

において $\lim_{t \rightarrow \infty} (d/dt) p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l}(t) = 0$, また,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l}(t) = p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l}$$

と置けるから、結局、モデルAの平衡方程式として次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & -\lambda p_{00 \dots 0} + \mu_1 \sum_{j_0=1}^N p_{j_0 0 \dots 0} = 0 \quad (9) \\ & -\{k\mu_k + (1 - \delta_k, c)\lambda\} p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0} + \lambda p_{j_1 \dots j_{k-1} 0 \dots 0} \\ & \cdot \varrho(j_k) + (1 - \delta_k, c) \sum_{\nu=0}^{\min\{k, M-1\}} \\ & \cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 \right\}_{\nu \neq 0}^{(\nu=0)} \\ & \cdot \mu_{\nu+1} (p_{j_0 j_1 \dots j_{\nu} 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}} + \dots \\ & + p_{j_1 \dots j_{\nu} j_0 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}}) = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

(但し, $j_1, j_2 + \dots + j_k \leq N, 1 \leq k \leq M$)

$$\begin{aligned} & -\{k\mu_k + (1 - \delta_{l,c})\lambda\} p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l} + \lambda p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_{l-1}^{l-1}}(j_l) \\ & + (1 - \delta_{l,c}) \sum_{\nu=0}^{\min\{k, M-1\}} \\ & \cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 \right\}_{\nu \neq 0}^{(\nu=0)} \\ & \cdot \mu_{\nu+1} (p_{j_0 j_1 \dots j_{\nu} 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}} + \dots \\ & + p_{j_1 \dots j_{\nu} j_0 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}}) = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

(但し, $j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, k < M$ ならば $j_1 + j_2 + \dots + j_{k+1} > N, 1 \leq k \leq M, k < l \leq C$)

この方程式を

$$\begin{aligned} & p_{00 \dots 0} + \sum_{k=1}^M \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N} p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0} \\ & + \sum_{k=1}^M \sum_{l=k+1}^C \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq N} \\ & \cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_k) + 1 \right\}_{(k=M)}^{(k < M)} \sum_{j_{k+2}=1}^N \dots \sum_{j_l=1}^N \\ & \cdot p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l} = 1 \quad (12) \end{aligned}$$

という条件の下で解けば、平衡状態分布を得る。

[モデルBの平衡方程式]

モデルBの場合には、第2段に l 個のプロセスが滞留しているときに、第1段には $C-l$ 人の客がいるので、時間 Δt の間に第2段に客が到着する確率は $(C-l)\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ である。この点以外はモデルAのままであるから、モデルBの平衡方程式として次の連立一次方程式を得る。

$$-C\lambda p_{00 \dots 0} + \mu_1 \sum_{j_0=1}^N p_{j_0 0 \dots 0} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & -\{k\mu_k + (C-k)\lambda\} p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0} + (C-k+1)\lambda \\ & \cdot p_{j_1 \dots j_{k-1} 0 \dots 0} \varrho(j_k) + (1 - \delta_k, c) \sum_{\nu=0}^{\min\{k, M-1\}} \\ & \cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 \right\}_{\nu \neq 0}^{(\nu=0)} \\ & \cdot \mu_{\nu+1} (p_{j_0 j_1 \dots j_{\nu} 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}} + \dots \\ & + p_{j_1 \dots j_{\nu} j_0 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}}) = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

(但し, $j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, 1 \leq k \leq M$)

$$\begin{aligned} & -\{k\mu_k + (C-l)\lambda\} p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l} + (C-l+1)\lambda \\ & \cdot p_{j_1 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_{l-1}^{l-1}}(j_l) + (1 - \delta_{l,c}) \sum_{\nu=0}^{\min\{k, M-1\}} \\ & \cdot \left\{ N - (j_1 + \dots + j_{\nu+1}) + 1 \right\}_{\nu \neq 0}^{(\nu=0)} \\ & \cdot \mu_{\nu+1} (p_{j_0 j_1 \dots j_{\nu} 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}} + \dots \\ & + p_{j_1 \dots j_{\nu} j_0 0 \dots 0}^{j_0^{j_0+1} \dots j_{\nu}^{\nu}}) = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

(但し, $j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, k < M$ ならば $j_1 + j_2 + \dots + j_{k+1} > N, 1 \leq k \leq M, k < l \leq C$)

これを条件(12)の下で解けば、モデルBの平衡状態分布を得る。

[モデルCの平衡方程式]

モデルAの平衡方程式において $C \rightarrow \infty$ とすると、モデルCに対する平衡方程式を得る。 $C \rightarrow \infty$ としたときの式(12)の条件の下でこれを解くと、モデルCの平衡状態分布を得る。

3.2 平衡状態分布

さて、3.1 で求めた各平衡方程式を一般的に、すなわち任意の $\{\mu_m | m=1, 2, \dots\}$ に対して解くのは容易なことではない。しかし、条件 $m\mu_m = \mu (m=1, 2, \dots)$ の下では解を手にすることができる。

[モデルAの平衡状態分布] $m\mu_m = \mu (m=1, 2, \dots)$ の場合、モデルAの平衡状態分布は、

$$\begin{aligned} & p_{00 \dots 0} = K_C \\ & p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0}^{j_1^{k+1} \dots j_l^l} = K_C \rho^l \left\{ \prod_{\nu=1}^l \varrho(j_{\nu}) \right\} \\ & (j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, k < M \text{ ならば } j_1 + j_2 + \dots + j_{k+1} > N, k = M \text{ ならば } 1 \leq j_{k+1} \leq N, 1 \leq j_{k+2} \leq N, \dots, 1 \leq j_l \leq N, 1 \leq k \leq M, k \leq l \leq C) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\rho = \lambda/\mu$, かつ、

$$K_C = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \rho^i} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{C+1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (17)$$

〔モデルBの平衡状態分布〕 $m\mu_m = \mu$ ($m=1, 2, \dots$)
 の場合、モデルBの平衡状態分布は、

$$\left. \begin{aligned} p_{00\dots 0} &= K_C \\ p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0} &= K_C \rho^l \left\{ \prod_{i=1}^l (C-i+1) \right\} \left\{ \prod_{v=1}^l g(j_v) \right\} \\ &\left(j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, k < M \text{ ならば } j_1 + j_1 + \dots + j_{k+1} > N, k = M \text{ ならば } 1 \leq j_{k+1} \leq N, 1 \leq j_{k+2} \leq N, \dots, 1 \leq j_l \leq N, 1 \leq k \leq M, k \leq l \leq C \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで、 $\rho = \lambda/\mu$, かつ

$$K_C = \frac{1}{\sum_{k=0}^C k! \binom{C}{k} \rho^k} \quad (19)$$

〔モデルCの平衡状態分布〕 $m\mu_m = \mu$ ($m=1, 2, \dots$)
 の場合、モデルCの平衡状態分布は、

a) $\rho = \lambda/\mu < 1$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} p_{00\dots 0} &= K_{\infty} \\ p_{j_1 j_2 \dots j_k 0 \dots 0} &= K_{\infty} \rho^l \left\{ \prod_{v=1}^l g(j_v) \right\} \\ &\left(j_1 + j_2 + \dots + j_k \leq N, k < M \text{ ならば } j_1 + j_2 + \dots + j_{k+1} > N, k = M \text{ ならば } 1 \leq j_{k+1} \leq N, 1 \leq j_{k+2} \leq N, \dots, 1 \leq j_l \leq N, 1 \leq k \leq M, k \leq l \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで、

$$K_{\infty} = 1 - \rho. \quad (21)$$

b) $\rho \geq 1$ のときは、存在しない。

条件 $\mu_m = \mu$ ($m=1, 2, \dots$) の下での平衡状態分布を得るのは、やはりなかなか困難である。しかしながら、系内の客の総数が2という特殊な場合には一般に、すなわち任意の μ_1, μ_2 に対して簡単に解けるので、次に解を示す。

〔モデルAの2人客の平衡状態分布〕 与えられた μ_1, μ_2 に対して $\rho_1 = \lambda/\mu_1, \rho_2 = \lambda/2\mu_2$ と置くと、

$$\left. \begin{aligned} p_{00} &= K_2 \\ p_{j,0} &= K_2 \rho_1 g(j) \quad (1 \leq j \leq N) \\ p_{j,0^k} &= K_2 \rho_1^2 g(j) g(k) \\ &\quad (1 \leq j \leq N, N-j < k \leq N) \\ p_{j,k} &= K_2 \rho_1 \rho_2 g(j) g(k) \\ &\quad (1 \leq j \leq N-1, 1 \leq k \leq N-j) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$K_2 = \frac{1}{1 + \rho_1 + \rho_1^2 - \rho_1(\rho_1 - \rho_2) \sum_{i=1}^{N-1} g(j) G(N-j)} \quad (23)$$

〔モデルBの2人客の平衡状態分布〕 与えられた μ_1, μ_2 に対して $\rho_1 = \lambda/\mu_1, \rho_2 = \lambda/2\mu_2$ と置くと、

$$\left. \begin{aligned} p_{00} &= K_2 \\ p_{j,0} &= 2K_2 \rho_1 g(j) \quad (1 \leq j \leq N) \\ p_{j,0^k} &= 2K_2 \rho_1^2 g(j) g(k) \\ &\quad (1 \leq j \leq N, N-j < k \leq N) \\ p_{j,k} &= 2K_2 \rho_1 \rho_2 g(j) g(k) \\ &\quad (1 \leq j \leq N-1, 1 \leq k \leq N-j) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$K_2 = \frac{1}{1 + 2\rho_1 + 2\rho_1^2 - 2\rho_1(\rho_1 - \rho_2) \sum_{i=1}^{N-1} g(j) G(N-j)} \quad (25)$$

3.3 諸特性

3.2 に示した平衡状態分布から下記の確率分布などが導かれる。ここでは、モデルAとCに関する結果だけを示す。また、条件 $m\mu_m = \mu$ ($m=1, 2, \dots$) を仮定する。以下で、 $P_{m,N}^C$ などの右肩の添字がCのときはモデルAを表わし、 ∞ のときはモデルCを表わす。

3.3.1 多重度Dの平衡分布

$$\begin{aligned} P_{m,N}^C &= P\{D=m, 1 \leq m \leq M-1\} \\ &= \sum_{l=m}^C \sum_{j_1 + \dots + j_m \leq N} \sum_{j_{m+1} = N - (j_1 + \dots + j_m) + 1}^N \dots \sum_{j_l = 1}^N p_{j_1 \dots j_m 0 \dots 0}^{j_1 \dots j_l} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 - \rho^{C+1}} [\rho^m G^{m*}(N) - \rho^{m+1} G^{(m+1)*}(N)] \\ - \rho^{C+1} [G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N)] & (\rho \neq 1) \\ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) - \frac{1}{C+1} \{m G^{m*}(N) \\ - (m+1) G^{(m+1)*}(N)\} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

但し、 $G^{m*}(j)$ は、 $G^{1*}(j) = G(j)$, $G^{m*}(j) = G * (G^{(m-1)*})(j)$ で与えられる G の m 重の convolution である。

$$\begin{aligned} P_{N,N}^C &= P\{D=M\} \\ &= \sum_{l=M}^C \sum_{j_1 + \dots + j_M \leq N} \sum_{j_{M+1} = 1}^N \dots \sum_{j_l = 1}^N p_{j_1 \dots j_M}^{j_1 \dots j_l} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 - \rho^{C+1}} [\rho^M G^{M*}(N) - \rho^{C+1} G^{M*}(N)] \\ & (\rho \neq 1) \\ G^{M*}(N) - \frac{1}{C+1} M G^{M*}(N) & (\rho = 1) \end{cases} \quad (27) \end{aligned}$$

モデルCの多重度の平衡分布は、式(26), (27)において $C \rightarrow \infty$ とすれば求められる。但し、 $\rho \geq 1$ ならば、待ち行列は限りなく長くなる。

$$P_{m,N}^{\infty} = P\{D=m, 1 \leq m \leq M-1\}$$

$$= \begin{cases} \rho^m G^{m*}(N) - \rho^{m+1} G^{(m+1)*}(N) & (\rho < 1) \\ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (28)$$

$$P_{M,N^*} = \begin{cases} \rho^M G^{M*}(N) & (\rho < 1) \\ G^{M*}(N) & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (29)$$

次に、記憶領域要求量 J の分布が一様分布であると仮定して多重度 D の平均 \bar{M}_{M,N^C} を様々な形で示す。

$$\bar{M}_{M,N^C} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho^{C+1}} \sum_{i=0}^M \left[\binom{N}{i} \left(\frac{\rho}{N}\right)^i - \rho^{C+1} \binom{N}{i} \frac{1}{N^i} \right] & (\rho \neq 1) \\ -1 & (\rho \neq 1) \\ \sum_{i=0}^M \binom{N}{i} \frac{1}{N^i} - \frac{1}{C+1} \sum_{i=0}^{M-1} \binom{N-1}{i} \frac{1}{N^i} - 1 & (\rho = 1) \end{cases} \quad (30)$$

$M=N \leq C$ ならば、

$$\bar{M}_{N,N^C} = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho^{C+1}} \left[\left(1 + \frac{\rho}{N}\right)^N - \rho^{C+1} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \right] & (\rho \neq 1) \\ -1 & (\rho \neq 1) \\ \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N - \frac{1}{C+1} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} - 1 & (\rho = 1) \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{M}_{M,N^*} = \begin{cases} \sum_{i=0}^M \binom{N}{i} \left(\frac{\rho}{N}\right)^i - 1 & (\rho < 1) \\ \sum_{i=0}^M \binom{N}{i} \frac{1}{N^i} - 1 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (32)$$

$$\bar{M}_{N,N^*} = \begin{cases} \left(1 + \frac{\rho}{N}\right)^N - 1 & (\rho < 1) \\ \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N - 1 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (33)$$

$$\bar{M}_{M,N^*} = \begin{cases} \sum_{i=0}^M \frac{\rho^i}{i!} - 1 & (\rho < 1) \\ \sum_{i=0}^M \frac{1}{i!} - 1 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (34)$$

$$\bar{M}_{\infty,N^*} = \begin{cases} e^\rho - 1 & (\rho < 1) \\ e - 1 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (35)$$

3.3.2 第2段の系内プロセス数 L の分布

モデルAについては、

$$P\{L=l\} = \begin{cases} \frac{\rho^l(1-\rho)}{1-\rho^{C+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{C+1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (36)$$

モデルCについては、

$$P\{L=l\} = \begin{cases} \rho^l(1-\rho) & (\rho < 1) \\ 0 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (37)$$

3.3.3 第2段の待ち行列の長さ L_Q の分布

モデルAについては、

$$P\{L_Q=l\} = \begin{cases} \frac{\rho^l(1-\rho)}{1-\rho^{C+1}} \left[\sum_{m=1}^M \rho^m G^{m*}(N) - \sum_{m=1}^{M-1} \rho^m G^{(m+1)*}(N) \right] & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{C+1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (38)$$

モデルCについては、

$$P\{L_Q=l\} = \begin{cases} \rho^l(1-\rho) \left[\sum_{m=1}^M \rho^m G^{m*}(N) - \sum_{m=1}^{M-1} \rho^m G^{(m+1)*}(N) \right] & (\rho < 1) \\ 0 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (39)$$

3.3.4 記憶空間利用率 U の分布

$$P_{0/N^C} = P\{U=0\} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}} & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{C+1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (40)$$

$$P_{n/N^C} = P\{U=n/N, 1 \leq n \leq M-1\} \\ = \sum_{m=1}^n \sum_{j_1+\dots+j_m=n}^C \sum_{j_{m+1}=N-(j_1+\dots+j_m)+1}^N \\ \cdot \sum_{j_{m+2}=1}^N \dots \sum_{j_l=1}^N p_{j_1 \dots j_m 0 \dots 0}^{j_{m+1} \dots j_l} \\ \left\{ \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{1-\rho^{C+1}} \rho^m g^{m*}(n) \{1-\rho G(N-n)\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}} g^{m*}(n) \{1-G(N-n)\} \right] \right\} (\rho \neq 1) \\ = \sum_{m=1}^n \left[g^{m*}(n) \left\{ 1 - \frac{C}{C+1} G(N-n) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{C+1} m g^{m*}(n) \{1-G(N-n)\} \right] (\rho = 1) \quad (41)$$

$$P_{n/N^C} = P\{U=n/N, M \leq n \leq N\} \\ = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j_1+\dots+j_m=n}^C \sum_{j_{m+1}=N-(j_1+\dots+j_m)+1}^N \\ \cdot \sum_{j_{m+2}=1}^N \dots \sum_{j_l=1}^N p_{j_1 \dots j_m 0 \dots 0}^{j_{m+1} \dots j_l} \\ + \sum_{l=M}^C \sum_{j_1+\dots+j_M=n} \sum_{j_{M+1}=1}^N \dots \sum_{j_l=1}^N p_{j_1 \dots j_M}^{j_{M+1} \dots j_l} \\ \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \left[\frac{1}{1-\rho^{C+1}} \rho^m g^{m*}(n) \{1-\rho G(N-n)\} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}} g^{m*}(n) \{1-G(N-n)\} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{1-\rho^{C+1}} [\rho^M g^{M*}(n) - \rho^{C+1} g^{M*}(n)] \right\} (\rho \neq 1)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M-1} \left[g^{m*}(n) \left\{ 1 - \frac{C}{C+1} G(N-n) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{C+1} m g^{m*}(n) \{ 1 - G(N-n) \} \right] \\ + \left(1 - \frac{M}{C+1} \right) g^{M*}(n) \end{cases} \quad (\rho < 1) \quad (42)$$

$$P_{0..N} = \begin{cases} 1 - \rho & (\rho < 1) \\ 0 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (43)$$

$P_{n..N} (1 \leq n \leq M-1)$

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^n \rho^m g^{m*}(n) \{ 1 - \rho G(N-n) \} & (\rho < 1) \\ \sum_{m=1}^n g^{m*}(n) \{ 1 - G(N-n) \} & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (44)$$

$P_{n..N} (M \leq n \leq N)$

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^{M-1} \rho^m g^{m*}(n) \{ 1 - \rho G(N-n) \} + \rho^M g^{M*}(n) & (\rho < 1) \\ \sum_{m=1}^{M-1} g^{m*}(n) \{ 1 - G(N-n) \} + g^{M*}(n) & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (45)$$

記憶領域要求量 J の分布が一様分布であるとして、記憶空間の使用率 U の平均 $\bar{U}_{M..N}^C$ を示す。

$M=N-\infty$ の場合、

$$\bar{U}_{\infty..N}^C = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho^{C+1}} \left\{ \frac{1}{\rho} e^\rho - \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right\} - \frac{\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}} (e-2) & (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{C+1} \{ (C-7)e - (2C-5) \} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (46)$$

$$\bar{U}_{\infty..N} = \begin{cases} \frac{1}{\rho} e^\rho - \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) & (\rho < 1) \\ e-2 & (\rho \geq 1) \end{cases} \quad (47)$$

4. 二、三の考察—むすび

条件 $m\mu_m = \mu (m=1, 2, \dots)$ の下では、モデルAは Kendall の記号で記すと $M/M/1(C)$ またはそれに等価な2段階待ち行列の拡張、モデルBは $M/M/1/C$ またはそれに等価な2段階待ち行列の拡張、モデルCは $M/M/1(\infty)$ の拡張となっている。このことは、 G が deterministic な場合、例えば、 $g(j)=0 (j < N)$, $g(N)=1$ を考えると、対応する型の待ち行列モデルにおける平衡状態分布 $\{q_i\}$ との間には $p_{0..0} = q_0$, $p_{j_1 \dots j_l}^{j_1 \dots j_l} = q_i (j_1 = \dots = j_l = N)$ という関係が成り立つことから明らかである。さらに、一般の形では $p_{0..0} = q_0$, $p_{j_1 \dots j_l}^{j_1 \dots j_l} = q_i \left\{ \prod_{v=1}^l g(j_v) \right\}$ が成り立つ。

この結果から、 $m\mu_m = \mu (m=1, 2, \dots)$ の条件の下では、プロセスの到着分布が一般 (GI型) の場合も対応する型の待ち行列の平衡状態分布 $\{q_i\}$ から上記の式を用いて直ちに平衡状態分布 $\{p_{j_1 \dots j_l}^{j_1 \dots j_l}\}$ が得られるのではなからうかと推測される。

条件 $\mu_m = \mu (m=1, 2, \dots)$ の下では、各モデルはそれぞれ $s (1 \leq s \leq \infty)$ 個のサーバを持つ従来の待ち行列モデルの拡張となる。この場合は平衡方程式の解を求めるのが困難ではあるが、平衡条件は、

$$\rho = \frac{1}{\sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m} \{ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) \} + \frac{1}{M} G^{M*}(N)}$$

であること、スループットは λ となり、多重度の平均は ρ となることなどは知ることができる。このことは、この系が過密輻輳にあるか、あるいは待ち行列が時間の経過と共に限りなく長くなるときに、その本性を明らかにすることを示している。

本稿では、設定したモデルについて、多重度や記憶空間利用率の確率分布などを解析的に求めることに目的を限定したが、これだけでは不十分なことは明らかである。そこで、

(1) 現実のシステムから得られる実際的なパラメータ値を与えて本稿で得た諸式から具体的な数値結果を求め、これと現実のシステムの動作状況とを比較してモデルの表現能力を正当に評価することが必要であろう。その努力があって後、解析的に求めた諸結果が、現実のシステムの性能評価をするに当たって役に立つ予測値を与えることができるといえよう。しかし、現在の著者にはそこまで行うのは困難な状態にあるのは残念である、

又、(2) 本稿で得た理論式自体からシステムの設計に役に立つ普遍性のあるいくつかの教訓を得ることもできよう (例えば、文献4)の4.のように)。本稿では、紙巾の不足の外にも二、三の条件に制約されてそこまで論が及ばなかった点に不満が残る。そこでこの点については読者のよき応用又は利用を期待したい。

参考文献

- 1) Per Brinch Hansen: Operating Systems Principles, Prentice-Hall, Inc. (1973)
- 2) T. Betteridge: An Analytic Storage Allocation Model, Acta-Informatica, 3, 2, p. 101(1974)
- 3) J. P. Buzen and D. B. Rubin: Effects of compaction on memory utilization in multiprogramming systems, Computer Architectures and

- Networks, E. Gelenbe/R. Mahl (Eds.), North Holland Publishing Company (1974)
- 4) 伊澤喜三男：動的再配置の解析と最適システムの設計, 情報処理, **16**, 5, p. 410 (1975)
 - 5) 伊澤喜三男：動的再配置系における待ち時間の平均, 信学論(D), **59-D**, 2, p. 77 (1976)
 - 6) 伊澤喜三男：動的再配置系における待ち時間に関する一考察, 信学論 (D), **58-D**, **11**, p. 312 (1975)
 - 7) 応用待ち行列事典, 廣川書店 (1971)
(昭和 51 年 2 月 26 日受付)
(昭和 52 年 8 月 18 日再受付)
-