論 文

領域の最適三角形群への分割アルゴリズム*

岸 本 一 男**

Abstract

An algorithm is presented for partitioning a domain into a suitable family of triangular plates, of which vertices consist of given points arbitrarily distributed in a plane. The family of so obtained triangular plates is uniquely determined by the algorithm except for "singular domains", and this triangulation is proved to be optimum is the sense that the minimum angle of the so determined triangular plates is larger than the minimum angle of the triangular plates obtained by any other algorithm for triangulation.

It is also proved that the dual partition can be introduced which divides the whole plane into the family of dual polygons. The present algorithm treats two dimesional cases, but it is easily extended to any higher dimensional cases.

1. はじめに

離散的に分布している観測点における観測データをもとに等高線図を作成するには，まず適当な補間の方法が決定されなくてはならない．その補間の方法として最も簡明なものは，作図すべき領域を，観測点を頂点とする三角形の族に分割し，その三角形要素ごとに線形補間を行うという方法である．これは，観測データが示す点を頂点とし，その各々の面が三角形であるような多面体によって，もとの曲面を近似したことになっている．このような補間法に基づく等高線の作図法は，Harbaugh and Merriam[2]による著書の中で多面体法とよばれており，等高線を計算機で自動作図するような場合に有効である．

ところで上の方法の中で，与えられた一組の観測点の集合に対して，三角形分割の仕方は幾通りも存在しうるので，Harbaugh and Merriam の同じ著書の中で指摘されている通り，分割法を特定するための具体的なアルゴリズムが与えられなくてはならない．しかしながら，等高線の自動作図に関するその後の研究[3)~6)]においても，望ましい分割法に関する定量的な検討は看過されてきている．

従来，このような場合に望ましい三角形分割法とは，"できるだけ三角形要素を正三角形に近くするもの[1)]"．あるいは，その結果できた三角形板の族が"細長い三角形や，つぶれた三角形を含まないもの[3)]"であるとされているが，本稿では，その要請に対する一つの解として，平面内に任意に分布する離散点を頂点とした三角形分割を，一意に実行する手順を与える．それによって定められる三角形板の族は，その三角形板要素群の最小の角が，他の任意の分割法で決定された三角形群の最小の角より大きいという意味で最適である．この最適性は全域的にはもちろん成立するし，二つの三角形板の族の部分的に重なり合う三角形板群どうしの比較においても既に成立している．又，得られた三角形分割法は，"与点の勢力圏"という概念を導入することによって定義される双対多角形分割を有することが示される．更に，以上の三角形分割法ならびにその双対多角形分割法に関する議論は，容易により高次のユークリッド空間における場合の議論に拡張される．

2. 三角形分割

N 個の相異なる点 $P(n)(n=1,2,\cdots,N)$ が平面内に任意に分布しているとする．但し，それら N 個の点 $P(n)$ のすべてが同一直線上にある場合は除いて考える．それら N 個の点 $P(n)$ の凸包を，各与点 $P(n)$

* An algorithm for the optimum trianguation by Kazuo KISHIMOTO (Department of Mathematical Engineering and Instrumentation Physics, Faculty of Engineering, University of Tokyo).

** 東京大学工学部計数工学科

を頂点とし，互いに境界以外では共通部分をもたない閉多角形板 $\overline{S(k)}(k=1, 2, \cdots, K)$ の族に分割することを考える．そのために，まず分割すべき領域を N 個の与点の凸包とは限定せず，より一般にそれらの与点のうちの任意個数のものを頂点とする閉多角形領域を分割するとした場合について，次の定義をする．

［定義1］ N 個の与点 $P(n)$ と，閉多角形領域 Γ ならびに K 個の閉多角形板 $\overline{S(k)}\,(k=1, 2, \cdots, K)$ が以下の関係を満足している時，K 個の閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K}$ は N 個の与点の和集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉領域 Γ を多角形分割しているという．

（a）　閉多角形領域 Γ は，K 個の閉多角形板 $\overline{S(k)}$ の和集合 $\bigcup_{k=1}^{K} \overline{S(k)}$ に等しい．

（b）　閉多角形板 $\overline{S(k)}$ の内点の集合を $S(k)$ と記すとき，　相異なる二つの開多角形板 $S(k)$ と $S(k')$ とは共通部分をもたない．すなわち，

$$S(k)\cap S(k')=\phi \quad k\neq k'$$

（c）　各閉多角形板 $\overline{S(k)}$ のどの頂点も $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ に含まれる．同じく $\overline{S(k)}$ の頂点以外の点，すなわち $\overline{S(k)}$ の内点および $\overline{S(k)}$ の頂点ではない周上の点は，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ に含まれない．⊠

［定義2］ 定義1において各閉多角形板 $\overline{S(k)}$ がすべて閉三角形板であるならば，$\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K}$ は $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として Γ を三角形分割しているという．⊠

さて，平面内に二次元的に任意に分布する N 個の点 $P(n)$ が与えられた時，次の手順1によって閉多角形板の族を構成する．まず三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ は同一直線上にはないとした時，次の記法を定義する．

$\partial C(P(a)P(b)P(c))$：三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ を通る円周．

$C(P(a)P(b)P(c))$：三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ が定める開円板．すなわち，円周 $\partial C(P(a)P(b)P(c))$ の内部．

$\overline{C(P(a)P(b)P(c))}$：三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ が定める閉円板．すなわち，

$$\partial C(P(a)P(b)P(c))\cup C(P(a)P(b)P(c))$$

(手順 1) 平面内に与えられた N 個の点 $P(n)$ から選ばれた三点の組，$P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ $(a\neq b,\ b\neq b,\ c\neq a)$ に対して，

（1）　三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ が同一直線上にあるかどうかを判定する．もし同一直線上にあるなら何もしない．もし同一直線上にないなら（2）の操作をほどこす．

（2）　与点 $P(n)$ のうちに，三点 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ が決定する開円板 $C(P(a)P(b)P(c))$ に属するものがあるかどうかを判定する．もし一つでも属する与点があるなら何もしない．もし属する与点が全く存在しないなら，すなわち

$$\{P(n)\}_{n=1}{}^{N}\cap C(P(a)P(b)P(c))=\phi$$

なら，与点 $P(n)$ のうちで円周 $\partial C(P(a)P(b)P(c))$ 上にあるものをすべて求め，それらの凸包を，求めるべき閉多角形板の族に含ませる．

以上の操作をすべての三点の組 $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ $(a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a)$ に対してほどこす．⊠

手順1によって K 個の閉多角形板が構成されたとするとき，それら K 個の閉多角形板を $\overline{S(k)}$ $(k=1, 2, \cdots, K)$ と記すことにしよう．又，与えられた N 個の点 $P(n)$ の凸包を Γ と記すことにする．以下では，得られた K 個の閉多角形板のつくる族 $\{S(k)\}_{k=1}{}^{K}$ が，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉多角形領域 Γ を多角形分割していることを示す．まず次の記法を導入する．

$\alpha_l(Q)$：直線 l を境界とする二つの開半平面のうち，点 Q を含む方．

$\alpha_l'(Q)$：直線 l を境界とする二つの開半平面のうち，点 Q を含まない方．

α_l：直線 l を境界とする二つの開半平面のうちの任意の一方．

α_l'：直線 l を境界とする二つの開半平面のうちの α_l でない方．

任意の二つの円周の交点の数は高々二点をこえないことを考慮すると，次の二つの補題は明らかである．

［補題 1］ 二つの相交わる円周を $\partial C(1)$, $\partial C(2)$ とし，その二つの交点を結ぶ直線を l とする．

（a）　点 A が円周 $\partial C(1)$ に属し，しかも閉円板 $\overline{C(2)}$ には属さないなら，　閉円板 $\overline{C(1)}$ のうち直線 l に関して点 A の反対側にある部分，すなわち $\overline{C(1)}\cap\alpha_l'(A)$ は開円板 $C(2)$ に含まれる (**Fig. 1**(a))．

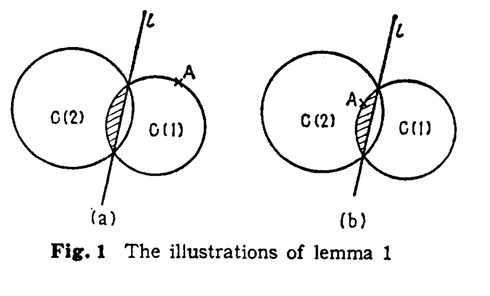

Fig. 1 The illustrations of lemma 1

(b) 点 A が円周 $\partial C(1)$ と閉円板 $\overline{C(2)}$ の両方に属すなら，閉円板 $\overline{C(1)}$ のうち直線 l に関して点 A と同じ側にある部分，すなわち $\overline{C(1)}\cap\alpha_l(A)$ は開円板 $C(2)$ に含まれる (**Fig. 1(b)**).

[補題 2] 二つの円周を $\partial C(1)$, $\partial C(2)$ とし，二点 A, B はどちらも円周 $\partial C(2)$ 上にあり，しかもどちらも開円板 $C(1)$ に含まれないものとする．すなわち，

$$A\cup B\subset\partial C(2) \tag{2.1}$$

$$(A\cup B)\cap C(1)=\phi \tag{2.2}$$

とする．このとき閉円板 $\overline{C(1)}$ は――正確には閉円板 $\overline{C(1)}$ から直線 AB 上の点を除いた部分は――直線 AB によって二つの領域 $\overline{C(1)}\cap\alpha_l$ と $\overline{C(1)}\cap\alpha_l'$ とに分かたれているが，この二つの部分のうち少なくとも一方は開円板 $C(2)$ に含まれる (**Fig. 2**). ☒

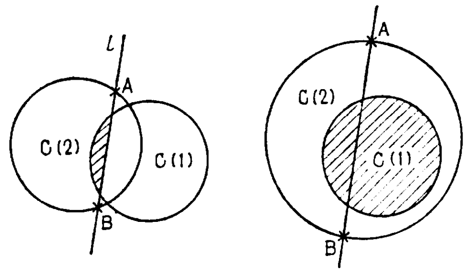

Fig. 2 The illustrations of lemma 2

この二つの補題を用いて，次の定理1が証明される．

[定理 1] 手順1によって一意的に閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ が得られ，この閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ は $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点としてそれらの凸包，$\overline{\Gamma}$ を多角形分割している．

証　明　構成される閉多角形板の族が，手順1によって一意に定められていることは明らか．従って，その閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ が，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉領域 $\overline{\Gamma}$ を多角形分割していることを示せば十分．

以下証明の前半では，得られた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ の適当な部分族が，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ の凸包を多角形分割していることを数学的帰納法を用いて示す．

まず得られた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ の中から，次のようにして閉多角形板を一つ選びだす．これはまた，$\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ が空ではないことを示している．まず与点 $P(n)$ の中から一点を選ぶ．この選ばれた点を $P(1)$ であったとしよう．次に $P(n)\,(n=2, 3, \cdots, N)$ の中から $P(1)$ に最も近い点を選ぶ．但しそのような点が幾つもある場合は，そのうちの任意の一つだけを選ぶとしよう．その選ばれた点を $P(2)$ であったとする．このような選ばれた番号に関する仮定は，何ら一般性を害していない．更に，線分 $P(1)P(2)$ の中点を D とし，線分 $P(1)P(2)$ を直径とする閉円板を $\overline{C(1)}$ と定める (**Fig. 3**). ここにおいて，N 個の与点 $P(n)$ のうち閉円板 $\overline{C(1)}$ に含まれるものは $P(1)$ と $P(2)$ の二つだけであり，従って特に，開円板 $C(1)$ は与点

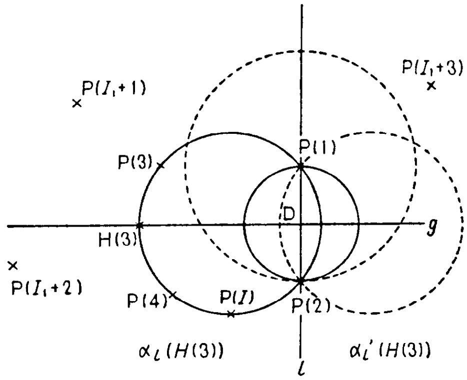

Fig. 3 The first part of the proof of theorem 1

$P(n)$ を全く含まないことに注意しておこう．すなわち，次の (2.3) 式が成立する．

$$\left(\bigcup_{n=1}^{N} P(n)\right)\cap C(1)=\phi \tag{2.3}$$

さて，三点 $P(1)$, $P(2)$, $P(n)$ が同一直線上にないとすれば，それら三点を通る円周がただ一つ定まる．その円周 $\partial C(P(1)P(2)P(n))$ と，線分 $P(1)P(2)$ の垂直二等分線 g との交点は，直線 $P(1)P(2)$ の両側に各一つずつ合計二つ存在する．この二つの交点のうち直線 $P(1)P(2)$ に関し点 $P(n)$ と同じ側にある方を $H(n)$ とする．すなわち，直線 $P(1)P(2)$ を l と記すことにすれば，

$$H(n)=\alpha_l(P(n))\cap g\cap\partial C(P(1)P(2)P(3))$$

である (**Fig. 3**). かくして直線 $P(1)P(2)$ に含まれないような $P(n)$ のみを考えることとすれば，一つの与点 $P(n)$ に対応して丁度一つの点 $H(n)$ が定まることが分る．従って，線分 $DH(n)$ の長さ $\overline{DH(n)}$ をそのような $P(n)$ の関数と考えることができる．そこで直線 $P(1)P(2)$ に含まれないような $P(n)$ のうちから $\overline{DH(n)}$ を最小にするようなものを選び，それを $P(3)$ であったと考えることにしよう．但し，そのような $P(n)$ がいくつもあったなら，その任意の一つを $P(3)$

であると考えることにする．

さらにここで三点 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ が定める円周 $\partial C(P(1)P(2)P(3))$ 上に，まだほかの与点 $P(n)$ があるとすれば，それらの点を $P(4)$, $P(5)$, …, $P(I_1)$ であるとする．番号に関するこのような仮定は何ら一般性を害していない．この時，円周 $\partial C(P(1)\ P(2)P(3))$ 上にある I_1 個の点の凸包，すなわち $\bigcup_{n=1}^{I_1} P(n)$ の凸包は，手順1で得られた閉多角形板の族 $\{S(k)\}_{k=1}^{K}$ に属す．

そのことを示そう．それには開円板 $C(P(1)P(2)P(3))$ がいかなる与点 $P(n)$ も含まないことを示せばよい．開円板 $C(P(1)P(2)P(3))$ は直線 l によって，直線 l 上にある部分 $l\cap C(P(1)P(2)P(3))$，ならびに直線 l によって分けられた二つの開領域 $\alpha_l(H(3))\cap C(P(1)P(2)P(3))$ と $\alpha_l'(H(3))\cap C(P(1)P(2)P(3))$ の合計三つの開領域に分たれている．まず式 (2.3) から $l\cap C(P(1)P(2)P(3))$ はいかなる与点 $P(n)$ も含まない．又，点 $H(3)$ の反対側にあたる領域 $\alpha_l'(H(3))\cap C(P(1)P(2)P(3))$ は補題1（a）によって開円板 $C(1)$ に含まれており，従って式(2.3) によっていかなる与点も含まない．又更に，点 $H(3)$ と同じ側にある領域 $\alpha(H(3))\cap C(P(1)P(2)P(3))$ は，$\overline{DH(3)}$ の最小性と補題1(b) とによりいかなる与点 $P(n)$ も含まない．何故なら，ある与点 $P(n)$ を含んだとすると，三点 $P(1)$, $P(2)$, $P(n)$ が決定する閉円板 $\overline{C(P(1)P(2)P(n))}$ のうちで直線 l に関し点 $H(3)$ と同じ側にある部分，従って特に点 $H(n)$ が開円板 $C(P(1)P(2)P(3))$ に含まれ，$\overline{DH(3)}$ の最小性の仮定に反するからである．

かくして円周 $\partial C(P(1)P(2)P(3))$ 上にある I_1 個の点 $P(n)(n=1,2,\cdots,N)$ の凸包は，手順1で得られた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}^{K}$ から取り出された一つの閉多角形板である．この閉多角形板を $\overline{S(1)}$ であったとしよう．すると $\overline{S(1)}$ は $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉領域 $\bar{\Gamma}_1=\overline{S(1)}$ を多角形分割している．

次に $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}^{K}$ の部分族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}^{\kappa}$ が，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉領域 $\bar{\Gamma}$ の部分閉領域 $\bar{\Gamma}_\kappa=\bigcup_{k=1}^{\kappa} S(k)$ を多角形分割していたとする．このとき残りの部分族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=\kappa+1}^{K}$ の中から適当な閉多角形板 $\overline{S(\kappa+1)}$ を選び，$\{\overline{S(k)}\}_{k=1}^{\kappa+1}=\{S(k)\}_{k=1}^{\kappa}\cup\{\overline{S(\kappa+1)}\}$ が閉領域 $\bar{\Gamma}_{\kappa+1}=\bigcup_{k=1}^{\kappa+1}\overline{S(k)}$ を $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として多角形分割しているようにできることを示す．まず開領域 $\bar{\Gamma}_\kappa$ の内点の集合を Γ_κ と記すことにし，開領域 Γ_κ に含まれる与点 $P(n)$ の個数を J_κ とする．ここで，必要なら適当な番号の変更をすることにより，

$$P(n)\in\Gamma_\kappa \quad (n=1,2,\cdots,J_\kappa)$$

$$P(n)\notin\Gamma_\kappa \quad (n=J_\kappa+1,\ J_\kappa+2,\ \cdots,\ N)$$

と仮定してよい．又，領域 Γ_κ の境界 $\partial\Gamma_\kappa$ に含まれる任意の辺を選びその係を $P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)$ としてよい．又同様に，閉領域 $\bar{\Gamma}_\kappa$ に含まれているような閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}^{\kappa}$ のうちで線分 $P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)$ を辺としてもつものを $\overline{S(\kappa)}$ であったとしておく．更に，線分 $P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)$ の中点を D とし，閉多角形板 $\overline{S(\kappa)}$ の外接閉円板を $\overline{C(\kappa)}$ としよう．次に $H(n)(n=J_\kappa+1,\ J_\kappa+2,\ \cdots,\ N)$ を，三点 $P(J_\kappa+1)$, $P(J_\kappa+2)$, $P(n)$ が決定する円周 $\partial C(P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)P(n))$ と，線分 $P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)$ の垂直二等分線との二つの交点のうちの，閉領域 $\bar{\Gamma}_\kappa$ に含まれない方の点とする．すなわち全平面に関する閉領域 $\bar{\Gamma}_\kappa$ の補集合を $\bar{\Gamma}_\kappa{}^c$ と書くとすれば，

$$H(n)=\bar{\Gamma}_\kappa{}^c\cap g\cap\partial C(P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)P(n))$$

である(**Fig. 4**)．但し，三点 $P(1)$, $P(2)$, $P(n)$ が同一直線上にある場合には，$H(n)$ は定義されないとしておく．さて，かくして与点 $P(n)(n=J_\kappa+3,\ J_\kappa+4,\ \cdots,\ N)$ の中から，閉多角形板 $\overline{S(1)}$ を定めた時と同じようにして，$\overline{DH(n)}$ を最小にするような $P(n)$ を選ぶことができる．その与点を $P(J_k+3)$ とする．更に，三点 $P(J_\kappa+1)$, $P(J_\kappa+2)$, $P(J_\kappa+3)$ が定める円周 $\partial C(P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)P(J_\kappa+3))$ 上にまだほかの与点 $P(n)$ があるとすれば，それらの点を $P(J_\kappa+4)$, $P(J_\kappa+5)$, …, $P(J_\kappa+I_\kappa)$ であるとする．このとき開円板 $C(\kappa)$ が与点 $P(n)$ を全く含まないこと，すなわち，

$$\left(\bigcup_{n=1}^{N} P(n)\right)\cap C(\kappa)=\phi$$

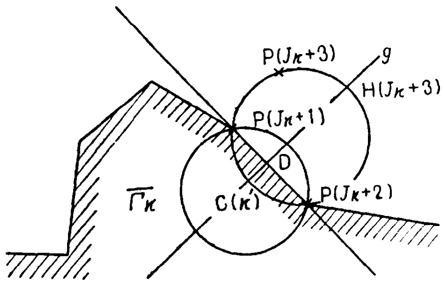

Fig. 4 The illustration of the second part of the proof of theorem 1

に注意しておこう．すると開円板 $C(P(1)P(2)P(3))$ が与点 $P(n)$ を全く含まないことを示したのと同様に，開円板 $C(P(J_\kappa+1)P(J_\kappa+2)P(J_\kappa+3))$ が与点 $P(n)$ を全く含まないことを示すことができる．従って，その円周上の I_κ 個の点 $P(J_\kappa+1)$, $P(J_\kappa+2)$, …, $P(J_\kappa+I_\kappa)$ の凸包は手順 1 で得られた閉多角形板の族 $\{S(k)\}_{k=1}{}^K$ の要素である．この凸包を $\overline{S(\kappa+1)}$ と記せば，$(\kappa+1)$ 個の閉多角形板の族 $\{S(k)\}_{k=1}{}^{\kappa+1}$ は明らかに $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として閉領域 $\overline{\Gamma_{\kappa+1}}=\bigcup_{n=1}^{\kappa+1} S(k)$ を多角形分割している．このような手順を繰り返して用いれば，有限回の操作のうちに $\bigcup_{k=1}^{N} P(n)$ の凸包 $\overline{\Gamma}$ は，$\bigcup_{k=1}^{N} P(n)$ を頂点として $\{S(k)\}_{k=1}{}^K$ の部分集合 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}(K'\leqq K)$ によって多角形分割される．以上によって証明の前半が完結した．

以下証明の後半では，証明の前半によって得られた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}(K'\leqq K)$ が，実は手順 1 で得られた閉多角形板の族の全体 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K}$ に一致することを示す．それには，番号の最も大きい閉多角形板 $\overline{S(K)}$ が閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}$ に含まれないとすると矛盾がおこることを示せばよい．今閉多角形板 $\overline{S(K)}$ が $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}$ に含まれなかったとしよう．すると $\overline{S(K)}$ は，$\bigcup_{k=1}^{K'} \overline{S(k)}$ に含まれしかも $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}$ に属さないのだから，その辺の少なくとも一つは $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K'}$ のある要素 $\overline{S(\kappa')}$ の一つの辺 $P(J_{\kappa'}+1)P(J_{\kappa'}+2)$ と交わる．今そのような $\overline{S(K)}$ の辺を $P(J_K+1)P(J_K+2)$ としてよい．この時閉多角形板 $\overline{S(K)}$ の外接開円板を $C(K)$，$\overline{S(\kappa')}$ の外接開円板を $C(\kappa')$ としよう(**Fig. 5**)．すると $\overline{S(k)}$ の構成方法を定めた手順 1 の規則により，開円板 $C(\kappa')$ はいかなる与点 $P(n)$ も含みえない．従って，二点 $P(J_K+1)$ と $P(J_K+2)$ は，どちらも円周 $\partial C(K)$ の上にあり，かつどちらも開円板 $C(\kappa')$ の外部にある．かくして補題 2 (b) の成立条件たる式 (2.1) ならびに (2.2) が成りたっており，直線 $P(J_K+1)P(J_K+2)$ を補題 2 における直線 l と考えることにすれば，二つの領域 $\overline{C(\kappa')}\cap\alpha_l$ と $\overline{C(\kappa')}\cap\alpha_l$ のうちの少なくとも一方は開円板 $C(K)$ に含まれる．手順 1 の規則により開円板 $C(K)$ はいかなる与点 $P(n)$ も含まないのであるから，二つの領域 $\overline{C(\kappa')}\cap\alpha_l$ と $\overline{C(\kappa')}\cap\alpha_l'$ のうちの少なくとも一方はいかなる与点も含みえず，従って，線分 $P(J_K+1)P(J_K+2)$ と線分 $P(J_{\kappa}'+1)P(J_{\kappa'}+2)$ とは交わり得ない．これは矛盾である．⊠

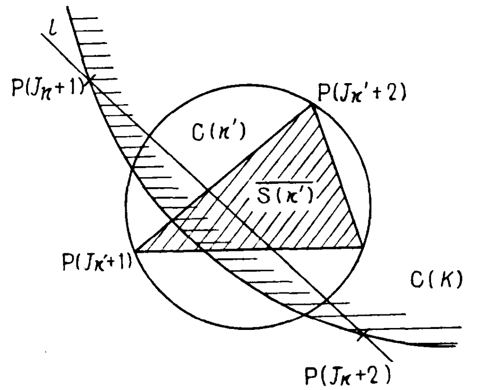

Fig. 5 The illustration of the last part of the proof of of theorem 1

平面上に N 個の点の和集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ が与えられた時，次のように特異閉多角形板と特異領域とを定義する．

［定義 3］ 平面上に N 個の点 $P(n)(n=1,2,\cdots,N)$ が与えられているとする．この時，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ の部分集合を頂点とするある閉多角形板 $\bar{\sigma}$ が，与えられた点の和集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ に対する特異閉多角形板であるとは，$\bar{\sigma}$ が，

（a） $\bar{\sigma}$ は三角形板ではない．

（b） $\bar{\sigma}$ の外接開円板 C は内部にいかなる与点 $P(n)$ も含まない（すなわち，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を与えられた頂点と考えて手順 1 をほどこした時，閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ が得られたとすれば，$\bar{\sigma}$ は $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ の要素多角形板になっている）．

という二つの条件を満足することである．更に $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ に対する特異領域とは，すべての特異閉多角形板の和集合である．⊠

手順 2 として次の操作を導入する．

［手順 2］ すべての特異領域について，各特異閉多角形ごとに，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として任意に三角形分割をほどこす．⊠

このとき，次の定理 2 は自明である．

［定理 2］ 手順 1，2 を続けてほどこすことにより，与点 $P(n)(n=1,2,\cdots,N)$ の凸包 $\overline{\Gamma}$ は，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として三角形分割される．この三角形分割の仕方

は，特異領域における各特異閉多角形板ごとの分割の仕方をのぞき一意的である．⊠

3. 角度に関する最適性

この章では，手順1，2を続けてほどこすことによって得られた三角形分割の，各要素三角形板が持つ角度に関する最適性を論ずる．以下では，ある閉多角形板が閉三角形板であることを特に明示したい場合には，$\overline{S(k)}$ のかわりに $\overline{T(k)}$ の記号を用いることにしよう． さてまず， 二つの相異なる閉三角形板の族 $\{\overline{T(k)}\}_{k=1}{}^K$ と $\{\overline{T'(k)}\}_{k'=1}{}^K$ が，同一の点集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点としてその凸包を三角形分割していたとする（ここで，ここで二つの閉三角形板の族における要素閉三角形板の個数は相等しいことに注意しておこう．それは，オイラーの多面体定理によって明らかである．）この時，その各閉三角形板要素について次の定義をする．

［定義4］ 閉領域 $\bar{\Gamma}$ を，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点として三角形分割している二つの閉三角形板の族 $\{\overline{T(k)}\}_{k=1}{}^K$ と $\{\overline{T'(k')}\}_{k'=1}{}^K$ とが与えられたとする．この時，その一方の閉多角形板の族 $\{\overline{T(k)}\}_{k=1}{}^K$ に属する一つの閉三角形要素を $\overline{T(k)}$ とし，その内点の集合を $T(k)$ で記すことにする．もしもう一方の閉三角形板の族 $\{\overline{T'(k')}\}_{k'=1}{}^K$ に属する閉三角形板要素 $\overline{T'(k')}$ を考えた時，その内点の集合 $T'(k')$ が閉三角形板 $T(k)$ と共通部分をもつならば，すなわち，

$$T(k)\cap T'(k')\neq\phi$$

ならば，$\overline{T'(k')}$ と $\overline{T(k)}$ とは部分的に重なりあう閉三角形板であるという．⊠

この時次の定理がなりたつ．

［定理3］ 手順1，2によって得られた閉三角形板の族 $\{\overline{T(k)}\}_{k=1}{}^K$，ならびに他の任意の方法で得られた閉三角形板の族 $\{\overline{T'(k')}\}_{k=1}{}^K$ が， どちらも同一の点集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点としてその凸包 $\bar{\Gamma}$ を三角形分割していたとする．この時，閉三角形板の族 $\{\overline{T(k)}\}_{k=1}{}^K$ から選んだ任意の閉三角形板の一つを $\overline{T(\kappa)}$ とし，その閉三角形板 $\overline{T(\kappa)}$ の勝手な角を α とする．更にもう一方の閉三角形板の族 $\{\overline{T'(k)}\}_{k=1}{}^K$ の中から，$\overline{T(\kappa)}$ と部分的に重なる閉三角形板 $T'(k')$ をすべて選び，そのうちの最小の角を β とし，角 β を有する閉三角形板を $\overline{T'(\kappa')}$ とする．但し，そのような β，あるいは $\overline{T'(\kappa')}$ がいくつもあるならば，その中の任意の一つをそれぞれ β，あるいは $\overline{T'(\kappa')}$ とするものとする．この時，

$$\alpha\geqq\beta \tag{2.6}$$

なる式がなりたつ．但し，等号がなりたつための一つの必要条件は，二つの閉多角形板 $\overline{T(\kappa)}$ と $\overline{T'(\kappa')}$ とが全く重なるか，あるいはそのどちらもが同一の特異閉多角形板に含まれるかすることである．

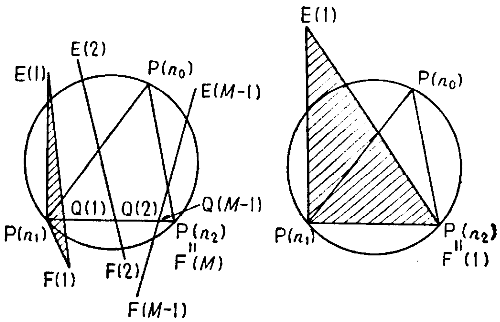

Fig. 6 The illustrations of the proof of theorem 3

証　明 手順1，2によって得られた一つの閉三角形板 $\overline{T(\kappa)}$ の三つの頂点を $P(n_0)$，$P(n_1)$， $P(n_2)$ とし，その注目する角 α を $\angle P(n_1)P(n_0)P(n_2)$ とする．すると角 α に相対する辺は， 線分 $P(n_1)P(n_2)$ である．この時，比較されるべきもう一方の閉三角形板の族 $\{\overline{T'(k)}\}_{k=1}{}^K$ の，要素閉三角形板の族のうちで，線分 $P(n_1)P(n_2)$ と交わるものがあれば，それらの交点を点 $P(n_1)$ に近い方から順に $Q(1)$，$Q(2)$，…，$Q(M-1)$ としよう（**Fig. 6**）．更に閉三角形板 $\overline{T'(k)}$ の辺のうちで，点 $Q(m)$ において線分 $P(n_1)P(n_2)$ と交わるものを線分 $E(m)F(m)(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$ とする．但しここにおける $(M-1)$ 個の点 $E(m)\,(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$ はすべて，直線 l に関して点 $P(n_0)$ と同じ側にあるものとし，同様に $F(m)(m=1,\ 2,\cdots,\ M-1)$ はすべて，点 $P(n_0)$ と反対側にあるものとする．又，便宜上の規則として，点 $P(n_2)$ を $F(M)$ と記すことにする（従って $\{\overline{T'(k')}\}_{k=1}{}^K$ の要素閉三角形板の辺のうちで，線分 $P(n_1)P(n_2)$ と交わるものが一本もなければ，$P(n_2)$ は $F(1)$ と記されることになる．）この時， 閉三角形板 $P(n_1)E(1)F(1)$ は閉三角形板の族 $\{T'(k')\}_{k'=1}{}^K$ に属し，かつ閉三角形板 $P(n_1)P(n_0)P(n_1)$ と部分的に重なっている． 従って円周角の定理を用いれば，

$$\alpha=\angle P(n_1)P(n_0)P(n_2)\geqq\angle P(n_1)E(1)P(n_2)\geqq\angle P(n_1)E(1)F(1)\geqq\beta$$

が成立している．等号が成立するためには少なくとも，

$F(1)$ が $P(n_2)$ に一致し，かつ $E(1)$ が三角形 $P(n_1)P(n_0)P(n_2)$ の外接円周上にあることが必要である．そのためには，二つの閉三角形板 $\overline{T(\kappa)}$ と $\overline{T'(\kappa')}$ とが全く重なるか，あるいは同一の特異閉多角形板に含まれるかしなくてはならない．⊠

4. 双対多角形分割

平面内に N 個の点 $P(n)(n=1, 2, \cdots, N)$ が与えられたとする．その時，次のようにして各与点 $P(n)$ の勢力圏 $\sigma(n)$ を定義する．

［定義5］ 平面内に N 個の点 $P(n)(n=1, 2, \cdots, N)$ が与えられたとする．この時，その中の一つの与点 $P(n)$ を最も近い与点としてもつような平面内の点 Q の集合を，与点 $P(n)$ の勢力圏とよび $\sigma(n)$ と記す．但し，点 Q から最も近い与点 $P(n)$ が二つ以上ある場合には，点 Q はどの勢力圏 $\sigma(n)$ にも属さないものとする．⊠

勢力圏 $\sigma(n)$ のうちのあるものは有界ではありえない(**Fig. 7**(a))．しかし，そのような場合にも開多角形板という表現を許すことにしよう．すると $\sigma(n)$ はすべて開多角形板になっている．今ここで，その閉包 $\overline{\sigma(n)}(n=1, 2, \cdots, N)$ がつくる閉多角形板の族 $\{\overline{\sigma(n)}\}_{n=1}{}^N$ について考えよう．すると，次の定理がなりたつことは明らかである．

［定理4］ 手順1によって得られた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ (その要素は，特異領域を除いては閉三角形板であることに注意しておく) が，$\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点としてその凸包を多角形分割していたとする．その要素閉多角形板 $\overline{S(k)}$ の外接円の中心を $O(k)(k=1, 2, \cdots, K)$ としよう．この時各点の勢力圏の閉包が定める閉多角形板の族 $\{\overline{\sigma(n)}\}_{n=1}{}^N$ は，点集合 $\bigcup_{n=1}^{K} O(k)$ を頂点として，全平面を多角形分割している．更に，二つの閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ と $\{\overline{\sigma(n)}\}_{n=1}{}^K$ とは，互いに他を一意に導く．それら二種類の閉多角形板要素の境界を，それぞれ $\partial S(k)$, $\partial\sigma(n)$ と記せば，それらおのおのの和集合 $\bigcup_{k=1}^{K} \partial S(k)$ と $\bigcup_{n=1}^{N} \partial\sigma(n)$ とはそれぞれ一つの平面グラフを定めているが，そのようにして定められた二つの平面グラフは，互いに他の双対グラフになっている．⊠

二つの閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ と $\{\overline{\sigma(n)}\}_{n=1}{}^N$ とは，定理4にのべるような意味で互いに双対の関係にあることが分る．更に，円に内接するような閉多角形板 $\overline{S'(k')}$ の族 $\{\overline{S'(k')}\}_{k'=1}{}^K$ が，手順1によって定められた閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ とは異なる場合でも，$\{\overline{S'(k')}\}_{k'=1}{}^K$ が，点集合 $\bigcup_{n=1}^{N} P(n)$ を頂点としてその凸包多角形分割していたとすれば，その隣りあう閉多角形板の外心どうしを結ぶことによって，$\{\overline{S'(k')}\}_{k'=1}{}^K$ と双対な閉多角形板の族 $\{\overline{\sigma'(n')}\}_{n=1}{}^N$ を得ることができる．しかしながら，閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^K$ が手順1によって得られたものでない場合には，どこかの領域において，N 個の閉多角形板 $\sigma'(n')(n'=1, 2, \cdots, N)$ のうちのいくつかが重なりあってしまい，従って $\{\overline{\sigma'(n')}\}_{n=1}{}^N$ はいかなる領域も分割することもできなくなってしまうのである(**Fig. 7**(b))．

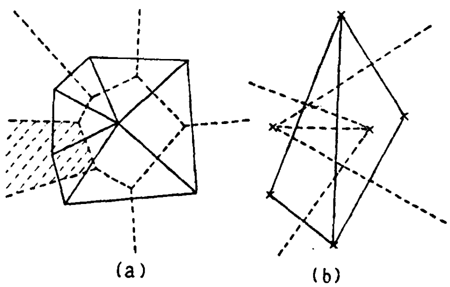

Fig. 7 The sphere of influence (a) and the dual peudo-partition of non-optinum triangulation (b)

5. おわりに

本稿においては，次元数に関しては二次元に限定し，与点の個数は有限個に限り，更に，三角形分割を実行すべき領域に関しては与点の凸包に限定した上で，領域を望ましく三角形分割する方法について論じた．しかしながら，ここにおける議論の多くはそれらの制限をとりはずした場合にも成立している．まず，与点の個数が有限個であるという制約は，領域の三角形分割を計算機で有限時間内におこなうという要請のためには必要であるが，理論的諸性質のためには何ら必要でなく，与点の個数が可算無限個である場合にも定理1から定理4までのすべての定理が同様の形で成りたつ．又，三角形分割を実行すべき領域が，N 個の与点 $P(n)$ の凸包であるという制限も本質的ではなく，分割を実行すべき領域として，与点 $P(n)$ のうちのいくつかのものを頂点とする任意の閉多角形領域 Γ (この場合，この多角形は単連結でなくてもよい.)を与えたとしても，同様の手順構成が可能である．すなわち，

手順1において，求めるべき閉多角形板の族 $\{\overline{S(k)}\}_{k=1}{}^{K}$ の各要素 $\overline{S(k)}$ に対して，$\overline{S(k)}$ が $\bar{\Gamma}$ に含まれるという要請のみをつけ加えれば，手順1，2ならびに定理 1～3 が全く同様の形でなりたち，定理4も多少の修正の後なりたつ．又，次元が二次元だという制約は，手順1，2ならびに定理1，2，4のためには本質的でなく，直線を超平面に，円を超球に，三角形を M 次元単体にという具合にいくつかの表現を交換するだけで，手順，定理，ならびにその証明が本稿と全く同じ形で成立する．ただ定理3の角度に関する最適性は，三次元以上の場合は素直には成立せず，今後の検討に残された．

更に今，円のかわりに，互いに正の向きに相似の位置にあるような，滑らかな凸体の族 G を考えよう．すると平面上の任意の三点は，G の中から丁度ただ一つの凸体を定めている．従って，手順1において円板のかわりに凸体を用いても，やはり一意的に多角形板の族をうることができる．補題1，2は G に属する任意の一対の凸体に対して成立しており，よって定理1が成立する．すなわち，円のかわりに G を用いても同様の三角形分割を得ることができるのである．しかし，この結果は三次元以上の場合には拡張できない．N 次元における二つの超球の交わりは，同一の ($N-1$) 次元超平面に含まれるが，N 次元凸体においては，必ずしも同一超平面に含まれてくれないのである．

なお，本稿の手順1，2で得られた三角形分割の結果は，高澤[3]によって与えられた三角形分割の方法と，結果的に一致することに注意しておく．

最後に，日頃から暖かく御指導下さり，又．本研究に関しても有益な示唆を頂いた大島教授，有益な議論を下さり投稿をお勧め下さった森口教授，伊理教授，文献に関して御教示下さった山梨大学の高澤助教授に感謝の意を表します．

参 考 文 献

1) B. E. Bengtsson & S. Nordbeck: Construction of Isarithms and Isarithmic Maps by Computers, BIT, Vol. 4, pp. 87～105 (1964).
2) J. W. Harbaugh & D.F. Merrian: Computer Applications in Stratigraphic Analysis, p. 34, John Wiley & Sons, Inc., New York/London/Sydney (1968).
3) 高澤嘉光：点と線，bit, Vol. 13, pp. 820～822 (1971).
4) 川面，永井，荒木，加藤：等高線作図の一方法，情報処理，Vol. 14, pp. 916～924 (1973).
5) 佐藤，二宮：3次元ランダムデータに基づく等高線表示と補間法，情報処理第 15 回大会講演論文集，pp. 379～380 (1974).
6) 宮脇，金子：3角形自動分割法による等高線作図の一方法，情報処理学会第 16 回大会講演論文集，pp. 177～178 (1975).

(昭和 51 年 5 月 13 日受付)
(昭和 52 年 8 月 23 日再受付)

訂　正

"領域の最適三角形群への分割アルゴリズム"について

岸　本　一　男*

本誌1978年3月号において，筆者[1]は"領域の最適三角形群への分割アルゴリズム"という題で論文を発表した．しかしながら，その内容のうちの三角形分割の一意性（一般のn次元の場合も含めて）に関する事実，ならびにその分割が，自然に導入される多角形分割の双対分割になっているという事実は，筆者が独自に得たものではあったが，二次形式に関するVoronoiの研究と関連してDelaunay[2]（1934）によって既に発見されかなりよく知られているものであることを最近になって知った．従って，上記論文[1]の中で，以上の事実の情報処理の分野における応用上の意義を別とすれば，その指摘は数学上の知識としては単に再発見にとどまるものであった．ここにその事実を記し，上記論文[1]の不備を補っておきたい．この内容をのべた参考文献としては，Rogers[3]によるものがある．

* 東京大学工学部計数工学科

なお上記論文[1]のその他の部分，すなわち，上記三角形分割が角度に関する最適性を有すること，又，その故に等高線作図において有効であること，あるいは滑らかな凸体によっても平面の三角形分割が一意に定められることなどに関しては，現在まで筆者が調べえた限りでは数学的にも新しい貢献であろうと思われる．

参　考　文　献

1) 岸本一男：領域の最適三角形群への分割アルゴリズム，情報処理，Vol. 19, pp. 211～218(1978).
2) B. Delaunay: Sur la sphère vide, Известия Академии Иаук СССР (VII), Отделение математических и естественных наук, pp. 793～800 (1934).
3) C. A. Rogers: Packing and Covering, Chaps. 7, 8 Cambrige at the University Press (1964).