

二変数補間スプラインの算法と誤差解析*

秦 野 和 郎** 二 宮 市 三***

Abstract

This paper describes an algorithm and error analysis of bivariate interpolating splines.

The local bases formed from the products of normalized B-splines are applied to the Stenger's scheme, *i. e.* Kronecker product extensions of linear operators. This algorithm is numerically stable and requires less memory space compared with de Boor's algorithm.

Errors for partial derivatives of bivariate interpolating splines are also analyzed.

Numerical examples for some problems are shown.

1. ま え が き

一変数の近似手法をテンソル積を使って多変数へ拡張した場合、通常近似式の評価に要する計算量が大幅に増大する。たとえば多項式補間を多変数の場合へ拡張し、ある程度の精度を得るためにパラメータの個数を増すと得られた補間式は必然的に次数が高くなり、その評価に多量の計算量を必要とする。これを避けるために二変数関数を積の形で近似する手法¹⁾が提案され、実際の問題に適用する試み²⁾がなされている。しかしこのような手法は一般に非線型近似となるために与えられた近似条件をみたすようにパラメータを決定することが困難になる。

局所的な基底関数を使って表現しうるスプライン関数は、次数を一定としたままで、すなわち近似式の評価に要する計算量を一定としたままでパラメータの個数をいくらかでもふやすことができる。従ってテンソル積を使ってそれを多変数化した場合にも、必要な精度を得るためにパラメータの個数を多くしても近似式そのものを評価するのに要する計算量は変わらない、この意味で、二、三変数程度までならスプライン補間の手法をテンソル積により多変数化しても十分実用に耐え得ると思われる。

双3次スプラインによる補間の具体的な算法は、Carl de Boor⁵⁾が与えており、その算法が標準的な手法である¹²⁾とみなされている。又、そのような補間手法による誤差限界は Carlson-Hall⁷⁾が与えており、若干異なる条件のもとで定義される双3次補間スプラインの誤差限界を C. A. Hall⁶⁾が与えている。

しかし双3次スプラインによる補間を、より一般化して双 $2l-1$ 次スプラインによる補間へ拡張する試みはほとんどなされていない。一般にスプラインの次数を高くすれば、より高精度の補間が可能になると思われることと、最近計算機が大型高速化して高精度計算に対する需要が多くなっていることから、このような拡張を試みることは意義がある。

Carl de Boor⁵⁾の手法をそのままの形で双 $2l-1$ 次へ拡張することは実際上不可能である。又、C. A. Hall⁶⁾, Carlson-Hall⁷⁾の誤差解析の手法もそのままの形では双 $2l-1$ 次の補間スプラインの場合へ適用することは困難である。

ここでは、B-splineによる一変数の $2l-1$ 次補間スプラインの算法^{18), 20)}に、Stenger⁹⁾の述べている手法、すなわち線型演算子をクロネッカー(テンソル)積により多変数へ拡張する手法を若干簡略化して適用し、双 $2l-1$ 次補間スプラインの算法を構成する。次に、秦野¹⁹⁾の与えている一変数補間スプラインの誤差限界に、Gordon⁸⁾の述べている手法を適用して、双 $2l-1$ 次補間スプラインの誤差限界を導出する。

* An Algorithm and Error Analysis of Bivariate Interpolating Splines by Kazuo HATANO (Nagoya University Computation Center) and Ichizo NINOMIYA (Faculty of Engineering, Nagoya University)

** 名古屋大学大型計算機センター (現在福井大学工学部)

*** 名古屋大学工学部情報工学科

2. 二変数補間スプライン

$I_x = \{x | a \leq x \leq b\}$, $I_y = \{y | c \leq y \leq d\}$ を実軸上の有界閉区間とし、その分割をそれぞれ

$$\begin{cases} \Delta_x: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \\ \Delta_y: c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \end{cases} \quad (2.1)$$

とする。

$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ を平面上の有界な閉領域とし、

$$\Delta = \Delta_x \cdot \Delta_y = \{(x_i, y_j) | 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \quad (2.2)$$

を R 上の格子点とする。 I_x, I_y の部分開区間、 R の部分開領域をそれぞれ、 $I_{x(i)} = \{x | x_i < x < x_{i+1}\}$, $I_{y(j)} = \{y | y_j < y < y_{j+1}\}$, $R_{i,j} = \{(x, y) | x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_{j+1}\}$ とする。

$D_x \equiv \partial/\partial x$, $D_y \equiv \partial/\partial y$ として、

$$\begin{cases} R_{i,j}: 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1 \text{ で} \\ D_x^{2\lambda} S(x, y) = D_y^{2\mu} S(x, y) = 0 \\ S(x, y) \in C^{2\lambda-2, 2\mu-2}[R] \end{cases} \quad (2.3)$$

をみたす実関数 $S(x, y)$ の全体を Δ の上で定義される双 $2\nu-1$ 次の二変数スプライン関数と定義し、 $S_p^{(\nu, \nu)}(\Delta)$ と書く。すなわち、 $S_p^{(\nu, \nu)}(\Delta)$ はそれぞれの部分開領域 $R_{i,j}$ で区分的に定義される双 $2\nu-1$ 次多項式で、 R 全体では $D_x^\lambda D_y^\mu S(x, y): 0 \leq \lambda, \mu \leq 2\nu-2$ が連続であるような二変数実関数の全体である。

$f(x, y) \in C^{2\nu, 2\nu}[R]$ を与えられた実関数として

$$\begin{cases} S(x_i, y_j) = f(x_i, y_j): 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n. \\ D_x^\lambda S(x_i, y_j) = f^{(\lambda, 0)}(x_i, y_j): i=0, m; 0 \leq j \leq n \\ D_y^\mu S(x_i, y_j) = f^{(0, \mu)}(x_i, y_j): 0 \leq i \leq m; j=0, n \\ D_x^\lambda D_y^\mu S(x_i, y_j) = f^{(\lambda, \mu)}(x_i, y_j): i=0, m; j=0, n \\ 1 \leq \lambda, \mu \leq \nu-1. \end{cases} \quad (2.4)$$

をみたす $S_p^{(\nu, \nu)}(\Delta)$ の要素、 $S(x, y)$ を $f(x, y)$ に対する二変数補間スプラインと定義し、 $S_d(f; x, y)$ と書く。 $S_d(f; x, y)$ は一意的に存在する (Birkhoff¹³⁾, p. 196, Theorem 3).

次に後章での参照のために一変数補間スプラインを定義する。

$D \equiv d/dx$ として

$$\begin{cases} I_{x(i)}: 0 \leq i \leq m-1 \text{ で } D^{2\nu} S(x) = 0 \\ S(x) \in C^{2\nu-2}[I_x]. \end{cases} \quad (2.6)$$

をみたす実関数 $S(x)$ の全体を Δ_x の上で定義される $2\nu-1$ 次のスプライン関数と定義し、 $S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ と書く。

$u(x) \in C^{2\nu}[I_x]$ を与えられた実関数として

$$S(x_i) = u(x_i): 0 \leq i \leq m. \quad (2.7)$$

$$D^\lambda S(x_i) = u^{(\lambda)}(x_i): i=0, m; 1 \leq \lambda \leq \nu-1. \quad (2.8)$$

をみたす $S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ の要素、 $S(x)$ を $u(x)$ に対する一変数補間スプラインと定義し、 $S_{dx}(u; x)$ と書く。 $S_{dx}(u; x)$ は一意的に存在する (Ahlberg-Nislon-Walsh³⁾, p. 160, Theorem 5.6.1).

同じようにして Δ_y の上で定義される $2\nu-1$ 次のスプライン関数の全体を $S_p^{(\nu)}(\Delta_y)$ とし、 $v(y) \in C^{2\nu}[I_y]$ に対して、式 (2.7), (2.8) と類似の条件をみたす $S_p^{(\nu)}(\Delta_y)$ の要素を $S_{dy}(v; y)$ と書く。

3. 二変数補間スプラインの構成

本章では、最初に B -spline を使って一変数補間スプラインを構成する手法を述べ、次にそれを使って 2. で定義した二変数補間スプラインを構成する。

まず、任意の $S(x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ を陽的に表現するために、正規化された B -spline を導入する。

$$s_j = \begin{cases} x_0: -2\nu+1 \leq j \leq -1 \\ x_j: 0 \leq j \leq m \\ x_m: m+1 \leq j \leq m+2\nu-1. \end{cases} \quad (3.1)$$

とし、

$$q_{2\nu}(s; x) = (s-x)_+^{2\nu-1} = \begin{cases} (s-x)^{2\nu-1}: s \geq x \\ 0: s < x. \end{cases} \quad (3.2)$$

の $s = s_j, s_{j+1}, \dots, s_{j+2\nu}$ における 2ν 次差商の定数倍 $N_j(x; \Delta_x) = (s_{j+2\nu} - s_j) q_{2\nu}[s_j, s_{j+1}, \dots, s_{j+2\nu}; x]$.

$$(3.3)$$

を Δ_x の上で定義される $2\nu-1$ 次の正規化された B -spline と定義する⁴⁾. $N_j(x; \Delta_x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x): -2\nu+1 \leq j \leq m-1$ であり¹⁴⁾、それらはすべて線型独立である¹⁴⁾から任意の $S(x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ は、 $c_j: -2\nu+1 \leq j \leq m-1$ を定数として、

$$S(x) = \sum_{j=-2\nu+1}^{m-1} c_j N_j(x; \Delta_x) \quad (3.4)$$

と一意的に表現される。

$u(x)$ に対する一変数補間スプライン、 $S_{dx}(u; x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ を得るために、 $N_j(x; \Delta_x)$ の局所性^{14), 20)}を考慮して式 (3.4) に補間条件、式 (2.7), (2.8) を適用すると、

$$\phi_{i,j} = \begin{cases} N_{j-2\nu(i-1)}(x_0; \Delta_x): 1 \leq i \leq \nu \\ N_{j-2\nu}(x_{i-\nu}; \Delta_x): \nu+1 \leq i \leq m+\nu-1 \\ N_{j-2\nu(m+2\nu-1-i)}(x_m; \Delta_x) \\ : m+\nu \leq i \leq m+2\nu-1 \end{cases} \quad (3.5)$$

を要素とする $m+2\nu-1$ 次の正方正則行列、 Φ を係数行列とするような連立一次方程式を導くことができる。

同じようにして、 Δ_y の上で、正規化された B -spline.

ができる。

4. 二変数補間スプラインの誤差

本章では, cardinal spline による補間スプラインの表現について述べ, 次にそれを使って二変数補間スプラインの誤差解析を行う。

$\delta_{i,j}$ をクロネッカーデルタとし, $0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \nu - 1$ として,

$$\begin{cases} C_j^{(\lambda)}(x_0; \Delta_x) = \delta_{-j,\lambda}, C_j^{(\lambda)}(x_m; \Delta_x) = 0 \\ C_j(x_i; \Delta_x) = 0 : -\nu + 1 \leq j \leq -1 \\ C_j^{(\lambda)}(x_0; \Delta_x) = C_j^{(\lambda)}(x_m; \Delta_x) = 0 \\ C_j(x_i; \Delta_x) = \delta_{j,i} : 0 \leq j \leq m \\ C_j^{(\lambda)}(x_0; \Delta_x) = 0, C_j^{(\lambda)}(x_m; \Delta_x) = \delta_{j,-m,\lambda} \\ C_j(x_i, \Delta_x) = 0 : m + 1 \leq j \leq m + \nu - 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

をみたま $C_j(x; \Delta_x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x) : -\nu + 1 \leq j \leq m + \nu - 1$ を Δ_x の上で定義される $2\nu - 1$ 次の cardinal spline と定義する。

$$u(x) \in C^{2\nu}[I_x] \text{ に対して} \quad \hat{u}_j = \begin{cases} u^{(-j)}(x_0) : -\nu + 1 \leq j \leq -1 \\ u(x_j) : 0 \leq j \leq m \\ u^{(j-m)}(x_m) : m + 1 \leq j \leq m + \nu - 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

とおけば, cardinal spline の定義, 補間スプラインの定義から

$$S_{\Delta_x}(u; x) = \sum_{j=-\nu+1}^{m+\nu-1} \hat{u}_j C_j(x; \Delta_x). \quad (4.3)$$

である*。

さて, $S_{\Delta_x}(u; x)$ は $u(x)$ に対する線型近似であり, 線型空間 $C^{2\nu}[I_x]$ から線型空間 $S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ への線型射影である。 $u(x) \in C^{2\nu}[I_x]$ を $S_{\Delta_x}(u; x) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ へ射影する線型演算子を P_x とする。すなわち, $S_{\Delta_x} \circ (u; x) \equiv P_x u(x)$ とする。秦野⁹¹⁾によれば, $u(x)$ が I_x で $2\nu - 1$ 次以下の多項式であれば $S_{\Delta_x}(u; x)$ の誤差は 0 である。従って, Peano の定理¹⁷⁾により,

$$u(x) - P_x u(x) = \int_0^b G_x(x, s) u^{(2\nu)}(s) ds \quad (4.4)$$

をみたま Peano 核, $G_x(x, s)$ が存在する。同じようにして Δ_y の上で定義される $2\nu - 1$ 次の Cardinal spline $\{C_j(y; \Delta_y) | -\nu + 1 \leq j \leq n + \nu - 1\}$ および, $v(y) \in C^{2\nu}[I_y]$ に対する $\{\hat{v}_j | -\nu + 1 \leq j \leq n + \nu - 1\}$ を定義し, $v(y) \in C^{2\nu}[I_y]$ を $S_{\Delta_y}(v; y) \in S_p^{(\nu)}(\Delta_y)$ へ射影する線型演算子を P_y とする。

$$S_{\Delta_y}(v; y) = \sum_{j=-\nu+1}^{n+\nu-1} \hat{v}_j C_j(y; \Delta_y) \quad (4.5)$$

* $C_j(x; \Delta_x)$ は一般に非局所的な関数である (文献¹⁵⁾, p. 418) ことからこの表現は実際の計算には適さない。又, 多項式補間におけるラグランジュ係数のように簡単な形では表現できないと思われる。

$$v(y) - P_y v(y) = \int_0^d G_y(y, t) v^{(2\nu)}(t) dt \quad (4.6)$$

である。

次に, $f(x, y) \in C^{2\nu, 2\nu}[R]$ に対して,

$$\hat{f}_{i,j}(y) = \begin{cases} f^{(-i, 0)}(x_0, y) : -\nu + 1 \leq i \leq -1 \\ f(x_i, y) : 0 \leq i \leq m \\ f^{(i-m, 0)}(x_m, y) : m + 1 \leq i \leq m + \nu - 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

なる $m + 2\nu - 1$ 個の y についての関数を定義すると,

$$P_y P_x f(x, y) = P_y \sum_{i=-\nu+1}^{m+\nu-1} \hat{f}_{i,j}(y) C_i(x; \Delta_x) = \sum_{i=-\nu+1}^{m+\nu-1} P_y \hat{f}_{i,j}(y) C_i(x; \Delta_x) \quad (4.8)$$

である。更に $\hat{f}_{i,j}(y) \in C^{2\nu}[I_y] : -\nu + 1 \leq i \leq m + \nu - 1$ に対して,

$$\hat{f}_{i,j} = \begin{cases} \hat{f}_{i,j}^{(-j)}(y_0) = f^{(-i, -j)}(x_0, y_0) : -\nu + 1 \leq j \leq -1 \\ \hat{f}_{i,j}^{(j)}(y_n) = f^{(-i, j-n)}(x_0, y_n) : n + 1 \leq j \leq n + \nu - 1 \\ \hat{f}_{i,j}(y_i) = f^{(-i, 0)}(x_0, y_i) : 0 \leq j \leq n \\ \hat{f}_{i,j}^{(j-n)}(y_n) = f^{(-i, j-n)}(x_0, y_n) : n + 1 \leq j \leq n + \nu - 1 \\ ; -\nu + 1 \leq i \leq -1 \\ \hat{f}_{i,j}^{(-j)}(y_0) = f^{(0, -j)}(x_i, y_0) : -\nu + 1 \leq j \leq -1 \\ \hat{f}_{i,j}(y_i) = f(x_i, y_i) : 0 \leq j \leq n \\ \hat{f}_{i,j}^{(j-n)}(y_n) = f^{(0, j-n)}(x_i, y_n) : n + 1 \leq j \leq n + \nu - 1 \\ ; 0 \leq i \leq m \\ \hat{f}_{i,j}^{(-j)}(y_0) = f^{(i-m, -j)}(x_m, y_0) : -\nu + 1 \leq j \leq -1 \\ \hat{f}_{i,j}^{(j)}(y_n) = f^{(i-m, j-n)}(x_m, y_n) : n + 1 \leq j \leq n + \nu - 1 \\ \hat{f}_{i,j}(y_j) = f^{(i-m, 0)}(x_m, y_j) : 0 \leq j \leq n \\ \hat{f}_{i,j}^{(j-n)}(y_n) = f^{(i-m, j-n)}(x_m, y_n) : n + 1 \leq j \leq n + \nu - 1 \\ ; m + 1 \leq i \leq m + \nu - 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

を定義すると,

$$P_y \hat{f}_{i,j}(y) = \sum_{j=-\nu+1}^{n+\nu-1} \hat{f}_{i,j} C_j(y; \Delta_y) : -\nu + 1 \leq i \leq m + \nu - 1. \quad (4.10)$$

である。これを式(4.8)に代入すると,

$$P_y P_x f(x, y) = \sum_{j=-\nu+1}^{n+\nu-1} \sum_{i=-\nu+1}^{m+\nu-1} \hat{f}_{i,j} C_i(x; \Delta_x) \cdot C_j(y; \Delta_y) \quad (4.11)$$

となる。cardinal spline および, $\hat{f}_{i,j}$ の定義から容易にわかるように, 式(4.11)の右辺は, $S_p^{(\nu, \nu)}(\Delta)$ の要素であり, 又, 二変数補間スプラインの補間条件, 式(2.4), (2.5)をみたま。従って,

$$P_y P_x f(x, y) = S_{\Delta}(f; x, y) \quad (4.12)$$

である。

式(4.4), (4.6), (4.12)を使えば, 二変数補間スプラインの誤差を極めて形式的に導出することができる。

さて,

$$\begin{aligned} f(x, y) - S_d(f; x, y) &= f(x, y) - P_y P_x f(x, y) \\ &= \{f(x, y) - P_y f(x, y)\} \\ &\quad + P_y \{f(x, y) - P_x f(x, y)\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

である。式(4.6)から直ちに

$$f(x, y) - P_y f(x, y) = \int_c^d G_y(y, t) f^{(0, 2^v)}(x, t) dt \quad (4.14)$$

が得られる。次に式(4.4)から

$$\begin{aligned} P_y \{f(x, y) - P_x f(x, y)\} \\ &= P_y \int_a^b G_x(x, s) f^{(2^v, 0)}(s, y) ds \\ &= \int_a^b G_x(x, s) P_y f^{(2^v, 0)}(s, y) ds \end{aligned}$$

である。\$f^{(2^v, 0)}(s, y)\$ を \$y\$ の関数とみると, \$f^{(2^v, 0)}(s, y) \in C^{2^v}[I_y]\$ であるから式(4.6)から

$$\begin{aligned} f^{(2^v, 0)}(s, y) - P_y f^{(2^v, 0)}(s, y) \\ &= \int_c^d G_y(y, t) f^{(2^v, 2^v)}(s, t) dt \end{aligned}$$

が得られる。従って,

$$\begin{aligned} P_y \{f(x, y) - P_x f(x, y)\} \\ &= \int_a^b G_x(x, s) \left[f^{(2^v, 0)}(s, y) - \int_c^d G_y(y, t) f^{(2^v, 2^v)}(s, t) dt \right] ds \\ &= \int_a^b G_x(x, s) f^{(2^v, 0)}(s, y) ds \\ &\quad - \int_a^b \int_c^d G_y(y, t) G_x(x, s) f^{(2^v, 2^v)}(s, t) dt ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。式(4.13), (4.14), (4.15)から結局, 二変数補間スプラインの誤差は,

$$\begin{aligned} f(x, y) - S_d(f; x, y) \\ &= \int_a^b G_x(x, s) f^{(2^v, 0)}(s, y) ds + \int_c^d G_y(y, t) f^{(0, 2^v)}(x, t) dt \\ &\quad - \int_a^b \int_c^d G_x(x, s) G_y(y, t) f^{(2^v, 2^v)}(s, t) dt ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

で与えられる。この式から

$$\begin{aligned} f^{(\lambda, \mu)}(x, y) - S_d^{(\lambda, \mu)}(f; x, y) \\ &= \int_a^b G_x^{(\lambda, 0)}(x, s) f^{(2^v, \mu)}(s, y) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_c^d G_y^{(\mu, 0)}(y, t) f^{(\lambda, 2^v)}(x, t) dt \\ &- \int_c^d \int_a^b G_x^{(\lambda, 0)}(x, s) G_y^{(\mu, 0)}(y, t) f^{(2^v, 2^v)}(s, t) \\ &\quad \cdot ds dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

が得られる。右辺の各項に Hölder の不等式¹⁷⁾を適用すると,

$$\begin{aligned} &|f^{(\lambda, \mu)}(x, y) - S_d^{(\lambda, \mu)}(f; x, y)| \\ &\leq \int_a^b |G_x^{(\lambda, 0)}(x, s)| ds \cdot \sup_{s \in I_x} |f^{(2^v, \mu)}(s, y)| \\ &\quad + \int_c^d |G_y^{(\mu, 0)}(y, t)| dt \cdot \sup_{t \in I_y} |f^{(\lambda, 2^v)}(x, t)| \\ &\quad + \int_a^b |G_x^{(\lambda, 0)}(x, s)| ds \cdot \int_c^d |G_y^{(\mu, 0)}(y, t)| dt \\ &\quad \cdot \|f^{(2^v, 2^v)}\|_{\infty} \end{aligned} \quad (4.18)$$

が得られる。

$$c_{\infty}^{(\lambda)} = \sup_{x \in I_x} \int_a^b |G_x^{(\lambda, 0)}(x, s)| ds$$

$$d_{\infty}^{(\mu)} = \sup_{y \in I_y} \int_c^d |G_y^{(\mu, 0)}(y, t)| dt$$

とおくと, 式(4.18)から二変数補間スプラインの誤差限界は,

$$\begin{aligned} &\|f^{(\lambda, \mu)}(x, y) - S_d^{(\lambda, \mu)}(f; x, y)\|_{\infty} \\ &\leq c_{\infty}^{(\lambda)} \|f^{(2^v, \mu)}\|_{\infty} + d_{\infty}^{(\mu)} \|f^{(\lambda, 2^v)}\|_{\infty} \\ &\quad + c_{\infty}^{(\lambda)} d_{\infty}^{(\mu)} \|f^{(2^v, 2^v)}\|_{\infty} \end{aligned} \quad (4.19)$$

の形になることがわかる。

一方, 式(4.4), (4.6)から一変数補間スプラインの誤差限界は,

$$\begin{cases} \|u^{(\lambda)}(x) - S_{dx}^{(\lambda)}(u; x)\|_{\infty} \leq c_{\infty}^{(\lambda)} \|u^{(2^v)}\|_{\infty} \\ \|v^{(\mu)}(y) - S_{dy}^{(\mu)}(v; y)\|_{\infty} \leq d_{\infty}^{(\mu)} \|v^{(2^v)}\|_{\infty} \end{cases} \quad (4.20)$$

で与えられる。式(4.20)における \$c_{\infty}^{(\lambda)}, d_{\infty}^{(\mu)}\$ の値はいくつかの場合について, すでに知られている¹⁹⁾。従って, それを使うことにより二変数補間スプラインの誤差限界を知ることができる。

5. 他の境界条件に対する補間スプライン

2. で定義された補間スプラインは一変数の Type-I スプライン³⁾を二変数に拡張したものである。この意味で, これを二変数 Type-I スプライン³⁾と呼ぶ。

一変数の場合, 端で与えられる条件によりいくつかの補間スプラインを定義することができて^{3), 20)}, その算法を構成し²⁰⁾, 誤差解析を行うことができる¹⁹⁾。同じように二変数の場合にもいくつかの境界条件に対して補間スプラインを定義することができて, 3., 4. で述べたと同じ手順で算法を構成し, 誤差解析を行うこ

とができる。

ここでは関数値のみを使って定義しうることから実際の問題への適用が容易な一変数 Type-III スプライン^{18), 20)}の二変数への拡張について述べる。

I_x の部分区間, $[x_0, x_1], [x_{m-1}, x_m]$ を更に細分した分割を,

$$\Delta_x^{(III)} : a = x_0 < x_{0(1)} < x_{0(2)} < \dots < x_{0(\nu-1)} < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_{m(1)} < x_{m(2)} < \dots < x_{m(\nu-1)} < x_m = b. \quad (5.1)$$

とする。このとき,

$$\begin{cases} S(x_i) = u(x_i) & : 0 \leq i \leq m \\ S(x_{0(j)}) = u(x_{0(j)}) & : 1 \leq j \leq \nu-1 \\ S(x_{m(j)}) = u(x_{m(j)}) & : 1 \leq j \leq \nu-1 \end{cases} \quad (5.2)$$

をみたく $S_p^{(\nu)}(\Delta_x)$ の要素, $S(x)$ を $\Delta_x^{(III)}$ の上で $u(x)$ を補間する Type-III スプラインと定義する。

同じように $\Delta_y^{(III)}$ を定義し, $\Delta_y^{(III)}$ の上で $U(y)$ を補間する Type-III スプラインを定義することができる。

以上を使って二変数 Type-III スプラインを次のように定義する。すなわち,

$$\begin{cases} S(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \\ S(x_{p(\alpha)}, y_{q(\beta)}) = f(x_{p(\alpha)}, y_{q(\beta)}) \\ S(x_i, y_{q(\beta)}) = f(x_i, y_{q(\beta)}) \\ S(x_{p(\alpha)}, y_j) = f(x_{p(\alpha)}, y_j) \end{cases} \quad (5.3)$$

$$: 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, 1 \leq \alpha, \beta \leq \nu-1$$

$$: p=0, m; q=0, n.$$

をみたく $S_p^{(\nu, \nu)}(\Delta)$ の要素, $S(x, y)$ を $\Delta_{III} = \Delta_x^{(III)} \cdot \Delta_y^{(III)}$ の上で $f(x, y)$ を補間する二変数 Type-III スプラインと定義する。

次章において $\Delta_x^{(III)}, \Delta_y^{(III)}$ を等間隔として, $(m+2\nu-1)(n+2\nu-1)$ 個の関数値を与え, ここで定義した二変数 Type-III スプラインを一つの問題に適用してみた計算例を示す。

6. 数値例

地球を理想的な回転楕円体とみなしてその中心を O , 赤道面を $x-y$ 平面, 中心 O から北極点へ向う軸を z 軸の正の方向, 中心 O から赤道面上の緯度 0° の地点へ向う軸を x 軸の正の方向とし, $x-y-z$ 座標系は原点を O とする右手系とする。

ある地点を $P(x, y, z)$ とし, それに対する経度を λ , 地理学的緯度すなわち, P から楕円体の表面へ下した法線が赤道面となす角を ϕ , 楕円体表面から P までの距離すなわち, P の高さを H とすると (Fig. 1 参照)。

* 単位は km

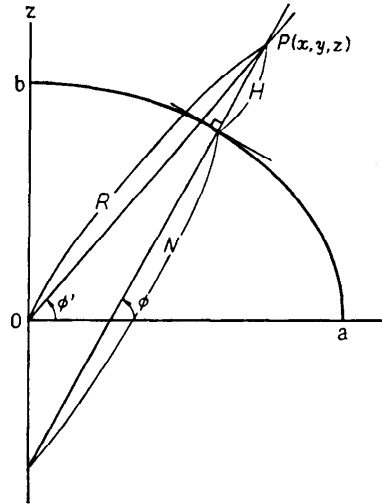


Fig. 1 Explanation diagram for the first numerical example

$$\begin{cases} x = (N+H) \cos \phi \cos \lambda \\ y = (N+H) \cos \phi \sin \lambda \\ z = \{(b/a)^2 N + H\} \sin \phi \end{cases} \quad (6.1)$$

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}, \quad e^2 = 1 - (b/a)^2.$$

である。ここで, $a=6377.397155^*$, $b=6356.078963^*$ はそれぞれ, 楕円体の長, 短半径である。

この式で, x, y, z を与えて, ϕ, λ, H を得ることを考える。 OP の距離 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 地心緯度 $\phi' = \tan^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2})$, $\lambda = \tan^{-1}(y/x)$ は容易に求めるから実際には R, ϕ' を与えて ϕ, H を求める問題と考えるとよい。

式(6.1)から

$$\begin{cases} R \cos \phi' = (N+H) \cos \phi \\ R \sin \phi' = \{(b/a)^2 N + H\} \sin \phi \end{cases} \quad (6.2)$$

である。この式から H を消去すると,

$$R \left(\frac{\cos \phi'}{\cos \phi} - \frac{\sin \phi'}{\sin \phi} \right) = \frac{ae^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (6.3)$$

が得られる。従って, この式から任意の R, ϕ' に対する ϕ を求めることができるが, ここでは一つの試みとして $R-\phi'$ 平面の格子点上で正確な ϕ を与え, 前章で述べた二変数 Type-III スプラインにより二変数関数, $\phi = \phi(R, \phi')$ を近似してみた。計算には FACOM 230-75 を使用し, すべての計算を倍精度で行った(10進約 18 桁)。

① 近似領域を $6,300 \leq R \leq 7,300, 0 \leq \phi' \leq \pi/2$ とし, R 方向を $N_R=15$ 等分, ϕ' 方向を $N_{\phi'}=30$ 等分し,

$$\begin{cases} R_i = 6300 + 1000 \times i/15 : 0 \leq i \leq 15 \\ \phi'_j = \pi \times j/(2 \times 30) : 0 \leq j \leq 30 \end{cases}$$

において、式(6.3)から得られる $\phi(R_i, \phi'_i)$ を与え、 $2 \leq \nu \leq 6$ について $\phi(R, \phi')$ に対する二変数 Type-III スプライン、 $S_\nu(\phi; R, \phi')$ を構成した。すなわち、 $S_\nu(\phi; R, \phi')$ を B-spline の積で展開したときの係数を算出した。これに要した時間はほぼ 1.1~1.6 秒で ν にはほとんど依存しなかった。

次に各格子を 4 等分して、

$$\begin{cases} R_\alpha = 6300 + 1000 \times \alpha / (15 \times 4) & : 0 \leq \alpha \leq 15 \times 4 \\ \phi_{\beta'} = \pi \times \beta / (2 \times 30 \times 4) & : 0 \leq \beta \leq 30 \times 4 \end{cases}$$

において、 $\phi^{(\lambda, \mu)}(R_\alpha, \phi_{\beta'}) - S_\nu^{(\lambda, \mu)}(\phi; R_\alpha, \phi_{\beta'})$ を、 $\lambda=0, \nu=0; \lambda=1, \nu=0; \lambda=0, \mu=1$ に対して算出し、その最大絶対値を $S_\nu^{(\lambda, \mu)}(\phi; R, \phi')$ の誤差とした。これを、Fig. 2 の①に示す。なお、 $S_\nu^{(\lambda, \mu)}(\phi; R, \phi')$ を評価するのに要した時間は、 $\nu=2, 3, 4, 5, 6$ に対してそれぞれ 1.5, 3.4, 5.5, 7.4, 10.5 msec 程度であった。

② R 方向、 ϕ' 方向の分割数を変えて、すなわち、 $N_R=25, N_{\phi'}=45$ として①と同じ計算を行った。結果を Fig. 2 の②に示す。 $S_\nu(\phi; R, \phi')$ を構成するのに要した時間はほぼ 4.0~5.0 秒程度であった。

③ 近似領域を $6,300 \leq R \leq 16,300, 0 \leq \phi' \leq \pi/2$ とし、 $N_R=50, N_{\phi'}=45$ として同じ計算を行った。結果を Fig. 2 の③に示す。このとき $S_\nu(\phi; R, \phi')$ を構成するのに要した時間はほぼ 10.4~12.0 秒であった。

なお、いずれの場合も $\phi, \partial\phi/\partial R, \partial\phi/\partial\phi'$ の最大絶対値はそれぞれ、1.57, 0.597×10^{-6} , 1.01 程度である。

次に簡単な例を使って Type-I スプラインと、Type-III スプラインの誤差の比較をしてみた。

$f(x, y) = e^{xy} : x \in [-1, 1], y \in [0, 1]$ を例にとり、

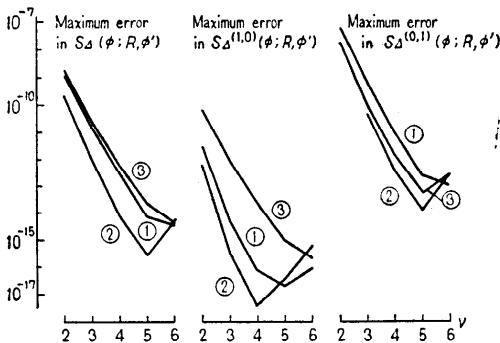


Fig. 2 Calculated errors in Bivariate interpolating splines relevant to $\phi(R, \phi')$

- ① $6,300 \leq R \leq 7,300; 0 \leq \phi' \leq \pi/2, N_R=15, N_{\phi'}=30$
- ② $6,300 \leq R \leq 7,300; 0 \leq \phi' \leq \pi/2, N_R=25, N_{\phi'}=45$
- ③ $6,300 \leq R \leq 16,300; 0 \leq \phi' \leq \pi/2, N_R=50, N_{\phi'}=45$

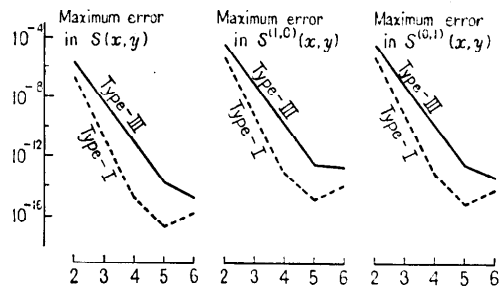


Fig. 3 Calculated errors in Bivariate interpolating splines, $S(x, y)$, relevant to $f(x, y) = e^{xy} : x \in [-1, 1], y \in [0, 1]$

定義域を x 方向に 32 等分、y 方向に 16 等分して、それぞれの格子点において関数値を与え、Type-I スプラインにおいては更に、境界に必要な次数の偏導関数値を与えて、 $2 \leq \nu \leq 6$ に対して二変数 Type-I, III スプラインを構成した。次に、各格子を更に 4 等分して、それぞれの点における補間値の誤差、一次偏導関数の誤差を算出し、それぞれの最大絶対値を得た。

ν を横軸にとって結果を Fig. 3 に示す。

7. むすび

双 $2\nu-1$ 次の補間スプラインの算法を構成し、その誤差限界が、一変数の $2\nu-1$ 次補間スプラインの誤差限界を使ってどのように表現されるかを述べた。

ここで述べた手法は、双 3 次 ($\nu=2$) の場合だけをとってみても、Carl de Boor⁵⁾ の手法に比較して所要記憶量の点で優れている。Type-I スプラインの場合、de Boor⁵⁾ の手法では中間結果として $4(m+1)(n+1)$ 個のパラメータを必要とするが、ここで述べた手法では $(m+3)(n+3)$ 個のパラメータを必要とするに過ぎないのでほぼ 1/4 程度の記憶量ですむ。計算量についてはここで述べた手法の方が、わずかに少ない程度である。

Type-I スプラインは 3. で述べたように境界において高次の偏導関数値を必要とする。従って、それを適用しうる実際の問題は少ないと思われる。格子点上における関数値のみを使って補間するために、一変数の自然スプラインによる補間を二変数へ拡張する試みがなされている⁶⁾。しかし、一変数の自然スプラインによる補間は筆者らのいくつかの数値実験によれば誤差が大きい。従って、それを二変数へ拡張しても好ましい結果は得られないと思われる。ここで述べた Type-III スプラインは、6. に示したように Type-I スプラインに比較すれば誤差が大きいに関数値のみを使って

補間しうることから高精度補間が必要なとき十分実用になると思われる。

ここでの議論は容易に三変数の場合へ拡張しうる。すなわち、三変数の $2n-1$ 次補間スプラインを定義し、3., 4. で述べたと同様な手順で算法を構成し、誤差限界を得ることができる。

最後に日頃御指導頂く、名大工学部福村晃夫教授、鳥居達生助教授、鳥脇純一郎助教授に感謝します。又、数値例に使用した問題を提供して頂き、御指導頂いた建設省国土地理院、石川甲子男氏に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) 一松 信：二変数関数を積の形で近似することについて，情報処理，Vol. 9, pp. 14~17 (1968).
- 2) 石川甲子男：多項式の積による多変数関数の近似式，情報処理第 17 回大会予稿集 267 (1976).
- 3) J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh: The Theory of Splines and Their Applications, p. 284, Academic Press, New York and London (1967).
- 4) Carl de Boor: On Calculating with B -splines, J. Approx. Theory, Vol. 6, pp. 50~62 (1972).
- 5) Carl de Boor: Bicubic Spline Interpolation, J. Math. and Phys., Vol. 41, pp. 212~218 (1962).
- 6) C. A. Hall: Natural Cubic and Bicubic Spline Interpolation, SIAM. J. Numer. Anal., Vol. 10, No. 6, pp. 1055~1060 (1973).
- 7) R. E. Carlson, C. A. Hall: Error Bounds for Bicubic Spline Interpolation, J. Approx. Theory, Vol. 7, pp. 41~47 (1973).
- 8) William J. Gordon: Blending-function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 8, No. 1, pp. 158~177 (1971).
- 9) Frank Stenger: Kronecker Product Extensions of Linear Operators, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 5, No. 2, pp. 422~435 (1968).
- 10) T. N. E. Greville: Note on fitting functions of several independent variables, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 9, pp. 109~115 (1961).
- 11) Martin H. Schultz: L^2 -multivariate approximation theory, SIAM, J. Numer. Anal., Vol. 6, No. 2, pp. 184~209 (1969).
- 12) R. E. Carlson, C. A. Hall: Bicubic Spline Interpolation in Rectangular Polygons, J. Approx. Theory, Vol. 6, pp. 366~377 (1972).
- 13) Garrett Birkhoff: Piecewise Bicubic Interpolation and Approximation in Polygons: I. J. Schoenberg ed., Approximations with Special Emphasis on Spline functions, p. 488, Academic Press, New York, London (1969) pp. 185~221.
- 14) H. B. Curry, I. J. Schoenberg: On Pólya Frequency Functions IV: The Fundamental Spline Functions and Their Limits, J. Anal. Math., Vol. 17, pp. 71~107 (1966).
- 15) P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga: Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems. I, One dimensional Problem, Numer. Math., Vol. 9, pp. 394~430 (1967).
- 16) C. A. Hall: On Error Bounds for Spline Interpolation, J. Approx. Theory, Vol. 1, pp. 209~218 (1968).
- 17) G. Birkhoff, M. H. Schultz, R. S. Varga: Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations, Numer. Math., Vol. 11, pp. 232~256 (1968).
- 18) 秦野和郎：補間スプラインの算法における数値的安定性，情報処理学会第 17 回大会予稿集 204 (1976).
- 19) 秦野和郎：補間スプラインの誤差解析，情報処理，Vol. 18, pp. 2~10 (1977).
- 20) 秦野和郎，二宮市三： B -spline による補間スプラインの算法，情報処理 (掲載予定).

(昭和 52 年 3 月 30 日受付)

(昭和 52 年 8 月 23 日再受付)