

立体ピクロスはNP完全

草野一彦^{†1,†2} 成澤和志^{†1} 篠原 歩^{†1}

立体ピクロスとは任天堂が2009年に発売した同名のゲームに収録されているパズルである。問題として立方体のブロックが積み重なった直方体が与えられ、ブロックに描かれたヒントに従って不要なブロックを削り、隠されたカタチを取り出すのが目的である。本稿では、3SATからの帰着により、立体ピクロスの解の存在判定がNP完全であることを示す。また、立体ピクロスの高さを1に制限し、普通数字・丸数字・四角数字を区別しない場合には、解の存在判定が多項式時間で行えることを示す。

Picross 3D is NP-complete

KAZUHIKO KUSANO,^{†1,†2} KAZUYUKI NARISAWA^{†1}
and AYUMI SHINOHARA^{†1}

Picross 3D is a puzzle which is included in the video game with the same title, Nintendo released on 2009. Players are given a rectangular parallelepiped made of cubic blocks and try to take out the hidden object from it breaking unwanted blocks. In this paper, we show that it is NP-complete to decide whether a given Picross 3D has solutions by reducing 3SAT to Picross 3D. We also show that we can decide existence of solutions in polynomial time if height of Picross 3D is restricted to 1 and condition of hint numbers is ignored.

1. はじめに

立体ピクロス⁴⁾とは任天堂が2009年に発売した同名のゲームに収録されているパズルである。問題として立方体のブロックが積み重なった直方体が与えられ、ブロックに描かれたヒントに従って不要なブロックを削り、隠されたカタチを取り出すのが目的である。図1に立体ピクロスの問題と解(カタチ)の例を示す。

立体ピクロスの元となった「ののぐらむ」(ピクロス, お絵かきロジック)の解の存在判定はNP完全である³⁾。立体ピクロスは「ののぐらむ」が立体になっただけでなく、ヒントの形式が異なる。「ののぐらむ」は全ての列について各セグメントの長さが与えられるが、立体ピクロスではそれぞれの列について残すブロックの個数とセグメント数が与えられる。また立体ピクロスにはヒントが与えられない列がある。そのため「ののぐらむ」のNP完全性の証明をそのまま適用することはできない。本稿では、3SATからの帰着により、立体ピクロスの解の存在判定がNP完全であることを示す。また、立体ピクロスの高さを1に制限

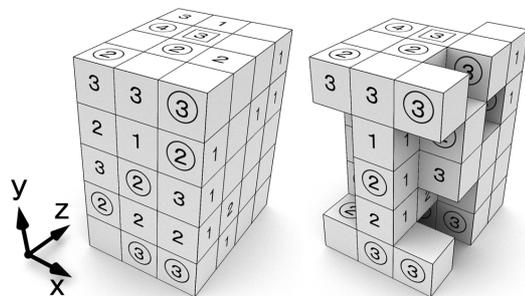


図1 立体ピクロスの問題と解の例

し、普通数字・丸数字・四角数字を区別しない場合には、解の存在判定が多項式時間で行えることを示す。

2. 定義

立体ピクロスを次のように定義する。正整数 w, h, d をそれぞれ立体ピクロスの幅, 高さ, 奥行きとする。 $1 \leq x \leq w, 1 \leq y \leq h, 1 \leq z \leq d$ として、位置 (x, y, z) のブロックを $p_{x,y,z}$ と書く。隠されたカタチに含まれるブロックを残すブロックといい1で、含まれないブロックを削るブロックといい0で表す。3次元行列

†1 東北大学 大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

†2 日本学術振興会特別研究員 DC
Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,h,1} & p_{2,h,1} & \cdots & p_{w,h,1} \\ p_{1,h-1,1} & p_{2,h-1,1} & \cdots & p_{w,h-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,1,1} & p_{2,1,1} & \cdots & p_{w,1,1} \\ p_{1,h,2} & p_{2,h,2} & \cdots & p_{w,h,2} \\ p_{1,h-1,2} & p_{2,h-1,2} & \cdots & p_{w,h-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,1,2} & p_{2,1,2} & \cdots & p_{w,1,2} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} p_{1,h,d} & p_{2,h,d} & \cdots & p_{w,h,d} \\ p_{1,h-1,d} & p_{2,h-1,d} & \cdots & p_{w,h-1,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,1,d} & p_{2,1,d} & \cdots & p_{w,1,d} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

でブロックが積み重なった直方体を表す。見やすさを優先し、一般的な行列と要素の並びを変えている。例えば、図1の立体ピクロスは、

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

である。いくつかのブロックの面にはヒント数字が描かれている。x, y 座標が同じブロックの前面と背面には全て同じ数字が描かれているか、全ての面が空白である。空白を ε で表す。位置 (x, y, *) のブロックの前面と背面に描かれているヒント数字や空白を f_{x,y} とする。同様に位置 (*, y, z) のブロックの左面と右面に描かれているヒント数字や空白を s_{y,z} と、位置 (x, *, z) のブロックの上面と下面に描かれているヒント数字や空白を t_{z,x} と表す。行列

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,h} & f_{2,h} & \cdots & f_{w,h} \\ f_{1,h-1} & f_{2,h-1} & \cdots & f_{w,h-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1,1} & f_{2,1} & \cdots & f_{w,1} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{h,1} & s_{h,2} & \cdots & s_{h,d} \\ s_{h-1,1} & s_{h-1,2} & \cdots & s_{h-1,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,d} \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{d,1} & t_{d,2} & \cdots & t_{d,w} \\ t_{d-1,1} & t_{d-1,2} & \cdots & t_{d-1,w} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,w} \end{pmatrix}$$

をそれぞれ正面図、側面図、平面図と言う。図1の立体ピクロスの正面図、側面図、平面図は次の通りである。

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & \textcircled{3} \\ 2 & 1 & \textcircled{2} \\ 3 & \textcircled{2} & 3 \\ \textcircled{2} & 2 & 2 \\ \varepsilon & \textcircled{3} & \textcircled{3} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \varepsilon \\ \textcircled{4} & \boxed{3} & \varepsilon \\ \varepsilon & \textcircled{2} & 2 \\ \textcircled{2} & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

ヒント数字の値は対応する列が含む残すブロックの個数である。例えば、f_{x,y} のヒント数字の値は $\sum_{z=1}^d p_{x,y,z}$ に等しい。無印の数字（普通数字）は残すブロックのセグメント数が1である（残すブロックが連続している）ことを示している。で囲まれた数字（丸数字）とで囲まれた数字（四角数字）は、残すブロックのセグメント数がそれぞれ2と3以上であることを表している。

判定問題 PICROSS-3D を次のように定義する。
 入力： 正整数 w, h, d と h × w 行列 F, h × d 行列 S, d × w 行列 T.

出力： 立体ピクロスの条件を満たす 3 次元行列 P が存在するならば yes, 存在しなければ no.

3. NP 完全性

PICROSS-3D が NP に属することは自明である。3SAT が PICROSS-3D に多項式時間帰着可能であることを示す。φ を m 個の変数 x₁, x₂, ..., x_m による k 個

の節を持つ，次のような論理式とする．

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

対応する PICROSS-3D の問題を次のように構成する．

$$w = 2(k+m-1) + 1$$

$$h = 4$$

$$d = 3m + 3$$

$F : 1 \leq x \leq k$ について，

$$f_{x,1} = f_{x,4} = \text{div}(m),$$

$$f_{x+k+m,1} = f_{x+k+m,4} = \text{div}(m).$$

$k+1 \leq x \leq k+m-1$ について，

$$f_{x,1} = f_{x,4} = \text{div}(k+m-x),$$

$$f_{x+k+m,1} = f_{x+k+m,4} = \text{div}(k+m-x).$$

$$f_{k+m,1} = f_{k+m,4} = 0.$$

$$f_{1,2} = f_{2,2} = \cdots = f_{k,2} = \boxed{3}.$$

$$f_{k+1,2} = f_{k+2,2} = \cdots = f_{w,2} = 0.$$

$$f_{1,3} = f_{2,3} = \cdots = f_{k,3} = \varepsilon.$$

$$f_{k+1,3} = f_{k+2,3} = \cdots = f_{w,3} = 0.$$

$S : 1 \leq i \leq m$ について，

$$s_{1,3i-2} = s_{4,3i-2} = k+m-i,$$

$$s_{1,3i-1} = s_{4,3i-1} = k+m-i,$$

$$s_{2,3i-2} = s_{3,3i-2} = s_{2,3i-1} = s_{3,3i-1} = \varepsilon,$$

$$s_{1,3i} = s_{2,3i} = s_{3,3i} = s_{4,3i} = 0.$$

$$s_{1,3m+1} = s_{3,3m+1} = s_{4,3m+1} = 0.$$

$$s_{2,3m+1} = \varepsilon.$$

$$s_{1,3m+2} = s_{2,3m+2} = s_{3,3m+2} = s_{4,3m+2} = 0.$$

$$s_{1,3m+3} = s_{3,3m+3} = s_{4,3m+3} = 0.$$

$$s_{2,3m+3} = \varepsilon.$$

$T : 1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq k$ について，

a_j, b_j, c_j の少なくとも 1 つが x_i ならば

$$t_{3i-2,j} = 2,$$

それ以外の場合は

$$t_{3i-2,j} = 1.$$

a_j, b_j, c_j の少なくとも 1 つが \bar{x}_i ならば

$$t_{3i-1,j} = 2,$$

それ以外の場合は

$$t_{3i-1,j} = 1.$$

$1 \leq i \leq m-1$ と $1 \leq j \leq m-i$ について，

$$t_{3i-2,j+k} = t_{3i-1,j+k} = 1.$$

$1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq k+m-i$ について，

$$t_{3i-2,j+k+m} = t_{3i-1,j+k+m} = 1.$$

$$t_{3m+1,1} = t_{3m+1,2} = \cdots = t_{3m+1,k} = \varepsilon.$$

$$t_{3m+3,1} = t_{3m+3,2} = \cdots = t_{3m+3,k} = \varepsilon.$$

これら以外の T の要素は 0.

ここで，

$$\text{div}(i) = \begin{cases} i & i = 1 \text{ の場合,} \\ \textcircled{i} & i = 2 \text{ の場合,} \\ \boxed{i} & i \geq 3 \text{ の場合,} \end{cases}$$

である．

例 1. 変数の個数が $m = 3$ 個で節の個数が $k = 2$ 個の 3SAT

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)$$

に対応する PICROSS-3D の問題 Q は次の通りである．

$$w = 9,$$

$$h = 4,$$

$$d = 12,$$

$$F = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{3} & \textcircled{2} & 1 & 0 & \boxed{3} & \boxed{3} & \textcircled{2} & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \textcircled{2} & 1 & 0 & \boxed{3} & \boxed{3} & \textcircled{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 4 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3SAT ϕ は充足可能である．例えば $x_1 = \text{False}$, $x_2 = \text{True}$, $x_3 = \text{True}$ と割り当てることで ϕ は真となる．この割り当てに対応する立体ピクロス Q の解は

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{11110000} \\ \mathbf{10000000} \\ \mathbf{00000000} \\ \mathbf{00001111} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{000001111} \\ \mathbf{000000000} \\ \mathbf{010000000} \\ \mathbf{111100000} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{000000000} \\ \mathbf{000000000} \\ \mathbf{000000000} \\ \mathbf{000000000} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 000001110 \\ 000000000 \\ 010000000 \\ 111000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 111000000 \\ 110000000 \\ 000000000 \\ 000001110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 000001100 \\ 000000000 \\ 100000000 \\ 110000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 110000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \\ 000001100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 000000000 \\ 000000000 \\ 110000000 \\ 000000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \\ 000000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 000000000 \\ 000000000 \\ 100000000 \\ 000000000 \end{pmatrix}$$

である。

$p_{1,1,3i-2}$ の 0, 1 が x_i の真偽に対応しており, $p_{1,1,3i-1}$ の 0, 1 が \bar{x}_i の真偽に対応している。

補題 1. $1 \leq i \leq m$ について, $p_{1,1,3i-2}$ と $p_{1,1,3i-1}$ は常にどちらか一方が 0 となり他方が 1 となる。

証明. 数学的帰納法により示す。

(1) $i = 1$ の場合

$p_{1,1,1} = 0$ と仮定すると, $s_{1,1} = k + m - 1$ と $f_{k+m,1} = 0$ より, $p_{1,1,1} = p_{2,1,1} = \dots = p_{k+m-1,1,1} = 0$ となる。 $f_{k+m-1,1} = 1$ と $p_{k+m-1,1,3} = p_{k+m-1,1,4} = \dots = p_{k+m-1,1,d} = 0$ より, $p_{k+m-1,1,2} = 1$ であり, $s_{1,2} = k + m - 1$ から, $p_{1,1,2} = p_{2,1,2} = \dots = p_{k+m-1,1,2} = 1$ となる。同様に, $p_{1,1,1} = 1$ を仮定すると $p_{1,1,2} = 0$ となる。

(2) $i \geq 2$ の場合

帰納法の仮定から, $j < i$ について, $p_{1,1,3j-2}$ と $p_{1,1,3j-1}$ はどちらか一方のみが 1 であり, $s_{1,3j-2} = s_{1,3j-1} = k + m - j$ から, $p_{k+m-i,1,1}, p_{k+m-i,1,2}, \dots, p_{k+m-i,1,3i-3}$ のうち, ちょうど $i - 1$ 個が 1 である。このことと, $f_{k+m-i,1} = \text{div}(i)$ であること, $p_{k+m-i,1,3i} = p_{k+m-i,1,3i+1} = \dots = p_{k+m-i,1,d} = 0$ より, $i = 1$ の場合と同様にして, $p_{1,1,3i-2}$ と $p_{1,1,3i-1}$ のどちらか一方のみが 1 であることが導ける。□

$p_{1,1,3i-2}$ と $p_{1,1,3i-1}$ のどちらか一方のみを 1 にすると, $f_{1,2}, f_{2,2}, \dots, f_{k,2}$ 以外のヒントには矛盾することなく, P の要素に 0 が 1 を割り当てることができる。

$x = i, y = 2$ の列が ϕ の i 番目の節に対応している。
補題 2. $1 \leq i \leq m$ と $1 \leq j \leq k$ について, $p_{1,1,3i-2} = 1$ かつ $t_{3i-2,j} = 2$ の時かつその時に限り $p_{j,2,3i-1} = 1$ と

なる。また, $p_{1,1,3i-1} = 1$ かつ $t_{3i-1,j} = 2$ の時かつその時に限り $p_{j,2,3i-1} = 1$ となる。

証明. $p_{1,1,3i-2} = 1$ の場合, $s_{1,3i-2} = m + k - i$ より, $p_{2,1,3i-2} = p_{3,1,3i-2} = \dots = p_{k,1,3i-2} = 1$ である。このとき, $t_{3i-2,j} = 2$ ならば, $p_{j,2,3i-2} = 1$ となる。 $p_{1,1,3i-2} = 0$ の場合, $p_{k+m+1,1,3i-2} = p_{k+m+2,1,3i-2} = \dots = p_{2(k+m)-i,1,3i-2} = 1$ となる。 $t_{3i-2,k+m+1} = t_{3i-2,k+m+2} = \dots = t_{3i-2,2(k+m)-i} = 1$ より, $p_{k+m+1,4,3i-2} = p_{k+m+2,4,3i-2} = \dots = p_{2(k+m)-i,4,3i-2} = 0$ であり, $p_{1,4,3i-2} = p_{2,4,3i-2} = \dots = p_{k,4,3i-2} = 1$ となる。ここで, $t_{3i-2,j}$ は 1 か 2 なので, $p_{j,2,3i-2} = 0$ である。同様に, $p_{1,1,3i-1} = 1$ かつ $t_{3i-1,j} = 2$ の時かつその場合に限り $p_{j,2,3i-1} = 1$ となることが示せる。□

この立体ピクロスが解を持つ時かつその時に限り, ϕ が充足可能であることを示す。

この立体ピクロスが解を持つと仮定する。 $1 \leq x \leq k$ について, $f_{x,2} = \boxed{3}$ と $t_{3m+2,x} = 0$ から, $1 \leq i \leq m$ で $p_{x,2,3i-2}$ もしくは $p_{x,2,3i-1}$ が 1 となるような i が少なくとも 1 つある。このとき, 補題 2 と T の構成法から, ϕ の x 番目の節は少なくとも 1 つ真となるリテラルを含む。よって, ϕ を充足する変数の割り当てが存在する。

ϕ が充足可能であると仮定する。 ϕ を充足するような真偽の割り当てに従って $p_{1,1,1}, p_{1,1,2}, \dots, p_{1,1,3m-2}, p_{1,1,3m-1}$ に 0, 1 を割り当てる。このとき, $1 \leq i \leq k$ について, ϕ の i 番目の節のリテラルのうち少なくとも 1 つのリテラルが真であるから, 補題 2 と T の構成法より, $1 \leq j \leq m$ で $p_{i,2,3j-2}$ もしくは $p_{i,2,3j-1}$ が 1 となる j が少なくとも 1 つある。このような j の個数を n として, $p_{i,2,3m+1}$ と $p_{i,2,3m+3}$ のうち $3 - n$ 個に 1 を割り当てることで, $f_{i,2}$ の条件が満たされる。よって, この立体ピクロスは解を持つ。

これらのことから次の定理が導ける。

定理 1. PICROSS-3D は NP 完全である。

本節では高さが 4 以上の立体ピクロスが NP 完全であることを示した。また, この証明は丸数字と四角数字を区別しない場合, すなわち, 列が含む残すブロックのセグメント数が 1 個であるか 2 個以上であるかというヒントしか与えられない場合にも適用できる。

4. 高さが 1 で普通数字・丸数字・四角数字を区別しない立体ピクロス

「ののぐらむ」の解の存在判定もまた NP 完全であるが, ヒント数字を各行と各列が含む塗るマスの合計とした問題 (図 2) は多項式時間で解の存在判定を行

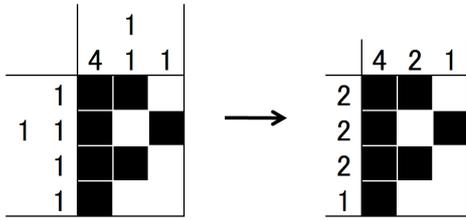


図2 通常の「ののぐらむ」と塗るマスの合計をヒントとした「ののぐらむ」

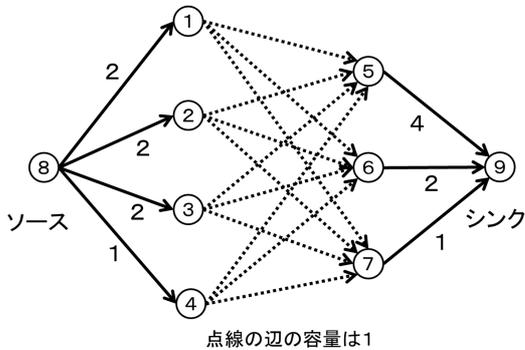


図3 図2の問題に対応するグラフ

うことができる。例えば、問題を最大フロー問題に帰着する手法が知られている²⁾。図2の問題に対応するグラフは図3である。このグラフの最大フローが7であれば元の問題は解を持つ。

この問題と立体ピクロスの違いは、

- 立体であること
- セグメント数が与えられること
- ヒントの無い列があること

である。本節ではこの問題にヒントの無い列があり、いくつかのマス色があらかじめ定められている場合でも多項式時間で解の存在判定が行えることを示す。これは立体ピクロスの高さが1であり、普通数字・丸数字・四角数字を区別しない場合と同じである。本節のヒント数字は立体ピクロスの普通数字と異なり、単に列が含む残すブロックの個数を表す。

例2. 普通数字・丸数字・四角数字を区別しない立体ピクロス

$$w = 3, h = 1, d = 4,$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

の解は、

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

である。これまでの立体ピクロスと異なり F, S, T の要素は非負整数もしくは ε である。

定理2. 立体ピクロスは高さが1で、普通数字・丸数字・四角数字を区別しない場合には、多項式時間で解くことができる。

幅 w 高さ1奥行き d で普通数字・丸数字・四角数字を区別しない立体ピクロス Q に対して、グラフ G_Q を考える。 G_Q の頂点数は $w+d+2$ であり、頂点 i から j への有向辺は次のように下限 $b_{i,j}$ と上限 $c_{i,j}$ を持つ。

$1 \leq i \leq w$ について、

$$f_{i,1} = \varepsilon \text{ ならば } b_{w+d+1,i} = 0, c_{w+d+1,i} = d,$$

$$\text{それ以外の場合は } b_{w+d,i} = c_{w+d,i} = f_{i,1}.$$

$1 \leq i \leq d$ について、

$$s_{1,i} = \varepsilon \text{ ならば } b_{w+i,w+d+1} = 0, c_{w+i,w+d+1} = w,$$

$$\text{それ以外の場合は } b_{w+i,w+d} = c_{w+i,w+d} = s_{1,i},$$

$1 \leq i \leq w$ と $1 \leq j \leq d$ について、

$$t_{j,i} = \varepsilon \text{ ならば } b_{i,w+j} = 0, c_{i,w+j} = 1$$

$$\text{それ以外の場合は } b_{i,w+j} = c_{i,w+j} = t_{j,i}$$

$$e = \sum_{1 \leq i \leq w, f_{i,1} \neq \varepsilon} f_{i,1} - \sum_{1 \leq i \leq d, s_{1,i} \neq \varepsilon} s_{1,i} \text{ とする.}$$

$e < 0$ ならば

$$b_{w+d,w+d+1} = c_{w+d,w+d+1} = -e.$$

$e > 0$ ならば

$$b_{w+d+1,w+d} = c_{w+d+1,w+d} = e.$$

これら以外の辺は無い。

例2の問題に対応するグラフは図4である。グラフ G_Q に制約を満たすフローが存在するかどうかの判定は多項式時間で行うことができる¹⁾。グラフ G_Q に制約を満たすフローが存在する時かつその時に限り立体ピクロス Q が解を持つと示すことで、定理2を証明する。

補題3. グラフ G_Q に制約を満たすフローが存在するならば、立体ピクロス Q は解を持つ。

証明. グラフ G_Q が制約を満たすフローを持つとし、頂

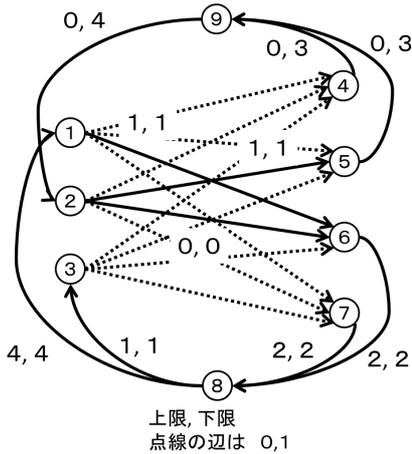


図4 例2の問題に対応するグラフ

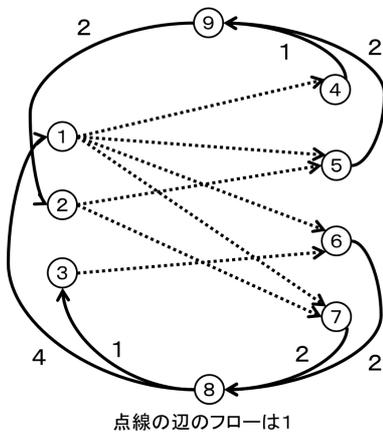


図5 例2の解に対応するグラフ

点 i から j へのフローを $x_{i,j}$ で表す。この時、 $f_{i,1} \neq \varepsilon$ となる i について $x_{w+d,i} = f_{i,1} = \sum_{j=1}^d x_{i,w+j}$ であり、 $s_{1,i} \neq \varepsilon$ となる i について $x_{w+i,w+d} = s_{1,i} = \sum_{j=1}^w x_{j,w+i}$ である。 $t_{j,i} \neq \varepsilon$ ならば $x_{i,w+j} = t_{j,i}$ である。よって、 $p_{i,1,j} = x_{i,w+j}$ とすることで、 P は立体ピクロス Q の解となる。□

補題4. 立体ピクロス Q が解を持つならば、グラフ G_Q は制約を満たすフローを持つ。

証明. 立体ピクロス Q が解を持つとし、その解を P とする。グラフ G_Q の各辺のフロー $x_{i,j}$ を次のように定める。

$b_{i,j} = c_{i,j}$ である場合 $x_{i,j} = b_{i,j} = c_{i,j}$.
 $1 \leq i \leq w$ と $1 \leq j \leq d$ について $x_{i,w+j} = p_{i,1,j}$.
 $f_{i,1} = \varepsilon$ である i について、

$$x_{w+d+1,i} = \sum_{j=1}^d p_{i,1,j}$$

$s_{1,i} = \varepsilon$ である i について、

$$x_{w+i,w+d+1} = \sum_{j=1}^w p_{i,1,j}$$

この時、各辺のフローは上限と下限の制約を満たし、各頂点で流入するフローの和と流出するフローの和は等しい。□

例2の解に対応するグラフを図5に示す。

5. ま と め

本稿では、立体ピクロスの解の存在判定がNP完全であることを示した。また、立体ピクロスの高さが1で、普通数字・丸数字・四角数字を区別しない場合には解の存在判定がPであることを示した。

これらの問題の違いは、

- 立体であること
 - セグメント数が与えられること
- である。このうち、どの違いによってNP完全性が生じるのかというのは興味深い問題である。

参 考 文 献

- 1) Ford, Jr., L.R. and Fulkerson, D.R.: *Flows in networks*, Princeton University Press (1962).
- 2) Slump, C.H. and Gerbrands, J.J.: A network flow approach to reconstruction of the left ventricle from two projections, *Computer Graphics and Image Processing*, Vol.18, No.1, pp.18-36 (1982).
- 3) Ueda, N. and Nagao, T.: NP-completeness results for nonogram via parsimonious reductions, Technical Report TR96-0008, Tokyo Institute of Technology (1996).
- 4) 任天堂株式会社：立体ピクロス，<http://www.nintendo.co.jp/ds/c6pj/> (2010年10月8日閲覧)。