一般化三並べの拡張：禁止動物の導入

本 田 耕 一[†1] 八 鍬 友 貴[†1]
成 澤 和 志[†1] 篠 原 歩[†1]

フランク・ハラリイは三目並べの一般化として，碁盤目に交互に石を置きながら予め定められたある型を先に作った方が勝ちというゲームを提案し，先手に必勝戦略があるものを勝ち型，そうでないものを負け型と定義した．本論文では，この変種で 2 種類の形のどちらかを先に作るというゲーム OR を動物の種類数，組にする動物数，禁止動物の導入，という点について拡張し，その興味深い部分に対し新たに 3 つのゲームとして，ゲーム n 細胞 OR，ゲーム AND，ゲーム NOTAND を提案，考察し，結果として各ゲームの勝敗判定を示す．

Expansion of generalized ticktacktoe：Introduction of forbidden animal

KOICHI HONDA ,[†1] TOMOKI YAKUWA ,[†1] KAZUYUKI NARISAWA [†1]
and AYUMI SHINOHARA [†1]

Frank Harary introduced achievement games for polyominoes as generalized ticktacktoe. Two players alternately mark cells on a board, and the player who first achieves a given polyomino wins. The polyomino itself is called a *winner* if there exists a strategy for the first player to win. Otherwise, it is called a *loser*. In this paper, we expand kinds of polyomino, size of set of polyomino and introduction of forbidden animal in GameOR: GameOR is a variant of the game, and each player tries to achieve either of pair of polyomino to win the game. Then on interesting fields of the expanded game, we propose three new games: Game*n*cellsOR, . And we consider each proposed game, show the judgments of *winner* or *loser*.

1. はじめに

フランク・ハラリイに提案された一般化三並べ[1)2)3)]は，○×ゲームや五目並べを一般化したゲームで，碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた動物（連結した石で定義される形）を，回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．このハラリイによる一般化で，非常に簡単かつ基本的なゲームが，数学的素材となるゲームへと変わった．

これまで，先手が勝ちか引き分けであるかの判定（勝敗判定）やその証明技法の研究の他にも，ルールの拡張の容易さから制限付加させた問題などの研究がなされている．例えば，負け型に関しては，先手が最初に石をいくつ置かせてもらえれば勝ちになるかを求めるハンディキャップに対する研究[4)5)6)]や，Snaky と呼ばれる未解明な動物に関する研究が行われている．

更には,「負け型動物の二つ組のどちらかの動物を作れば勝ち」としたゲーム OR[7)]や，盤面を六角形のマス目に変更したゲーム[8)9)]など幅広く研究がなされている．

本研究では，まず，対象とするゲームである一般化三並べと，その拡張であるゲーム OR について紹介する．

そして，既存研究においては最小単位の負け型の 2 動物の組に対して勝敗判定を行ったゲーム OR をさらに拡張して，動物の種類数，組にする動物数を増やした場合について考察していく．

そこで拡張されたゲーム OR において，特にゲーム性がある部分について，新たなゲームとして,「n 細胞動物を先に作る」ゲーム n 細胞 OR,「二つ組の両方の動物を先に作る」ゲーム AND を提案する，その結果として, 先手の手を先手黒石の 4 近傍に限定した場合 17 細胞以上の動物が作れないことを示し,「m 組」のゲーム OR についての勝敗判定を行う．また更なる拡張として，作ったら負けとなる動物（禁止動物）を導入したゲーム NOTAND を提案し，勝敗判定と考察を行う．

2. 一般化三並べとゲーム OR

フランク・ハラリイにより提案された一般化三並べ

†1 東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

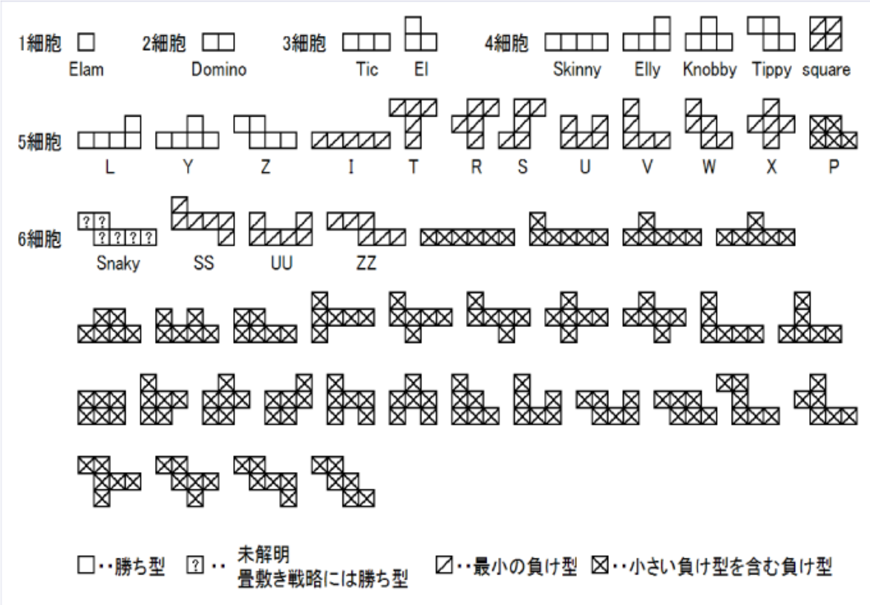

図 1　一般化三並べの形の一覧

とは，以下で定義されるゲームである．

定義 1. 盤の大きさが無限大の碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた連結した石で定義されるある動物（形）を，斜めは許さずに回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．

なお両者が最善を尽くしたとき，先手必勝である動物を「勝ち型」，無限に続けても決着がつかない動物を「負け型」と呼ぶ．なおゲームの性質上，後手必勝ではありえない．

これまでの研究で，未解明である Snaky と呼ばれる動物を除く全ての動物は，必勝手順を示すことや計算機により勝ち型であること，または畳敷き戦略により負け型であることが知られている[10]．一般化三並べの 6 細胞以下の動物の一覧とその勝敗を図 1 に示す．

2.1　勝　ち　型

両者が最善を尽くしたとき、先手必勝である形を「勝ち型」と呼ぶ．勝ち型には，図 1 で示されるように，1 細胞から 5 細胞までの合計 11 個が知られていて，これらの形は単独でも先手が必ず勝てる形である．なお証明に関しては，先手必勝手順を示すことや計算機によって計算させる方法などが知られている．[11]

2.2　負　け　型

両者が最善を尽くしたとき，無限に続けても決着がつかない形を「負け型」と呼ぶ．負け型には，図 1 で示されるように，4 細胞以上から存在し，6 細胞以上になると，5 細胞以下の小さな負け型を含んでいるために明らかに負け型に分類されるものも多く存在する．さらに，7 細胞以上になると必ず小さな負け型を含んでいる．これらの形は単独では絶対に勝つことができない形である．証明に関しては，後手の引き分け戦略として有効な畳敷き戦略を用いて示す方法が知られている．

2.3　未　解　明

勝敗について未解明な形も 1 つだけ存在していて，図 1 で示されている 6 細胞の Snaky である．なお他の 6 細胞に関しては，図 1 で示されている通りすべて負け型となっている．また，Snaky に関しては後手が畳敷き戦略の場合には負け型にならないことなどが知られている．[3)12)13)14)15]

2.4　ゲーム Or

ゲーム Or は，一般化三並べのルールを自然に拡張したゲームで以下のように定義される．

定義 2. 盤の大きさが無限大の碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた連結した石で定義されるある動物の二つ組のどちらかの動物を，斜めは許さずに回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．

一般化三並べと異なっている点は,「動物の二つ組のうちどちらかの動物を先に作れば勝ち」という点である. 従って，二つ組に単独で勝ち型の動物が含まれていれる場合は勝ち型となり，二つ組に対して共通の畳敷きが存在する場合は負け型となる．

3. ゲーム OR の拡張

既存研究におけるゲーム OR[7] の勝敗判定は，図 1 の最小の負け型動物にスネーキーを加えた動物の中の組合せについてなされただけであった．

しかし，他の負け型どうしの組合わせにも勝ち型になるものが存在し，二つ組では負け型でも，三つ組や四つ組にすれば勝ちになるものがある．また五目並べを競技化した連珠では，先手にある形を作ってはならない禁手というルールが存在する．

そこで本研究では，次の 3 の方針からゲーム OR の更なる拡張を考える．

(1) 6 細胞以上の動物も含めた組合せを考える
(2) ゲーム OR における「二つ組」を「m 組」にする
(3) 作ってはならない動物（禁止動物）を導入する

上記の 3 点について拡張したゲーム OR において，特に興味深いと考えられる部分に焦点を当て，新たに 3 つのゲームを提案する．

まず 1 つめに，n 細胞動物全てを組としたゲーム OR をゲーム n 細胞 OR として，2 つめに，定められた二つの形を結合した動物からなる m 組のゲーム OR をゲーム AND として，3 つめに，禁止動物を導入したゲーム OR をゲーム NOTAND として提案する．以下ではこの 3 つのゲームを定義し，考察していく．

4. n 細胞動物のゲーム OR

この章では，6 細胞以上の動物も含めた組合せのゲーム OR について，特に n 細胞動物全てを一つの組としたゲーム OR を新たにゲーム n 細胞 OR と提案し，考察する．

4.1 ゲーム n 細胞 OR の提案

ゲーム n 細胞 OR を以下のように定義する．

定義 3. 盤の大きさが無限大の碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた細胞数 n における全ての n 細胞動物のうち任意の一つの動物を，斜めは許さずに回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．

4.2 ゲーム n 細胞 OR の考察

ゲーム n 細胞 OR は，細胞数 n に対して作ればよい動物の組合せが一意に決まる．よって，細胞数 n に対して一意に勝ち型か，負け型かが確定することになる．また，n 細胞動物の全てを組み合わせるということは，n 個の石を任意に連結する仕方を考慮していることと等価である．つまりゲーム n 細胞 OR は，「n 細胞動物を作ることができるか」という問題としてとらえ直すことができる．

4.2.1 勝ち型の証明

ゲーム OR の結果[7] から，$n=6$ までは勝ち型が存在することが証明されている．更に，任意の 11 細胞以下の動物を同数の石で囲い込むことができず，12 細胞動物になって初めて同数以下の石で囲い込むめることが確認されている[16]．よって，$n \leq 12$ では勝ち型になることは証明できる．

4.2.2 負け型の証明（先手 4 近傍限定の場合）

n 細胞動物全てに共通する畳敷きを見つけることや，また先手の手を制限せずに証明することは困難であるため，ここでは「先手が黒石を置ける位置を既に置かれた先手黒石の上下左右の 4 近傍に限定する」という制限を加えた上で考察する．このとき以下の定理が成り立つ．

定理 1. 先手が黒石を置ける位置を既に置かれた先手黒石の *4* 近傍に限定したとき，後手は先手が初手に置いた石に対して，図 *2* の（*a*）のように先手黒石を 17 個以上連結させないで囲い込む戦略が存在する．

証明. 先手黒石の初手（図 2（b）黒丸）に対して，後手初手は，図 2（b）に示す白丸に置く．後手 2 手目以降は，図 2（b）に示す応手で黒石を囲い込む．畳敷きのように，先手の領域内の手に対して線で結ばれたマスへ後手が白石を置いていく．

先手の手に対し 2 本の線が延びているマスもあるが，石を置いていく過程で必ず 1 対 1 に対応するか，既に白石が置かれている場合となる．既に置かれている場合は領域内のどこに置いても良い．

マス A（A'）に先手が石を置いた場合，図 2（c）において

(1) マス B（B'）に先手黒石を置かれている．
(2) マス C（C'）に先手黒石を置かれている．

の少なくともどちらか一方を満たしている必要がある．（1）のみ，または（1）と（2）両方を満たしている場合は，後手白石はマス E（E'）に置く．（2）のみ満たしている場合は，後手白石はマス F（F'）に置けばよい．

□

この畳敷き戦略にも似ている囲い込み戦略により，先手黒石を 17 個以上連結させずに囲い込むことができた．

4.3 ゲーム n 細胞 OR の結果

以上により，先手が黒石を置ける位置を既に置かれた先手黒石の 4 近傍に限定したゲーム n 細胞 OR において，先手は 17 細胞以上の動物は作ることができず，

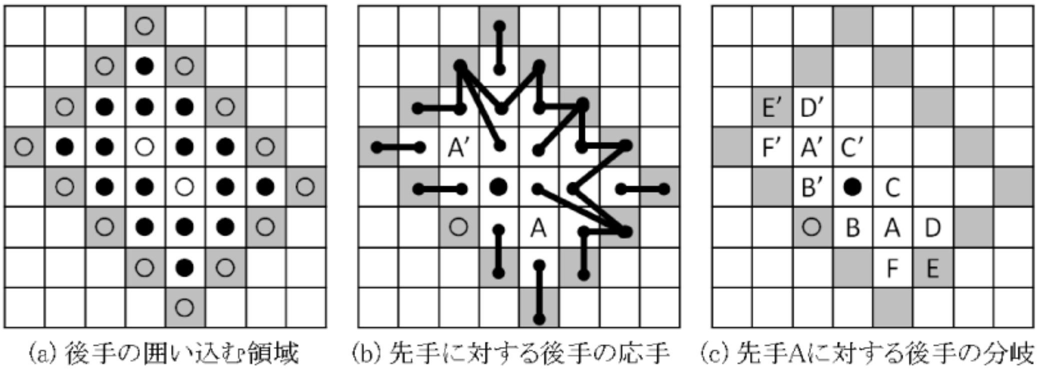

図 2　ゲーム n 細胞 OR における後手の手順

負け型となる細胞数の下界に 17 が含まれることが判明した.

5. ゲーム AND

ここでは,「m 組」のゲーム OR として新たにゲーム AND を提案し，考察する.

5.1 ゲーム AND の提案

ゲーム OR は予め定められた動物の 2 種類を組み合わせ，そのどちらかの動物を先に作るというゲームとしていたが，ゲーム AND は予め定められた動物の 2 種類を組み合わせ，そのどちらの動物も先に作るというゲームを考える.

定義 4. 盤の大きさが無限大の碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた連結した石で定義されるある動物の二つ組のどちらの動物も，斜めは許さずに回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．ただし，二つの動物は 1 マス共有して作られなければならない.

二つの動物が 1 マス共有して作られなければならないという条件は，各々の二つ組ごとに作ればよい動物がいくつかに限られることになる．つまり，ゲーム AND はある二つ組に対して作ればよい動物が m 個存在するとき，予め定められたある動物の「m 組」のうちどれか一つを先に作った方が勝ちという m 動物のゲーム OR とみることもできる.

5.2 ゲーム AND の考察

単独でも負け型となる動物を二つ組の中に一つでも組み合わせてしまうとその負け型は畳敷き戦略で防ぐことができるため，当然負け型となってしまう．よって，二つ組は勝ち型どうしを組み合わせることとする.

5.2.1 勝ち型の証明

作ればよい「m 組」の中に，一つでも勝ち型が含まれていれば当然勝ち型となる．また「m 組」に含まれる動物が全て単独では負け型の場合でも,「m 組」含まれるある二つ組が勝ち型であれば，ゲーム OR の結果から勝ち型となる.

その一例として“Domino と Knobby”における証明を示す.

定理 2.“Domino と Knobby”の二つ組は勝ち型である.

証明. “Domino と Knobby”の二つ組における作ればよい動物を列挙すると，図 3 に示す「五つ組」のゲーム OR となり，この「五つ組」には勝ち型 Y が含まれている．よって“Domino と Knobby”の二つ組は勝ち型である. □

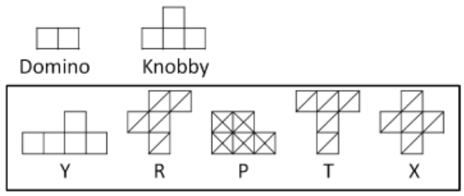

図 3　“Domino と Knobby”の組の場合の作ればよい動物

5.2.2 負け型の証明

作ればよい「m 組」がすべて負け型であり，そのすべてが同じ畳敷きで防げる場合は負け型に分類できる.

負け型となる組は,“Skinny と Skinny”や“Y と Y”,“Z と Z”の 3 組が確認できた．その際“Skinny と Skinny”の組に使用した，新たに発見した畳敷きと，その畳敷きで防げる動物を図 4 に示す.

5.3 ゲーム AND の結果

ゲーム AND における勝敗判定の結果を表 1 に与える．◎で表している組が勝ち型，×が負け型，△が未解明である.

	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
		◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
			◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
				◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
					×	◎	△	△	△	△	△
						△	△	△	△	△	△
							△	△	△	△	△
								△	△	△	△
									△	△	△
										×	△
											×

◎ 勝ち型
× 負け型
△ 未解明

表 1　ゲーム AND における二つ組の勝敗判定

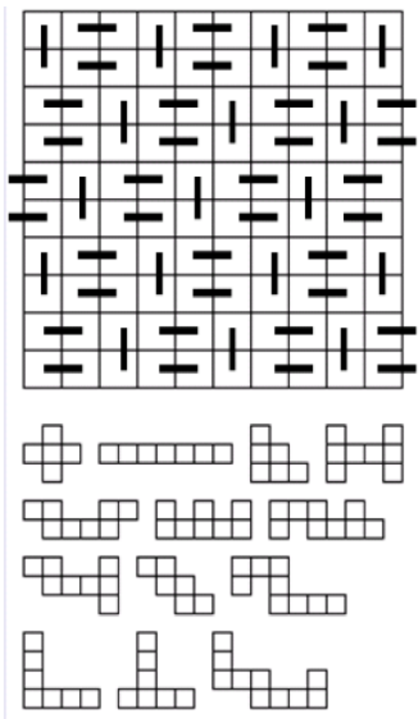

図 4　新たな畳敷きと防げる動物

結果として，単独勝ち型動物どうしの 66 組のうち，39 組が勝ち型，3 組が負け型という結果が得られた．細胞数が大きいものどうしの二つ組は，ほとんどの場合で全てが負け型かつ共通の畳敷きをもたないため，負け型に証明することが困難である．よって，「*m* 組」の動物が 7 細胞以下の動物どうしであれば，多くが勝ち型に分類されると予想される．

6. 禁止動物の導入

最後の拡張として，禁止動物の導入を考える．これは連珠における禁手であり，連珠の場合は先手のみに禁手があるが，ここでは，先手後手ともに同じ禁止動物を定めることとする．

6.1　ゲーム NotAnd の提案

禁止動物を導入したゲーム NotAnd を以下のように定義する．

定義 5. 盤の大きさが無限大の碁盤状の盤面に二者が交互に石を一つずつ置き，予め定められた連結した石で定義されるある動物を，別に定められた禁止動物を作らずに（同時に作る場合も禁止する），斜めは許さずに回転と反転を許して先に作った方が勝ちというゲームである．

6.2　ゲーム NotAnd の考察

禁止動物を導入した場合，これまでのゲームにおける「石を置くことが自らの不利にはならない」という前提が無くなり，後手必勝がありえないということが自明でなくなる．また，単独で負け型である動物の組

作ればよい動物 \ 禁止動物											
	×	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
	×	×	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
	×	×	×	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
	×	×	◎	×	◎	◎	◎	◎	◎	◎	◎
	×	×	×	△	×	△	△	△	△	△	△
	×	×	×	×	◎	×	◎	◎	◎	◎	◎
	×	×	×	×	◎	◎	×	◎	◎	◎	◎
	×	×	◎	×	◎	◎	◎	×	◎	◎	◎
	×	×	×	×	×	×	△	△	×	△	△
	×	×	×	×	×	×	×	△	△	×	△
	×	×	×	×	◎	×	△	×	◎	◎	×

表 2 ゲーム NOTAND における二つ組の勝敗判定

に禁止動物を導入することで後手が先手を防ぐ際に不利になることも考えられ，勝ち型になる可能性もあることが，このゲームの興味深い点となっている．

ここでは，作ればよい動物が単独で負け型であると禁止動物を付加しても負け型になる場合がほとんどであると予想されること，また禁止動物の細胞数が大きいと禁止動物の意味が薄れてしまうことを考慮して，作ればよい動物，禁止動物ともに単独で勝ち型の動物とし，作ればよい動物の個数も一般化三並べと同じ 1 体として考察する．

6.2.1 勝ち型の証明

禁止動物が完成する前に，必然的に作ればよい動物が完成していれば，勝ち型となる．これは，禁止動物の 1 細胞を削った形（連結していない形も含める）を全て列挙し，その全ての形に対して作ればよい動物が含まれていることを確認することで勝ち型と分類できる．

6.2.2 負け型の証明

禁止動物が作ればよい動物に含まれる場合は負け型となる．作ればよい動物と禁止動物が共通な畳敷きで防ぐことができれば，後手は禁止動物を作らずに先手を防ぐことが可能である．当然その二つの動物の作ればよい動物と禁止動物を入れ替えた場合についても負け型である．

単独で負け型動物が含まれるため次節で示す結果には含まれないが，例えば W と X は図 5 に示す通り，共通の畳敷きで防げるため負け型として証明できる．

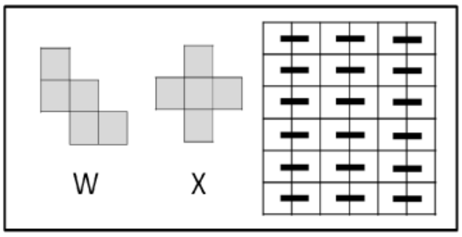

図 5 W と X に共通な畳敷き

6.3 ゲーム NOTAND の結果

ゲーム AND における勝敗判定の結果を表 2 に与える．なお，表の凡例は表 1 に倣う．単独勝ち型動物どうしの 121 組の勝敗判定の結果，57 組が勝ち型，49 組が負け型となった．今後は未解明の解析と共に，動物の種類数や組にする動物数を増やして勝敗判定をする必要がある．

7. まとめと課題

本研究では，対象とする動物の種類数，組にする動物数の増加や禁止動物の導入を行うことで，ゲーム OR の拡張として，その一部分を新たにゲーム n 細胞 OR，ゲーム AND，ゲーム NOTAND として提案し，考察を行った．

ゲーム n 細胞 OR では，先手が黒石を置ける位置を既に置かれた先手黒石の 4 近傍に限定した場合には，後手は先手の石を囲い込む戦略により，17 細胞動物は作ることができないという結果を得ることができた．

今後は先手の手が 8 近傍限定や無制限になったときの戦略を考え，n の下限や上限を調べる必要がある．

ゲーム AND に関しては，本研究ではゲームとしてのおもしろさを追求し，二つ組の勝ち型を対象とし，なおかつルールに二つの動物の 1 マス共有という制限を加えたが，今後 2 動物以上の組の場合も考えていく際に，今回制限したルールを改めて考えいく必要がある．

ゲーム NOTAND については，禁止動物により自分の置いた石が自らに不利になる可能性があるということで，更に難解なゲームとなった. 実際に負け型が禁止動物と組になることで勝ち型になることがあるかどうかを解析していくことが今後の課題となる．

最後に一般化三並べ，ゲーム OR 全体に関して，本研究では拡張したゲーム OR に対して部分的な考察であったが，更に全体像を解明していく必要があり，より網羅的な勝敗判定が求められる. また将来的には, 任意の論理式で表される動物の組に対しての勝敗判定が可能になると面白いだろう. そのためにも，畳敷き以外での負け型の判定法を始め，ゲームの特徴を考慮した新たな勝敗判定の手法の発見が求められる．

参 考 文 献

1) F.Harary. Achieving the skinny animal. *Eureka*, Vol.42, pp. 8–14, 1982.
2) F.Harary and H.Harborth. Achievement and avoidance games with triangular animals. *J. Recreational Mathematics*, Vol. 18, No. 2, pp. 110–115, 1985–1986.
3) F. Harary. Is snaky a winner. *Geombinatorics*, Vol.2, pp. 79–82, 1993.
4) F.Harary, H.harborth, and M.Seemann. Handicap achievement for polyominoes. *Congressus Numerantium*, Vol. 145, pp. 65–80, 2000.
5) H.Harborth and M.Seemann. Handicap achievement for squares. *J. Combin. Math. Combin*, Vol.46, pp. 47–52, 2003.
6) 伊藤大雄. ハラリイの一般化三並べ. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J89-A, No.6, pp. 458–469, 2006.
7) 八鍬友貴, 本田耕一, 篠原歩. 一般化三並べの変種：. 負け型のペアは勝てるのか？第 14 回ゲームプログラミングワークショップ, pp. 35–42, 2009.
8) G.Fulep and N.Sieben. Polyiamonds and polyhexes with minimum site-perimeter and achievement games. 2008.
9) K.Inagaki and A.Matsuura. Winning strategies for hexagonal polyomino achievement. *WSEAS*, pp. 29–31, 2007.
10) 伊藤大雄. パズル・ゲームで楽しむ数学　娯楽数学の世界, 第 3 章. 森北出版, 2010.
11) L.V. Allis, H.J. vanden Herik, and M.P.H. Huntjens. *Go-Moku and Threat-space Search*. University of Limburg, Department of Computer Science, 1993.
12) H.Ito and H.Miyagawa. Snaky is a winner with one handicap. *HERCMA*, pp. 25–26, 2007.
13) H.Harborth and M.Seemann. Snaky is a paving winner. *Bull. inst. Combin. April*, Vol.19, pp. 71–78, 1997.
14) H.Harborth and M.Seemann. Snaky is an edge-to-edge loser. *Geombinatorics*, Vol.5, No.4, pp. 132–136, 1996.
15) I. Halupczok and J. Schlage-Puchta. Achieving snaky. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol.7, No.1, 2007.
16) N. Sieben. Polyominoes with minimum site-perimeter and full set achievement games. *European J. Combin*, Vol.29, No.1, pp. 108–117, 2008.