情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2010-CE-107 No.1
2010/11/20

相加平均と相乗平均を用いたエントロピー関数の近似

高木和久[†]

本論文では, 普通の電卓を用いて対数を用いずに日常に普通に現れる事象の情報量の近似値を計算する方法について考察する. 第 2 章では, 連続する奇数の逆数の和を用いて対数の近似値を計算する. この計算は四則のみで可能である. 電卓にメモリーキーがあれば, 計算はごく短時間で終了する. 第 3 章では, 対数関数の近似式をいろいろと工夫することによって対数の近似値を計算する. ここでは相加平均と相乗平均が現れる. 電卓には平方根を計算する機能が必要である. 第 4 章では 2 値エントロピー関数の近似式を示す. ここでも相加平均と相乗平均が現れる. エントロピー関数の帰納性を用いると簡単な計算で情報量を計算することができる.

Arithmetic Mean, Geometric Mean and Shannon Entropy

Kazuhisa Takagi[†]

Nowadays we cannot live without information technology. To study it, we must understand the notion of entropy introduced by C.E. Shannon, which is defined by logarithm of base 2. In this paper, new approximations of logarithmic functions and the binary entropy function are shown. With these approximations, students can understand and calculate entropy much easily.

1. はじめに

現代は高度情報化社会である. 記憶容量の単位としてのバイトは, 日常的に用いられる用語になっている. 1 バイトは 8 ビットであるが, それではビットという情報量の単位は人々にどれだけ理解されているのであろうか.

通常, 1 ビットは偏りのない硬貨を投げた時に「表が出た」あるいは「裏が出た」という情報の持つ情報量として紹介される. 硬貨が 2 枚になったときは, 「2 枚とも表が出た」という情報量が 2 ビットであり, 硬貨が 3 枚になったときは, 「3 枚とも表が出た」という情報量が 3 ビットである.

硬貨の代わりに性別を用いたり, 偶数, 奇数を用いたりすることもあるが, 本質的には同じことである. では, 偏りのないサイコロを振ったときに「1 の目が出た」という情報の持つ情報量は何ビットであろうか. 関数電卓や表計算ソフトなどを用いればこの情報量は

$$\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + 1.585 = 2.585 \quad (\text{ビット})$$

として簡単に計算することができる.

本研究では, 普通の電卓を用いて, 短い手数で日常に普通に現れる事象の情報量の近似値を計算する方法について考察する. 第 2 章では, 連続する奇数の逆数の和を用いて対数の近似値を計算する. この計算は四則のみで可能である. 電卓にメモリーキーがあれば, 計算はごく短時間で終了する. 第 3 章では, 対数関数の近似式をいろいろと工夫することによって対数の近似値を計算する. ここでは相加平均と相乗平均が現れる. 電卓には平方根を計算する機能が必要である. 第 4 章では C.E. シャノンが導入したエントロピーの概念について説明し, 2 値エントロピー関数の近似式を示す. 第 5 章では $L(n)$ という関数を用いて $\log_2 n$ の値を計算する. $L(n)$ は自然数 n に対して定義され

$$L(2) = 1$$
$$L(2n) = L(n) + 1$$
$$L(2^n) = n$$

を満たす関数である.

偏りのないサイコロを振ったときに「1 の目が出た」という情報の持つ情報量は$L(6)$,「今日は月曜日である」という情報の持つ情報量は$L(7)$ に等しい.

$L(n)$ の値を計算する過程においても相加平均と相乗平均が現れる.

† 高知工業高等専門学校
Kochi National College of Technology

2. 連続する奇数の逆数の和を用いて対数を計算する

この章では自然数 n に対し, 四則のみを用いて $\log_2 n$ の値を計算する方法を紹介する. ここでは例として $\log_2 3$ の近似値を計算することにする. n の自然対数を $\ln n$ で表わすと

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

である. $-1 < x < 1$ のとき

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \cdots$$

が成り立つ. x を$-x$で置き換えると

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots$$

が得られる. 辺々引くと

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$$

となるから, 近似式

$$\ln\frac{1+x}{1-x} \sim 2x$$

を得る. $t = \frac{1+x}{1-x}$ とおくと $x = \frac{t-1}{t+1}$ だから近似式

$$\ln t \sim 2 \cdot \frac{t-1}{t+1}$$

が成り立つ. $t = \frac{b}{a}$ とおくと

$$\ln\frac{b}{a} \sim 2 \cdot \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} = 2 \cdot \frac{b-a}{b+a}$$

が成り立つ.
さて,

$$\ln 2 = \ln\frac{40}{20} = \ln\frac{22}{20} \cdot \frac{24}{22} \cdot \cdots \cdot \frac{40}{38} = \ln\frac{22}{20} + \ln\frac{24}{22} + \cdots + \ln\frac{40}{38}$$

であるから

$$\ln 2 \sim 2\left(\frac{2}{42} + \frac{2}{46} + \cdots + \frac{2}{78}\right) = 2\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \cdots + \frac{1}{39}\right)$$

同様にして

$$\ln 3 = \ln\frac{60}{20} = \ln\prod_{k=0}^{19}\frac{20+2k+2}{20+2k} = \sum_{k=0}^{19}\ln\frac{20+2k+2}{20+2k}$$

$$\therefore \ln 3 \sim 2\sum_{k=0}^{19}\frac{2}{40+4k+2} = 2\sum_{k=0}^{19}\frac{1}{20+2k+1}$$

よって

$$\log_2 3 \sim \frac{\sum_{k=0}^{19}\frac{1}{20+2k+1}}{\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{20+2k+1}} = 1.585$$

真の値は 1. 5849 であるから, かなり良い近似値が得られている. この方法は電卓にメモリー機能や逆数を計算する機能があれば短時間で簡単に結果を得ることができる.

3. 対数関数の新しい近似式

この章では対数関数のいろいろな近似式を導出する. 第 2 章では対数関数の近似式

$$\ln x \sim 2 \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdots ①$$

を用いた. 近似式①で x に 2 を代入すると

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1.5$$

となり, 真の値 1. 5849 よりもかなり小さい値となる.

図 1 に $y = \ln x$ （点線で表示）および $y = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$ （実線で表示）のグラフを示す. 近似式①は $x \geq 1$ の範囲で下方近似になっている.

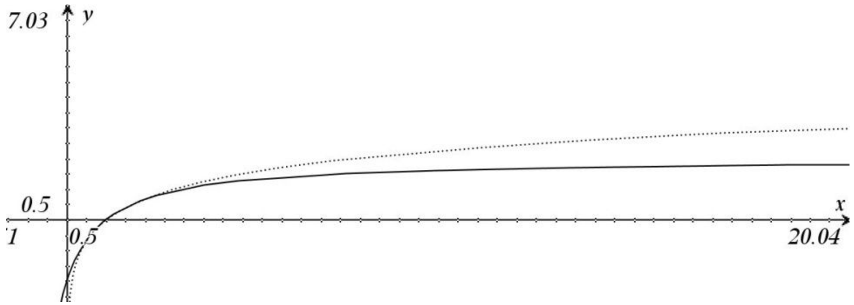

図 1. $y = \ln x$ のグラフ（点線）と $y = 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$ のグラフ（実線）

以下では,①よりも精度の高い近似式を新たに作成する.
自然対数のマクローリン展開より

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

が成り立つ.平方根のマクローリン展開

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots$$

も利用する.両者を辺々掛けあわせると

$$\ln(x+1) \cdot \sqrt{x+1} = x + \frac{x^3(x-1)}{24} - \frac{91x^5}{384} + \cdots$$

であるから,近似式

$$\ln(x+1) \cdot \sqrt{1+x} \sim x$$
$$\therefore \ln(x+1) \sim \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

を得る.$x+1$ を x で置き換えて

$$\therefore \ln x \sim \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdots ②$$

を得る.この近似式を用いて $\log_2 3$ の近似値を求めると

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1.63$$

となるが,残念ながらまだ誤差が大きい.
図 2 に両者のグラフを示す.近似式②は $x \geq 1$ の範囲で上方近似となっている.

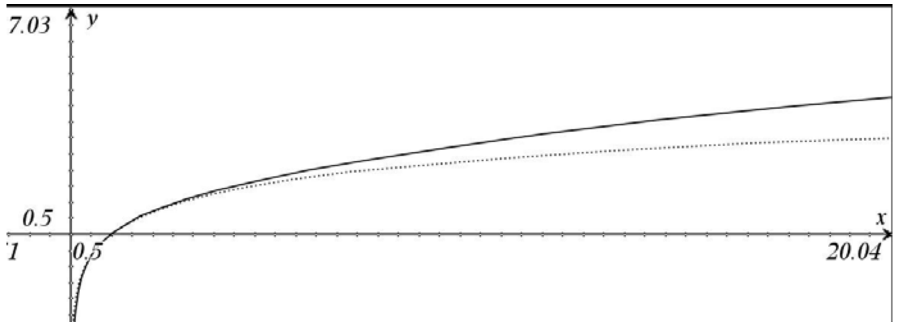

図 2. $y = \ln x$ のグラフ（点線）と$y = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ のグラフ（実線）

ところで 2 つの正数a, b に対し,$x = \frac{b}{a}$ を近似式①に代入すると

$$\ln\frac{b}{a} \sim 2 \cdot \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} = 2 \cdot \frac{b-a}{b+a} = \frac{b-a}{\frac{a+b}{2}}$$

が成り立つ.一方$x = \frac{b}{a}$ を近似式②に代入すると

$$\ln\frac{b}{a} \sim \frac{\frac{b}{a} - 1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

であり,$a < b$のとき不等式

$$\frac{b-a}{\frac{a+b}{2}} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

が成り立っている.そこで,

$$\sqrt{ab} < \mathrm{M}(a,b) < \frac{a+b}{2}$$

が成り立つような $\mathrm{M}(a,b)$を用いて

$$\ln\frac{b}{a} \sim \frac{b-a}{\mathrm{M}(a,b)}$$

という形で $\ln\frac{b}{a}$ を近似することにする.

試行錯誤の結果,$\mathrm{M}(a,b)$を次のように定めるとよいことがわかった.

$$\mathrm{M}(a,b)=\frac{\frac{a+b}{2}+2\sqrt{ab}}{3}=\frac{a+b+4\sqrt{ab}}{6}$$

このとき

$$\ln\frac{b}{a}\sim\frac{b-a}{\mathrm{M}(a,b)}=\frac{6(b-a)}{a+b+4\sqrt{ab}}$$

すなわち

$$\ln x\ \sim\ \frac{6(x-1)}{x+1+4\sqrt{x}}\ \cdots③$$

が成り立つ.図 3 に両者のグラフを示す.精度の高い近似であるため,見ただけでは 2 つのグラフの判別が難しい.

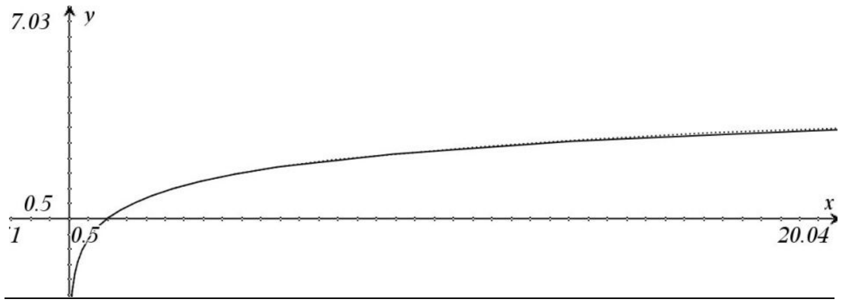

図 3. $y=\ln x$ のグラフ（点線）と $y=\frac{6(x-1)}{x+1+4\sqrt{x}}$ のグラフ（実線）

目視には限界があるためマクローリン展開式を用いて両者を比較しよう.
前回と同様に

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\cdots$$

を用いる.辺々かけると

$$\ln(x+1)\cdot\left(x+2+4\sqrt{x+1}\right)\ =6x+\frac{x^5}{480}-\frac{x^6}{240}+\cdots$$

これより次の近似式を得る.

$$\ln(x+1)\cdot\left(x+2+4\sqrt{x+1}\right)\sim 6x$$

この近似式は x^2,x^3,x^4 の項が消えていて,かなり精度が高い.
x を $x-1$ で置き換えて

$$\ln x\cdot\left(x+1+4\sqrt{x}\right)\sim 6\,(x-1)$$

これより近似式③を得ることができる.
近似式③を用いると

$$\log_2 3=\frac{\ln 3}{\ln 2}\sim\frac{3+4\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}=1.5843$$

のように高い精度の近似値が得られる.電卓にメモリー機能があるとこの計算はごく短時間で行うことができる.

4. シャノンのエントロピー

C. E. シャノンは 1948 年の論文で，総和が 1 である非負の実数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ に対して $H(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ を

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_n)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$$

と定め, これをエントロピー（平均情報量）と呼んだ [1].
$n=2$ のときを考えて見よう. 条件

$$0\le p,q\le 1, p+q=1$$

を満たす任意の実数 p,q に対し,

$$H(p,q)=-p\log_2 p-q\log_2 q\ =-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)$$

となる. この関数は今日では 2 値エントロピー関数と呼ばれている.

このグラフを図 4 に示す. グラフは釣鐘状で, $0\le p\le\frac{1}{2}$ で単調に増加する. そして $p=\frac{1}{2}$ のとき最大値 1 をとり, $\frac{1}{2}\le p\le 1$ で単調に減少する.

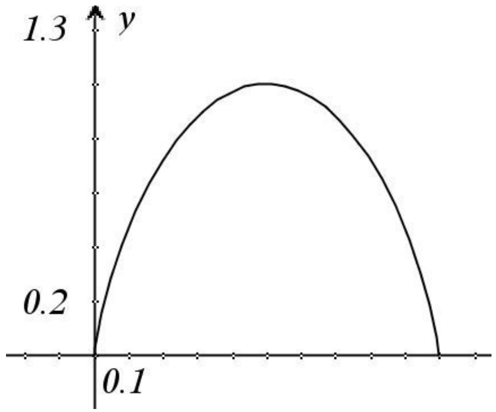

図 4. 2 値エントロピー関数のグラフ

例えば, 赤玉 2 個と白玉 1 個の入った袋から 1 個の玉を無作為に取り出す場合を考えてみよう. 赤玉の出る確率は $\frac{2}{3}$ 白玉の出る確率は $\frac{1}{3}$ であるから, この事象のエントロピー H は次のように計算することができる.

$$H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\log_2 3$$
$$= \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\log_2 3+\frac{2}{3}\log_2\frac{1}{2} = \log_2 3-\frac{2}{3} = 0.918$$

最近はこの程度の簡単な計算であっても一部の学生にとっては理解が困難なようである.そこで 2 値エントロピー関数の近似式

$$H(p,1-p) \sim \{\,4p(1-p)\,\}^{\frac{3}{4}} \cdots ④$$

を新たに作成した.近似式④がどのくらいの精度であるかを以下に確認する.

2 値エントロピー関数 $H(p,1-p)$ の $p=\frac{1}{2}$ における 4 次のテイラー展開は

$$H(p,1-p) \sim 1-2(\log_2 e)\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{3}(\log_2 e)\left(p-\frac{1}{2}\right)^4$$

である.2 値エントロピー関数（点線で表示）とその 4 次の近似式（実線で表示）のグラフを図 5 に示す.

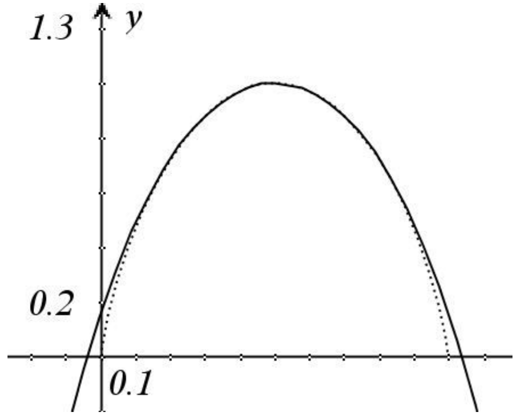

図 5. 2 値エントロピー関数（点線）とその 4 次の近似式（実線）のグラフ

また,2 値エントロピー関数,近似式④,4 次の近似式の 3 つを比較したのが表 1 である.近似式④がまんべんなく良い近似を与えていることが分かる.

表 1. 2 値エントロピー関数, 近似式④, 4 次の近似式の比較

p	$H(p,1-p)$	$\{\,4p(1-p)\,\}^{\frac{3}{4}}$	4 次の近似式
0.00	0.000	0.000	0.158
0.05	0.286	0.288	0.337
0.10	0.469	0.465	0.489
0.15	0.610	0.604	0.618
0.20	0.722	0.716	0.725
0.25	0.811	0.806	0.812
0.30	0.881	0.877	0.882
0.35	0.934	0.932	0.934
0.40	0.971	0.970	0.971
0.45	0.993	0.992	0.993
0.50	1.000	1.000	1.000

近似式④を用いると

$$H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{8}{27}\cdot 2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.838}=0.915$$

として簡単にエントロピーの値を計算することができる.

5. 日常に現れる事象の情報量

この章では自然数 n に対し $L(n)$ という関数を定義する.$L(n)$ は

$L(2)=1$

$L(2n)=L(n)+1$

$L(2^n)=n$

を満たす関数である.例えば,偏りのないサイコロを振ったときに「1 の目が出た」という情報の持つ情報量は$L(6)$,「今日は月曜日である」という情報の持つ情報量は$L(7)$に等しい.

関数$L(n)$の定義に必要な関数Eを次のように定義する.
n個の自然数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に対して 0 以上の実数を対応させる関数 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を

$$E(x_1,x_2,\cdots,x_n)=H\left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i},\frac{x_2}{\sum_{i=1}^n x_i},\cdots,\frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)$$

と定める.

このとき, 関数 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は次の 5 つの条件を満たす.

1. $E(1,1)=1$
2. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ が $x_1,x_2,\cdots,x_n$ の置換のとき, $E(y_1,y_2,\cdots,y_n)=E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
3. $x_1+x_2=y_1+y_2$ のとき, $min\{x_1,x_2\}<min\{y_1,y_2\}$ ならば $E(x_1,x_2)<E(y_1,y_2)$
4. 任意の自然数 k について, $E(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)=E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
5. $E(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=E(x_1+x_2,\ x_3,\cdots,x_n)+\frac{x_1+x_2}{\sum_{i=1}^n x_i}E(x_1,x_2)$

条件 5 より, E関数の値の計算は, $n=2$ のときに帰着される. 第 4 章で紹介した近似式④を用いると $E(a,b)$ の近似式

$$E(a,b)=H\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)\sim\left(4\ \frac{a}{a+b}\ \frac{b}{a+b}\right)^{\frac{3}{4}}=\left\{\frac{4}{(a+b)^2}\ ab\right\}^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{2}{a+b}\sqrt{ab}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore E(a,b)\sim\left(\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

を得ることができる. ここにも相加平均と相乗平均が現れている所が興味深い.
E関数には次の性質がある.

<u>定理 1</u> 自然数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ に対し, $x_1+1<x_2$ が成り立つとき

$$E(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)<E(x_1+1,x_2-1,x_3,\cdots,x_n)$$

<u>証明</u> 条件 5 より

$$E(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=E(x_1+x_2,\ x_3,\cdots,x_n)+\frac{x_1+x_2}{\sum_{i=1}^n x_i}E(x_1,x_2)$$

$$E(x_1+1,x_2-1,x_3,\cdots,x_n)=E(x_1+x_2,\ x_3,\cdots,x_n)+\frac{x_1+x_2}{\sum_{i=1}^n x_i}E(x_1+1,x_2-1)$$

$x_1+1<x_2$ より $x_1<x_1+1\le x_2-1$ だから

$$min\{x_1,x_2\}=x_1<min\{x_1+1,x_2-1\}$$

よって条件 3 より

$$E(x_1,x_2)<E(x_1+1,x_2-1)$$

従って

$$E(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)<E(x_1+1,x_2-1,x_3,\cdots,x_n)$$

が成り立つ.

<u>定理 2</u> 関数 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のとき最大となる.

<u>証明</u> $\sum_{i=1}^n x_i=N$ とおく. 条件 4 よりNはnの倍数であるとしてよい. 関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\left|x_i-\frac{N}{n}\right|$$

と定める.$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ ならば $x_1,x_2,\cdots,x_n$ は全て等しい.

任意に与えられたn個の自然数列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$に対し,新しい自然数列 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ を次の手順で定めてゆく.

手順 1　必要であれば $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を並べ替えて x_1 が最小,x_2 が最大になるようにする

手順 2　$x_1 < x_2$ ならば
$y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3, \cdots, y_n = x_n$
とする.

$x_1 < x_2$ のとき $x_1 < \frac{N}{n} < x_2$ だから $x_1 + 1 < x_2$ である.定理 1 より

$$E(y_1, y_2, \cdots, y_n) = E(x_1 + 1, x_2 - 1, x_3, \cdots, x_n) > E(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

が成り立つ.一方

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(x_1 + 1, x_2 - 1, x_3, \cdots, x_n)$$
$$= f(x_1 + 1, x_2 - 1, x_3, \cdots, x_n) - 2 < f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

であるから,この手順を繰り返すと有限回で $y_1 = y_2$ となる.

このとき $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \frac{N}{n}$ である.自然数列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は任意に与えられたものだったから,$E\left(\frac{N}{n}, \frac{N}{n}, \cdots, \frac{N}{n}\right)$ は最大値である.

さて,任意の自然数 n に対し関数 $L(n)$ を

$$L(n) = E(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n})$$

と定める.条件 1 より

$$L(2) = E(1,1) = 1$$

である.$L(n)$ に関し次の 2 つの定理が成り立つ.

定理 3　任意の自然数 n に対し　$L(2n) = L(n) + 1$

証明　条件 5 より

$$L(2n) = E(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{2n}) = E(2,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{2(n-1)}) + \frac{2}{2n}E(1,1) = E(2,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{2(n-1)}) + \frac{1}{n}$$

$$= E(2,2,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{2(n-2)}) + \frac{2}{2n}E(1,1) + \frac{1}{n} = E(2,2,\overbrace{1,1,\cdots,1}^{2(n-2)}) + \frac{2}{n}$$

$$\therefore L(2n) = \cdots = E(\overbrace{2,2,\cdots,2}^{n}) + \frac{n}{n} = E(\overbrace{1,1,\cdots,1}^{n}) + 1 = L(n) + 1$$

定理 4　任意の自然数 n に対し　$L(2^n) = n$

証明　定理 3 と $L(2) = 1$ より明らか.

$L(n)$ は $\log_2 n$ に相当する. $L(n)$ を用いて,日常生活に現れる事象を 2 つ選んでその情報量を計算しよう.

例 1　偏りのないサイコロを振ったときに「1 の目が出た」という情報の持つ情報量

$$L(6) = L(2 \cdot 3) = L(3) + 1 = E(1,1,1) + 1 = E(2,1) + \frac{2}{3}E(1,1) + 1$$

$$= E(2,1) + \frac{5}{3} \sim \left(\frac{\sqrt{2}}{1.5}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3} \sim 2.582$$

情報量は 2.58 ビットであることがわかる.

例 2　今日は月曜日である, という情報の持つ情報量

$$L(7) = E(1,1,1,1,1,1,1) = E(2,2,2,1) + 3 \times \frac{2}{7}E(1,1) = E(4,3) + \frac{4}{7}E(2,2) + \frac{3}{7}E(2,1) + \frac{6}{7}$$

$$= E(4,3) + \frac{3}{7}E(2,1) + \frac{10}{7} \sim \left(\frac{\sqrt{12}}{3.5}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7}\left(\frac{\sqrt{2}}{1.5}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{7} \sim 2.806$$

情報量は 2.81 ビットであることがわかる.

Vol.2010-CE-107 No.1
2010/11/20

6. おわりに

2010 年は国際生物多様性年である.生物多様性とは多様な生物が存在していることであるが,何種類の生物がいるか,だけではなくて個体数がどのような割合で生息しているかの情報が重要である.例えば,5 種類の生物が合計 10 匹発見されたとする.総数が同じであっても,これらの生物が 6 匹,1 匹,1 匹,1 匹,1 匹,と生息している場合と 2 匹,2 匹,2 匹,2 匹,2 匹,と生息している場合とでは意味合いが異なる.これを数値化する方法としてシャノンのエントロピーが広く用いられている[3].

本論文で導入した記号を用いれば,この違いは

$$E(6,1,1,1,1) = E(3,2) + \frac{4}{5} \sim 1.77$$

$$E(2,2,2,2,2) = E(4,1) + \frac{8}{5} \sim 2.32$$

の様に数値化される.つまり 2 匹,2 匹,2 匹,2 匹,2 匹,と生息している場合の方が生物多様性が大きい.E関数を用いずに,H関数

$$H\left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \cdots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

を用いてこれらの計算を行うのは大変である.

エントロピーの値を求めるのではなく,値の大小の比較をするだけであれば,更に簡単な方法があるように感じられる.今後はその方面の研究を行ってゆきたい.

参考文献

1) Claude E. Shannon: A Mathematical Theory of Communication, Bell System Technical Jounal, 27:379-423, 623-656, 1948
2) Imre Csiszar:Aximoatic Characterizations of Information Measures, Entropy 2008, 10, 261-273, 2008.
3) 大垣俊一,多様度と類似度,分類学的新指標, http://www.mus-nh.city.osaka.jp/iso/argo/nl15/nl15-10-22.pdf
4) 三木成彦,吉川英機,情報理論,コロナ社,2000