資 料

Walsh 関数系を用いた2点境界値問題の数値解法*

伊藤直人** 北原紀之** 矢野秀雄**

Abstract

An approximate method for numerical solution is considered for the boundary-value problems of linear ordinary differential equations of second order in the form

$$L(y)=y''-q(x)y=r(x),$$

with

$$y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta.$$

First, y is expanded in a finite series of Walsh functions wal $(j-1, x)$ with unknown coefficients c_j, such that

$$y\fallingdotseq \sum_{j=1}^{n} c_j \,\mathrm{wal}(j-1, x).$$

Then, c_j can be determined by the ordinary method of weighted residuals with weight functions of wal $(i-1, x)$. This method is equivalently transformed into a simpler method without any loss of accuracy. That is, y is expanded as

$$y\fallingdotseq \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x),$$

where f_j are characteristic functions determined by

$$f_j(x)=\begin{cases}1 & \text{for} \quad x\in D_j\\ 0 & \text{for} \quad x\overline{\in} D_j,\end{cases}$$

with

$$D_j=(x_j-h/2, x_j+h/2), \quad h=(b-a)/n,$$
$$x_j=a+(j-1/2)h.$$

The method requires merely the collocation to obtain the unknown coefficients c_j.

1. まえがき

線形常微分方程式の2点境界値問題

$$\begin{cases}L(y)=y''(x)-q(x)y(x)=r(x), & (1)\\ y(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta & (2)\end{cases}$$

の数値解法については種々の方法が知られている[1]. 最近有限要素法と関連して重みつき残差法[2),3)]がよく使用されている. それは1次独立な試験関数 $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ を選び, 微分方程式(1)の近似解として

$$y_n^*(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) \tag{3}$$

となる $y_n^*(x)$ を求める解法である. そして残差が1次独立な重み関数

$\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$ と直交するように, 係数 c_1, …, c_n を決める. ここで試験関数と, 重み関数は, 解こうとする微分方程式に応じて種々のものが選ばれており, 一般的かつ確定的な関数系はない.

ところで初期値問題については, Walsh 関数系[4)~6)]を用いた数値解法[7)~9)]がすでに報告されている. 我々は境界値問題に対しても, Walsh関数系を用いた解法を開発した. これは解法として一般的である. このAlgorithmは次のようなものである.

定理1

境界値問題(1), (2)の近似解は次式で与えられる.

$$y_n^*(x_j)=c_j \quad (j=1, \cdots, n). \tag{4}$$

* An Approximate Method for Numerical Solution of Two-Point Boundary-Value Problems of Linear Ordinary Differential Equations Using System of Walsh Functions by Naoto ITO, Noriyuki KITAHARA and Hideo YANO (Maizuru Technical College).

** 舞鶴工業高等専門学校

ただし

$$h=\frac{b-a}{n}, \quad (5)$$

$$x_j=a+\left(j-\frac{1}{2}h\right) \quad (j=1, \cdots, n), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j=d_i \quad (i=1, \cdots, n), \quad (7)$$

$$d_i=G(x_i)-h\sum_{j=1}^{n}\left\{K(x_i, x_j)-\frac{h}{8}\delta_{ij}\right\}r(x_j) \quad (i=1, \cdots, n), \quad (8)$$

$$a_{ij}=\delta_{ij}+h\left\{K(x_i, x_j)-\frac{h}{8}\delta_{ij}\right\}q(x_j) \quad (i, j=1, \cdots, n), \quad (9)$$

$$G(x)=\frac{(b-x)\alpha+(x-a)\beta}{b-a}, \quad (10)$$

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{(b-x)(t-a)}{b-a} & (x\geqq t)\\ \dfrac{(b-t)(x-a)}{b-a} & (x<t)\end{cases} \quad (11)$$

である.

2. Walsh 関数系を用いた解法

2点境界値問題 (1), (2) は次の積分方程式と同値である.

$$y(x)=G(x)-\int_a^b K(x, t)(q(t)y(t)+r(t))dt. \quad (12)$$

積分方程式 (12) に近似解 (3) を代入すると, 残差 $R_n(x)$ は

$$R_n(x)=y_n^*(x)+\int_a^b K(x, t)q(t)y_n^*(t)dt -G(x)+\int_a^b K(x, t)r(t)dt \quad (13)$$

となる.

ところで Walsh 関数は値が ± 1 である2値関数である. 区間 (a, b) での2乗積分可能な関数のなす空間を $L^2(a, b)$ とするとき, j 番目の Walsh 関数を $\mathrm{wal}(j-1, x)$ と書けば, $\mathrm{wal}(0, x)$, $\mathrm{wal}(1, x)$, $\cdots$, は $L^2(0, 1)$ での完全正規直交系である.

$y(x)\in L^2(a, b)$ のとき, これを Walsh 級数展開すれば近似解を求めることができる. すなわち式 (3) に代るものとして, $y(x)$ の近似展開式

$$y_n^*(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{wal}\left(j-1, \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (14)$$

を考えれば, 残差 $R_n(x)$ は式 (13) より

$$R_n(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j\left\{\mathrm{wal}\left(j-1, \frac{x-a}{b-a}\right) +\int_a^b K(x, t)q(t)\mathrm{wal}\left(j-1, \frac{t-a}{b-a}\right)dt\right\}-G(x) +\int_a^b K(x, t)r(t)dt \quad (15)$$

となる. ここで係数 $c_1, \cdots, c_n$ を決定するために重み関数 $\varphi_i(x)$ を

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{b-a}\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (i=1, \cdots, n) \quad (16)$$

とすれば

$$\int_a^b R_n(x)\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\frac{dx}{b-a}=0 \quad (i=1, \cdots, n) \quad (17)$$

を変形して

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\left\{\int_a^b \mathrm{wal}\left(j-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\frac{dx}{b-a} +\int_a^b\int_a^b K(x, t)q(t)\mathrm{wal}\left(j-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\frac{dtdx}{b-a}\right\}$$
$$=\int_a^b G(x)\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\frac{dx}{b-a} -\int_a^b\int_a^b K(x, t)r(t)\mathrm{wal}\left(i-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\frac{dtdx}{b-a} \quad (i=1, \cdots, n) \quad (18)$$

となる.

3. 特性関数系を用いた解法

2. で述べた Walsh 関数系を用いた数値解法は, このままの形では関数の Walsh 級数展開に多くの時間を要するので, 少し工夫が必要である. 開区間 $D_j=\left(x_j-\frac{h}{2}, x_j+\frac{h}{2}\right)$ での特性関数を

$$f_j(x)=\begin{cases}1 & x\in D_j\\ 0 & x\notin D_j\end{cases} \quad (19)$$

とおくと, Walsh 関数系 $\mathrm{wal}\left(0, \frac{x-a}{b-a}\right)$, $\cdots$, $\mathrm{wal}\left(n-1, \frac{x-a}{b-a}\right)$ と特性関数系 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ とは, n が2の正整数べき乗の場合は同値である (付録). だから式 (14), (16) を特性関数系を用いて

$$y_n^*(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x), \quad (20)$$

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{h}f_i(x) \quad (i=1, \cdots, n) \quad (21)$$

とおけば, 式 (18) は

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\left\{\frac{1}{h}\int_{D_i} f_j(x)dx+\frac{1}{h}\int_{D_i}\int_{D_j} K(x, t)q(t)dtdx\right\}$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{h}\int_{D_i}G(x)dx-\frac{1}{h}\int_{D_i}\int_a^b K(x,t)r(t)dtdx \qquad (22)$$

となる．もちろん式(22)の係数 $c_1, \cdots, c_n$ は式 (18) の係数とは異なっているが，再び同じ文字を用いた．

ところでこの定積分の計算であるが，最も簡単な方法は，定積分を区間の中点での値で表わすことである．すると式 (22) における c_j の係数 a_{ij} は式(9)で，式 (22) の右辺 d_i は式 (8) で近似されるが，a_{ij} の計算の第2項目について説明しておく．

$$\frac{1}{h}\int_{D_i}\int_{D_j}K(x,t)q(t)dtdx$$

$$=\frac{1}{h}\int_{D_j}\int_{D_i}K(x,t)q(t)dxdt, \qquad (23)$$

$i>j$ のとき $(23)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{D_j}\int_{D_i}\frac{(b-x)(t-a)}{b-a}q(t)dxdt$

$$\fallingdotseq h\frac{(b-x_i)(x_j-a)}{b-a}q(x_j), \qquad (24)$$

$i=j$ のとき

$$(23)=\frac{1}{h}\int_{D_j}\int_{x_j-h/2}^{t}\frac{(b-t)(x-a)}{b-a}q(t)dxdt$$

$$+\frac{1}{h}\int_{D_j}\int_{t}^{x_j+h/2}\frac{(b-x)(t-a)}{b-a}q(t)dxdt$$

$$\fallingdotseq\int_{x_j-h/2}^{x_j}\frac{(b-x_j)(x-a)}{b-a}q(x_j)dx$$

$$+\int_{x_j}^{x_j+h/2}\frac{(b-x)(x_j-a)}{b-a}q(x_j)dx$$

$$=\frac{h}{2}\frac{(b-x_j)\left(x_j-\dfrac{h}{4}-a\right)}{b-a}q(x_j)$$

$$+\frac{h}{2}\frac{\left(b-x_j-\dfrac{h}{4}\right)(x_j-a)}{b-a}q(x_j)$$

$$=h\frac{(b-x_j)(x_j-a)}{b-a}q(x_j)-\frac{h}{8}q(x_j). \qquad (25)$$

$i<j$ のときは式 (24) と同様の計算をすればよい．また式(22)の右辺の第2項の積分は次のようにした．

$$-\frac{1}{h}\int_{D_i}\int_a^b K(x,t)r(t)dtdx$$

$$=-\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n}\int_{D_i}\int_{D_j}K(x,t)r(t)dtdx$$

$$\fallingdotseq -h\sum_{j=1}^{n}\left\{K(x_i,x_j)-\frac{h}{8}\delta_{ij}\right\}r(x_j). \qquad (26)$$

4. 係数行列の正則性

式 (9) で与えられる a_{ij} を要素とする係数行列を $A=(a_{ij})$ $i,j=1,\cdots,n$ とする．式 (7) が解けるためのひとつの十分条件を次の定理に示す．

定理 2

$$|q(x)|<\frac{2}{(b-x)(x-a)}\Rightarrow\det A\neq 0. \qquad (27)$$

証明

$$|a_{ij}|\leqq\frac{1}{h}\int_{D_i}\int_{D_j}K(x,t)|q(t)|dtdx, \quad (i\neq j) \qquad (28)$$

$$|a_{jj}|\geqq 1-\frac{1}{h}\int_{D_j}\int_{D_j}K(x,t)|q(t)|dtdx \qquad (29)$$

が式 (22) よりいえるから

$$|a_{jj}|-\sum_{i\neq j}|a_{ij}|$$

$$\geqq 1-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_{D_i}\int_{D_j}K(x,t)|q(t)|dtdx$$

$$=1-\frac{1}{h}\int_a^b\int_{D_j}K(x,t)|q(t)|dtdx$$

$$=1-\frac{1}{h}\int_{D_j}|q(t)|\int_a^b K(x,t)dxdt$$

$$=1-\frac{1}{h}\int_{D_j}\frac{(b-t)(t-a)}{2}|q(t)|dt>0 \qquad (30)$$

が任意の j について成り立つ．したがって係数行列 A は正則である[10]．

式 (7) が解けるためのもうひとつの十分条件，定理3を証明するために，まず次の補題を示す．

補題 1

$P^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})_{i,j=1,\cdots,m}$ とする．

$$p_{ij}^{(m)}\begin{cases}>0 & (i=j)\\ \geqq 0 & (i=1)\\ \leqq 0 & (i>j)\\ =0 & (\text{その他})\end{cases}\Rightarrow\det P^{(m)}\neq 0. \qquad (31)$$

証明

m について数学的帰納法を用いる．$m=2$ のときは自明である．3以上の整数 k について $m=k-1$ のとき補題1が成り立つと仮定し，$m=k$ のときも成り立つことを示す．k 次正則行列 $S^{(k)}=(s_{ij}^{(k)})$ を

$$s_{ij}^{(k)}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ -\dfrac{p_{1k}^{(k)}}{p_{kk}^{(k)}} & ((i,j)=(1,k))\\ 0 & (\text{その他の } i,j)\end{cases} \qquad (32)$$

とおく．$P^{(k-1)}$ を

$$S^{(k)}P^{(k)}=\left[\begin{array}{c:c}P^{(k-1)} & 0\\ \hdashline p_{k1}^{(k)}\cdots p_{kk-1}^{(k)} & p_{kk}^{(k)}\end{array}\right] \qquad (33)$$

で定義すると，その (i,j) 成分は

$$p_{ij}^{(k-1)}=\begin{cases}p_{ij}^{(k)} & (i\neq 1)\\ p_{ij}^{(k)}-\dfrac{p_{1k}^{(k)}p_{k1}^{(k)}}{p_{kk}^{(k)}} & (i=1)\end{cases} \tag{34}$$

であるから k 次正方行列 $P^{(k)}$ が式(31) の条件を満たせば，$k-1$ 次正方行列 $P^{(k-1)}$ も式 (31) の条件を満たし，帰納法の仮定により $\det P^{(k-1)}\neq 0$ である．また式 (33) から

$$\det S^{(k)}\det P^{(k)}=p_{kk}^{(k)}\det P^{(k-1)} \tag{35}$$

がいえるから $P^{(k)}$ は正則行列となる．数学的帰納法により補題1が証明できた．

よって次の定理が成り立つ．

定理 3

$$0\leqq q(x)<\frac{8}{h^2}\Rightarrow \det A\neq 0. \tag{36}$$

証明

正則行列 $B=(b_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ を次の様に定義する．

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ -\dfrac{x_i-a}{x_1-a} & (i=1,\cdots,n,\ j=1)\\ 0 & (\text{その他の } i,j).\end{cases} \tag{37}$$

このとき $P=BA$ の要素 p_{ij} は

$$P_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{h^2}{8}q(x_i) & (i=j\geqq 2)\\ a_{1j} & (j=1,\cdots,n)\\ -h(x_i-x_j)q(x_j) & (i>j\geqq 2)\\ -\dfrac{x_i-a}{x_1-a}\left(1-\dfrac{h^2}{8}q(x_1)\right)-h(x_i-x_1)q(x_1) & (i>j=1)\\ 0 & (\text{その他の } i,j)\end{cases} \tag{38}$$

となる．n 次正方行列 P は補題1の条件を満たすから正則行列であり，$A=B^{-1}P$ も正則行列となる．

5. 誤差評価

式(12) に真の解 $y(x)$ と近似解 $y_n^*(x)$ とを代入して差をとると

$$\begin{aligned}|y(x)-y_n^*(x)|&\leqq\int_a^b K(x,t)|q(t)||y(t)-y_n^*(t)|dt\\&\leqq\|q(t)\|_\infty\|y(t)-y_n^*(t)\|_\infty\int_a^b K(x,t)dt\\&=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\|q(t)\|_\infty\|y(t)-y_n^*(t)\|_\infty\end{aligned} \tag{39}$$

が成り立つが，式 (14) を特性関数で置き換えた式から，理論的には

$$c_j=\int_a^b y(t)\frac{f_j(t)}{h}dt=\frac{1}{h}\int_{D_j}y(t)dt \tag{40}$$

が成り立ち c_j は区間 D_j における $y(t)$ の平均値に等しい．数値計算で得られた c_j は式 (40) で定義される c_j と異なるが，区間 D_j 内の一点 ξ_j で，$y(\xi_j)=c_j$ が成り立つと仮定すれば

$$\begin{aligned}\|y(t)-y_n^*(t)\|_\infty&=\max_j\max_{t\in D_j}|y(t)-c_j|\\&=\max_j\max_{t\in D_j}|(t-\xi_j)y'(\xi_j+\theta_j(t-\xi_j))|\\&\leqq h\max_j\max_{t\in D_j}|y'(t)|=h\|y'(t)\|_\infty\end{aligned} \tag{41}$$

が成り立つ．ここで θ_j は $|\theta_j(z)|\leqq|z|$ なる関数である．そのとき式 (39) は

$$|y(x)-y_n^*(x)|\leqq h\frac{(b-x)(x-a)}{2}\|q(x)\|_\infty\|y'(x)\|_\infty \tag{42}$$

となり刻み幅 h の減少とともに真の解に収束する．

ところで実験例では全て式 (42) の収束は h^2 に比例している．例題として

$$\begin{cases}y''-\dfrac{1}{9}\left(\cos^2\dfrac{x}{3}-\sin\dfrac{x}{3}\right)y=0\\ y(0)=1,\quad y(8)=1.57975951\end{cases} \tag{43}$$

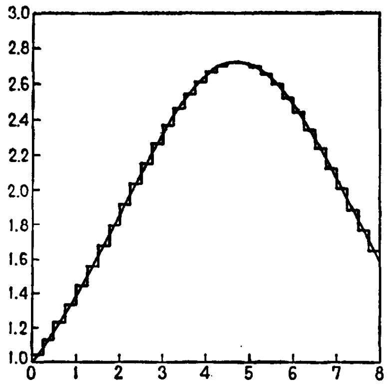
について，絶対誤差，計算時間を差分法と比較して，**Table 1** にまとめておく．計算は TOSBAC 3400-31 で行い，逆行列の計算は，本解法では Gauss-Jordan 法を，差分法では Band 行列に対する方法を用いた．また行列の次数 $n=32$ で数値計算した Walsh 級数展開による近似解と，厳密解 $y(x)=\exp(\sin(x/3))$ とを **Fig. 1** (次頁参照) に示す．

6. あとがき

未知関数 $y(x)$ を未知係数を含む有限個の Walsh 関数，または特性関数で近似展開し，2階線形常微分方程式の境界値問題の数値解法を得た．要点をまとめ

Table 1 Comparison between our method and finite-difference method.
T1 : Computing time in our method
T2 : Computing time in finite-difference method

Order of matrix	Maximum absolute error		T1/T2
	Our method	Finite-difference method	
4	0.1 E-00	0.2 E-00	2
8	0.3 E-01	0.5 E-01	41
16	0.8 E-02	0.1 E-01	86
32	0.2 E-02	0.3 E-02	42
64	0.5 E-03	0.9 E-03	64



Equation: $y''-\frac{1}{9}\left(\cos^2\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{3}\right)y=0$

Boundary conditions: $y(0)=1$, $y(8)=\exp\left(\sin\frac{8}{3}\right)$

Exact solution: $y(x)=\exp\left(\sin\frac{x}{3}\right)$

Number of terms: $n=32$

Fig. 1 Comparison between the present solution and exact solution.

ると次のとおりである.

1) 試験関数, 重み関数ともに Walsh 関数系を使った重みつき残差法により, 近似解を得ることができる.

2) Walsh関数系の代りに特性関数系を使えば, 数学的には同値な解法であり, しかも, 重みつき残差法で必要な内積の計算時間が短縮される.

3) 特性関数系による数値解法としては, 区間の数は2の正整数べき乗である必要はない.

4) 本解法を差分法と比べてみると, Algorithmはやや複雑である. 同じ刻み幅のとき, 誤差は 0.5 倍程度であり, おおよそ 0.2 倍から 1 倍の範囲内にあり, 精度は良いといえる. しかし計算時間は例題のような複雑な係数の場合で 100 倍ないし 1,000 倍の時間を必要とする ($n=32$). 記憶容量を同じにした場合は差分法の方が精度が良い.

参 考 文 献

1) H. B. Keller: Numerical Method for Two-Point Boundary-Value Problems. p. 184, Blaisdell Pub. Co., Waltham (1968).

2) 川井忠彦: 重みつき残差法と有限要素法の将来性, 数理科学, No. 144, サイエンス社, pp. 5~11 (1975).

3) B. A. Finlayson, 鷲津, 山本, 川井共訳: 重みつき残差法と変分原理, p. 413, 培風館, 東京 (1974).

4) 喜安善市: Hadamard 行列とその応用 (その1~その5), 電子通信学会誌, Vol. 57, pp. 17~27 (No. 1), pp. 189~198 (No. 2), pp. 290~302 (No. 3). pp. 562~575 (No. 5), pp. 697~711 (No. 6) (1974).

5) H. F. Harmuth: Transmission of information by orthogonal functions, p. 393, Springer, Berlin (1972).

6) K. G. Beauchamp: Walsh functions and their applications, p. 236, Academic Press, London (1975).

7) M.S. Corrington: Solution of differential and integral equations with Walsh functions, IEEE Trans. on Circuit Theory CT-20, September, pp. 470~476 (1973).

8) 伊藤直人, 竹内敬治, 北原紀之: Walsh 関数とその微分方程式への応用, 舞鶴高専紀要, 第 11 号, pp. 100~105 (1976).

9) 伊藤直人, 竹内敬治, 北原紀之: 常微分方程式のある解法について, 情報処理, Vol. 17, No. 5, pp. 426~430 (1976).

10) 森 正武: 数値解析, p. 273, 共立出版 (1973).

付録: 式 (22) の証明

定義: D をある区間とし, $a(x)\in L^2(D)$, $b(x)\in L^2(D)$ のとき, 内積を次のように定義する.

$$(a(x), b(x))=\int_D a(x)b(x)dx. \qquad \text{(A 1)}$$

定義: $a_i(x)\in L^2(D)$, $\boldsymbol{a}(x)=(a_1(x), \cdots, a_m(x))^t$ のとき, 次式で m 次元 vector を定義する.

$$\langle \boldsymbol{a}(x), b(x)\rangle=\begin{pmatrix}(a_1(x), b(x))\\ \vdots \\ (a_m(x), b(x))\end{pmatrix}. \qquad \text{(A 2)}$$

補題: $A=(a_{ij})$ を $k\times m$ 行列とするとき

$$\langle A\boldsymbol{a}(x), b(x)\rangle=A\langle \boldsymbol{a}(x), b(x)\rangle \qquad \text{(A 3)}$$

が成り立つ. (証明省略)

定義: $b_i(x)\in L^2(D)$, $\boldsymbol{b}(x)=(b_1(x), \cdots, b_n(x))^t$ のとき, 次のように $m\times n$ 行列を定義する.

$$[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}(x)]=\begin{pmatrix}(a_1(x), b_1(x))\cdots(a_1(x), b_n(x))\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (a_m(x), b_1(x))\cdots(a_m(x), b_n(x))\end{pmatrix}. \qquad \text{(A 4)}$$

補題: $\boldsymbol{c}=(c_1, \cdots, c_n)^t$ のとき次式が成り立つ.

$$\langle \boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}^t(x)\boldsymbol{c}\rangle=[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}(x)]\boldsymbol{c}. \qquad \text{(A 5)}$$

証明

$$\langle \boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}^t(x)\boldsymbol{c}\rangle=\begin{pmatrix}(a_1(x), \sum_i b_i(x)c_i)\\ \vdots \\ (a_m(x), \sum_i b_i(x)c_i)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_1(x), b_1(x))\cdots(a_1(x), b_n(x))\\ \vdots \\ (a_m(x), b_1(x))\cdots(a_m(x), b_n(x))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}(x)]\boldsymbol{c}. \tag{A 6}$$

補題：$B=(b_{ij})$ を $l\times n$ 行列とするとき

$$[A\boldsymbol{a}(x), B\boldsymbol{b}(x)]=A[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}(x)]B^t \tag{A 7}$$

が成り立つ．

証明

$$\text{左辺の }(p, q)\text{ 成分}=(\sum_i a_{pi}a_i(x), \sum_j b_{qj}b_j(x))$$

$$=\sum_{i,j} a_{pi}b_{qj}(a_i(x), b_j(x))$$

$$=\text{右辺の }(p, q)\text{ 成分.} \tag{A 8}$$

定義：$u(x,\xi)=\delta_{x-\xi}+K(x,\xi)q(\xi),$ (A 9)

$$v(x)=G(x)-\int_a^b K(x,\xi)r(\xi)d\xi, \tag{A10}$$

$$\boldsymbol{W}(x)=\left(\mathrm{wal}\left(0, \frac{x-a}{b-a}\right), \cdots, \mathrm{wal}\left(n-1, \frac{x-a}{b-a}\right)\right)^t. \tag{A11}$$

さて式 (28) を書き直すと

$$\left\langle \frac{\boldsymbol{W}(x)}{b-a}, \langle \boldsymbol{W}(\xi), u(x,\xi)\rangle^t \boldsymbol{c}\right\rangle$$

$$=\left\langle \frac{\boldsymbol{W}(x)}{b-a}, v(x)\right\rangle \tag{A12}$$

となるが式 (A 5) により

$$\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{W}(x), \langle \boldsymbol{W}(\xi), u(x,\xi)\rangle]^{-1}\langle \boldsymbol{W}(x), u(x)\rangle \tag{A13}$$

となる．また式 (14) を書き直すと

$$y_n^*(x)=\boldsymbol{c}^t \boldsymbol{W}(x) \tag{A14}$$

となる．ここで関数系の変換 $\boldsymbol{W}(x)=\Gamma\boldsymbol{\Phi}(x)$ を行うと式 (A14) は

$$y_n^*(x)=\{[\Gamma\boldsymbol{\Phi}(x), \langle \Gamma\boldsymbol{\Phi}(\xi), u(x,\xi)\rangle]^{-1}$$

$$\langle \Gamma\boldsymbol{\Phi}(x), v(x)\rangle\}^t\Gamma\boldsymbol{\Phi}(x)$$

$$=\{\{\Gamma[\boldsymbol{\Phi}(x), \langle \boldsymbol{\Phi}(\xi), u(x,\xi)\rangle]\Gamma^t\}^{-1}\Gamma\langle \boldsymbol{\Phi}(x), v(x)\rangle\}^t$$

$$\Gamma\boldsymbol{\Phi}(x)$$

$$=\{(\Gamma^t)^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(x), \langle \boldsymbol{\Phi}(\xi), u(x,\xi)\rangle]^{-1}\Gamma^{-1}\Gamma$$

$$\langle \boldsymbol{\Phi}(x), v(x)\rangle\}^t\Gamma\boldsymbol{\Phi}(x)$$

$$=\left\{\left[\frac{\boldsymbol{\Phi}(x)}{h}, \langle \boldsymbol{\Phi}(\xi), u(x,\xi)\rangle\right]^{-1}\langle \boldsymbol{\Phi}(x), v(x)\rangle\right\}^t\frac{\boldsymbol{\Phi}(x)}{h} \tag{A15}$$

となる．n が2の正整数べき乗のときは，Walsh 関数の定義から，最初の n 個の Walsh 関数は，n 個の特性関数で表わすことができる．そこで

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=(f_1(x), \cdots, f_n(x))^t \tag{A16}$$

とすることができ，そのとき式(A15) を書き直せば，式 (22) となる．

(昭和 52 年 4 月 4 日受付)
(昭和 52 年 11 月 10 日再受付)