B-11

組合せオークションの勝者決定問題に対する上界値計算法の提案

A Computation of The Upper Bound for Winner Determination in Combinatorial Auctions

那須 弘一郎†　山口 一章†　田窪 伸哉†　増田澄男†
Koichiro Nasu　Kazuaki Yamaguchi　Shinya Takubo　Sumio Masuda

1. まえがき

組合せオークションとは、単一の財に対してでなく、任意の財の組合せに対して入札を行えるようにしたオークションメカニズムである。

財の割り当ては落札額の和が最大化されるように決定される。図 1.1 に例を示す。5 個の財、A,B,C,D,E に対して図 1.1 のような入札 1,2,3 があるとする。この場合、入札額の合計が最大になる財の割り当ては、入札 1 と入札 3 への財の割り当てである。したがって、入札者 a に財{A,B}が、c に{C,D,E}が割り当てられ、オークションの勝者は入札者 a と入札者 c になる。

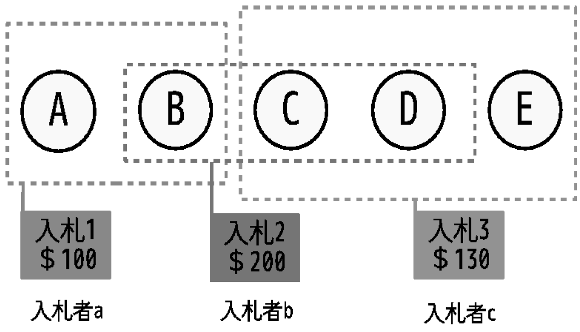

図 1:勝者決定問題

近年のネットワーク技術の発展に伴い、インターネットを利用したオークションは、低コストで大規模なオークションを実現することが可能であるため急成長している。中でも、組合せオークションは、選好の補完性、代替性を考慮することで、参加者の効用と売り手の収入を同時に増加することが可能であり、既に広く普及している単一材を対象としたオークションに置き換わって普及する可能性がある。

組合せオークションは、アメリカ連邦通信委員会（FCC）の無線周波数割当への適用が検討された例もあり、注目を浴びている。他にも二酸化炭素の排出権のオークションや空港での離発着権の割当などにも適用できる。

しかし、組合せオークションにおける落札額の和を最大化する勝者決定問題は NP 困難であり、現実的な入札に対する平均計算量については明らかにされていない。実際のオークションを想定した場合、最適解を求めることが重要である一方、オークションには即時性が求められるため、ある程度高速な厳密解法が必要となる。分枝限定法による厳密解法が提案されているが、分枝限定法は上界の精度が効率を大きく左右する。

本研究では、入札に含まれる財から制約条件を生成するラグランジュ緩和を用いた上界値計算法を提案する。

本論文の構成を以下に示す。第 2 章では、提案手法に用いた技法について説明する。第 3 章では、提案手法について説明し、第 4 章で、ベンチマークとしてよく用いられる CATS[1]を入札とする実験の結果を示す。最後に第 5 章でまとめと今後の課題について述べる。

† 神戸大学、Kobe University

2．準備

まず本稿で扱う組合せオークションの定義を述べ、次に、本論文で用いる切除平面法とラグランジュ緩和について説明する。

2.1　組合せオークションの定義

組合せオークションの勝者決定問題は、以下のように 0-1 整数計画問題として定式化される。入札の集合を A、財の集合を Gとし、各入札 $i \in A$ が任意の財の組合せ $S_i \subseteq G$ とするとして、入札額を b_i、入札数を nとする。あるひとつの財 g∈G を含む入札の集合を $A(g)$ とする。変数 x_i は入札 i が勝者である場合に 1、敗者である場合に 0 とする。

最大化　$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i$

制約条件　$\sum_{\forall i \in A(g)} x_i \leq 1$

$x_i \in \{0,1\}$

2.2　切除平面法

切除平面法とは、線形緩和問題の小数解を切り捨て、解空間に内包される整数をすべて残すような半空間を制約として、整数解を得るまでその制約を目的関数に組み込みながら解空間を狭めていき最終的に整数解を得ようとする解法である。つまり、解空間に着目した解法と言える。しかし、整数解を得るまでに非常に多くの切除平面を加える必要があるため、通常は単独で用いず、分枝限定法と組み合わせて分枝カット法として用いられる。

2.3　ラグランジュ緩和

最大化問題の上界を求める方法の一つにラグランジュ緩和がある。ラグランジュ緩和は、最適化問題のいくつかの制約条件から得られる非負の値にラグランジュ乗数をかけて目的関数に加え、その制約条件を取り除く。加えた値は負でないため、制約が取り除かれた問題の最適解は元の問題の上界となる。

以下に0-1整数計画問題の簡単な例を示す。c は行ベクトル、A, B は行列、b, d, x, λ が列ベクトルで x が変数、λ は全ての要素が非負とする。

最大化　cx

制約条件　$Ax \leq b$

$Bx \leq d$

$x \in \{0,1\}$

このように定式化された問題において、下記のように制約条件にラグランジュ乗数 λ を乗じて目的関数に加え、以下の問題を得る。

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & cx+\lambda(b-Ax) \\ \text{制約条件} & Bx \leq d \\ & x \in \{0,1\} \end{array}$$

加えられた項は非負であるから、この問題の解は最適解に関する上界を与えている。

３．提案手法

組合せオークションは整数条件を取り除いて得られる上界(線形緩和による上界)が最適解と離れており、分枝限定法における枝刈りの効果があまり期待できない。よって、本研究ではより厳しい制約を生成し、より良い上界を得ることを目指す。以下では、複数の財に着目し、その財から制約条件を生成する手法を提案する。

3.1　前処理

はじめに、入札を簡単化するため、単一財入札の入札額をその財を含む組合せ入札の入札額から引いたあと、単一財入札自身の入札額を 0 とする。これにより、組合せ入札の入札額が負になった場合は勝者になれないことを意味しており、計算対象となる入札が減ることになり計算量を削減できる。

3.2　組合せオークションの制約条件の生成手法

制約条件の生成手法について説明する。各財 g において、その財を含む入札の入札額の総和を V_g とする。以下では、財を５つ選び、その５つに関する制約条件を作る方法を示す。最高額の入札に含まれる財が3つ以下の場合、その全ての財を選択し、次に高額な入札において V_g の上位順に財を4つになるまで選択する。また、最高額の入札に含まれる財の個数が4つ以上である場合は、その入札から V_g の上位順に財を4つ選択する。選択された4つの財のうち1つまたは3つ含む入札の中の財から選択した4つの財とは異なり、さらにそれらの入札に最も多く含まれている財を5つ目に選択する。そして、選択された5つの財のうち少なくとも1つを含む入札について、含む財の個数を係数とする以下の制約条件を生成する。

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{b} c_i x_i \leq 5$$

入札 i が選択された5つの財のうち含んでいる数を c_i、右辺の5は選択された財の個数である。

さらに、ここから全体を2で割り制約を厳しくする。

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{b} \frac{c_i}{2} x_i \leq \frac{5}{2}$$

ここで小数点以下を切り捨てることで(ゴモリーカット)、より厳しい制約条件を得ることができる。

$$\text{制約条件} \quad \sum_{m\in P\, n\in Q} x_m + 2x_n \leq 2$$

5つの財のうち2つまたは3つ含む入札を m とし、その入札の集合を P とする。5つの財のうち４つまたは５つ含む入札を n とし、その入札の集合を Q とする。

以下に制約条件の有用性についての例を示す。

$x_i \in \{0,1\}$　とし、その係数を選択した財を含む数として、初めに以下のような制約条件が出来たとすると、

$$\begin{aligned} & x_1+2x_2+2x_3+4x_4 \leq 5 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}x_1+\frac{2}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{4}{2}x_4 \leq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となり、

$$x_2+x_3+2x_4 \leq \frac{1}{2}x_1+\frac{2}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{4}{2}x_4$$

という不等式が成り立つため、

$$x_2+x_3+2x_4 \leq \frac{5}{2}$$

という左辺において小数点以下を切り捨てた制約条件が成り立つ。ここで、初めに示した通り、x_i は 0 または 1 という値を取るので、右辺においても小数点以下の切り捨てが行われ、

$$x_2+x_3+2x_4 \leq 2$$

という先に述べた制約条件よりも厳しい制約条件が作られた。例えば、x_3 =0.5, x_4 =1 であった場合、元の制約条件では不等式を満たしているが、後の制約条件ではこれを満たさない。

3.3 上界値計算アルゴリズム

5つの財に着目し、その財を含む数を係数とする制約条件を作る。その制約条件の両辺を2で割り、より厳しいゴモリーカットを作り出す。そのゴモリーカットを目的関数に組み込む。この一連の操作を繰り返すことで最終的に上界値を得る。そのアルゴリズムを以下に示す。

入力：各入札 i の入札額 w(i)、各入札 i に含まれる財の系列 Si
出力：上界値 z
(1)z←0 とする。
(2)各入札 i に対し、a[i]←w(i)とする。
(3)|Si| = 1 である入札 i について、同じ財を含む入札 j に対して、a[j]←a[j] - a[i]とし、a[i]←0 とする。
(4)a[･]の最も大きい入札 r を得る。
(5)入札 r に対し、(6.1)～(6.8)を実行する。
(5.1)|Sr| = 2 ならば(5.2)へ、|Sr| = 3 ならば(5.5)へ、|Sr| ≧ 4 ならば(5.8)へ。
(5.2)S を空集合とし、入札 r の 2 つの財を S に加える。
(5.3)入札 r の次に a[･]の大きい入札 t を得る。
(5.4)財 u∈St について、u∈Sv である各入札 v の a[v]の合計が高い順に 2 つ S に加える。(6)へ。
(5.5)S を空集合とし、入札 r の 3 つの財を S に加える。
(5.6)入札 r の次に a[･]の高い入札 t を得る。
(5.7)財 u∈St について、u∈Sv である各入札 v の a[v]の合計が最も高い財 u を S に加える。(6)へ。

(5.8)財 u∈Sr について、u∈Sv である入札 v の a[v]の合計が高い順に 4 つ S に加える。(6)へ。
(6)|S∩Si| = 1 または 3 となる入札 i に最も多く含まれる財 g∉S について、g を S に加える。
(6)各入札 i について、|S∩Si| = 2 または 3 ならば(7.1)へ、|S∩Si| = 4 または 5 ならば(7.2)へ。
(7.1)a[i]←a[i] - 1 とする。(8)へ。
(7.2)a[i]←a[i] – 2 とする。(8)へ。
(8)z←z + 2 とする。
(9)a[・]が 1 つでも正であれば(4)に行く。
(10)|Si| = 1 の入札 i について、z←z + Σ w(i)
(11)z を出力して停止する。

以上の処理は、新たに得られた不等式から得られる非負の値を加えることで上界の計算を行っている。これは、得られた不等式にラグランジュ乗数 1 を乗じて目的関数に加えることと等価であり、提案手法は簡単化したラグランジュ緩和法であるとみなせる。

提案手法の例を以下に示す。a,b,c,d,e,f,g,h,i,j の 10 個の財に<2,{a,b,c,}>、<12,{c,d,e,f}>、<9,{e,f,g,h,i}>、<2,{f}>、<1,{j}>のような入札が行われたとすると、(3)によって<2,{a,b,c,}>、<10,{c,d,e,f}>、<7,{e,f,g,h,i}>となる。この 3 つの入札の上界を計算する。ここで目的関数を得る。

最大化 $$2x_1+10x_2+7x_3$$

(4)〜(6.8)において、5 つの財 c,d,e,f,g に着目し、

制約条件 $$4x_2+3x_3\leq 5$$

という制約条件が出来る。これをより厳しい制約条件のゴモリーカットにするため両辺を 2 で割る。

制約条件 $$2x_2+x_3\leq 2$$

こうして出来上がったゴモリーカットを目的関数に組み込む。この時の定数項が z に当たる。

最大化 $$2x_1+10x_2+7x_3+5(2-2x_2-x_3)$$
$$=\ 2x_1+2x_3+10$$

同様に財 b,c,d,e,f に着目し、制約条件を作り目的関数に組み込むと、

最大化 $$2x_1+2x_3+10+2(2-x_1-x_3)$$
$$=\ 14$$

最後に単一入札額の合計 3 を足して、この問題の上界値 17 が得られた。

4. 計算機実験

提案手法による上界値計算の計算機実験を行った。4.1 節では実験方法を述べ、4.2 節では結果および考察を示す。

4.1 実験方法

組合せオークションのベンチマーク問題として Layton-Brown らの CATS[1]がよく用いられている。よって、本実験では CATS の 4.5 節 Temporal Scheduling から得た入札を使った実験を行う。

それぞれの入札について、入札数は 100〜400、財の個数は 100〜400、入札額は CATS で得られた評価値の小数を切り捨て 1 を足した整数値 1〜24、入札に含まれる財は 1〜10 個の連続した財である。これらの入札に対して、提案手法で得られた上界値と厳密解法[2]によって得られた厳密解を比較した。

実験には、OS が Linux2.6、CPU は Pentium(R) Dual-Core E6300、プログラミング言語には Java5.0 を用いた。

4.2 結果及び考察

表 1:厳密解と上界値の比較

	財の個数 100		財の個数 200	
入札数	厳密解	上界値	厳密解	上界値
100	134	144	193	206
200	162	185	251	277
300	164	190	270	296
400	182	217	318	371

	財の個数 300		財の個数 400	
入札数	厳密解	上界値	厳密解	上界値
100	235	264	255	270
200	271	308	307	337
300	392	422	430	461
400	379	475	※	

※厳密解の計算時間がかかり過ぎたため省略

この実験結果より、厳密解と上界値との誤差は厳密解に対して多くの場合 10%前後であった。入札数 100 財の個数 100 個から入札数 400 財の個数 400 の全ての条件において比較的良好な上界が得られていることがわかった。

また、入力が多くなるにつれ、上界値の精度が多少低減している。これは目的関数に制約条件を組み込む段階で微妙に誤差が生じていくためであるが、制約条件の生成方法にも多少の問題は考えられる。

5. あとがき

本稿では、組合せオークションの勝者決定問題において、厳密解法に用いる上界値を求めるための計算法を提案した。提案方では財を 5 つ選択し、その財について制約条件を生成する手法について言及した。

CATS[1]4.5 節の Temporal Scheduling を入札とした計算機実験により、入札によって悪い結果を出力することもあったが、基本的に一定の有効性を示した。

選択された財が出来るだけ多くの入札に含まれるようにすることで、制約の効果が増すため、より最適値に近い上界値

が得られると予測できる。よって、今後の課題として、財の選択方法の改善が考えられる。また、ラグランジュ乗数についても今回は 1 としたが、この値を変化させることでも良い上界値が得られると考えられるため、ラグランジュ乗数の改善も課題として考えられる。

参考文献

[1]Leyton-Brown,K.,Pearson,M.and Shoham,Y.:Towards a Universal Test Suite for Combinatorial Auction Algorithms,in Proc. of EC 2000,2000,pp.66-76.

[2]K.Yamaguchi and S.Masuda, ``A New Exact Algorithm for the Maximum WeightClique Problem," Proceedings of the 23rd International Technical Conference on Circuits, pp.317-320, 2008.

[3]T.Sandholm,et al.,``CABOB: A Fast Combinatorial Algorithm for Optimal Combinatorial Auctions",Proc. of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2001), pp.1102-1108,2001.

[4]Sandholm, T.,``BOB:Improved Algorithms for Optimal Winner Determination in Combinatorial Auctions and Generalizations,AAAI2000," pp. 90-97,2000.