|連載| 記述の科学

第2回

# 視点と形式的体系

木下佳樹　高井利憲

（産業技術総合研究所）

計算機科学研究の仲間である苫迦と羅茶による，情報システムについての問答が続いている．前回の最後には，情報を処理する目的はいろいろであること，その目的１つ１つに対して，情報システムへの見方，あるいは視点ができることなどについて話していた．

## 形式的体系―等式表現を例に

**苫迦**：今回は，情報システムに対する視点をどう表すか，についてのお話からはじまるのでしたね．

**羅茶**：そうでした．でも前回は，法律や社会組織についても話していましたが．

**苫迦**：はい．情報システムという言葉は，法律や社会組織なども含む，広い意味で使いました．

**羅茶**：そうですよね．よかった．システムに対する視点が変わると，必要な語彙も変わってくる，という苫迦さんからのお話がありました．語彙だけでなく，常識も視点によって変わるでしょうね．

**苫迦**：確かに．しかし，常識って何なのでしょうね．

**羅茶**：常識についても真偽を云々することができますから，少なくとも，常識は命題，あるいは１つの文である，と言えるでしょう．たとえば，会計システムを開発する場合，開発者はプログラマですから，セマフォー変数の値を更新するときには，その変数をロックしなければならない，という常識を持っています．

**苫迦**：はい．そのような初歩のプログラミングの知識は，プログラマの間では，それこそ常識ですね．

**羅茶**：しかし，システムの発注をする側の会計業務従事者にとっては，セマフォーといってもちんぷんかんぷんで，常識とは，ほど遠いもの，ということになるでしょう．

**苫迦**：なるほど，プログラマの間で常識であっても，会計業務従事者のように，視点を異にする人にとってまで常識だとは限りませんね．

**羅茶**：常識は人の集まりによって異なります．人

| 等式表現 $F\mathrm{am} = (\Sigma^F, E^F)$ | | |
|---|---|---|
| 語彙 $\Sigma^F$ | アリティ | 函数記号 |
| | 1 | uncle brother father nephew son |
| 公理 $E^F$ | father(brother($x$)) ≈ father($x$)<br>father(uncle($x$)) ≈ father(father($x$))<br>father(father(nephew($x$))) ≈ father($x$)<br>father(son($x$)) ≈ $x$ | |

| 等式表現 Shitei = $(\Sigma^S, E^S)$ | | |
|---|---|---|
| 語彙 $\Sigma^S$ | アリティ | 函数記号 |
| | 1 | 師匠　弟子 |
| 公理 $E^S$ | 師匠 (弟子 ($x$)) ≈ $x$ | |

**表 -1　家族と師弟関係の等式表現**

の集まりがあるとメンバに共通の視点があるわけで，その視点をとるときの常識が公理である，と考えてみたいのです．

**苫迦：** いきなり公理が出てきましたね．数学の話になりましたか．

**羅茶：** そうして，語彙は，その視点で命題を記述するための単語集，ということができます．公理もその語彙で記されるはずです．

**苫迦：** ふむふむ，すると，視点というものの正体は，語彙とその語彙で記した公理の集まり，ということになりますか．

**羅茶：** はい．今日は，このような立場からいろいろ考えてみることにしましょう．

## ❏ 等式表現

**羅茶：** 形式言語の語彙とその形式言語によって記した公理の集まりをまとめたものを形式的体系といいます．本来ならば，論理とは何か，形式的体系とは何か，などという一般論をするべきところかもしれませんが，話が長くて分かりにくくなるので，ここでは具体的に，形式的体系の一種である等式表現（equational presentation）を例にとって話を進めてみることにしましょう．等式表現は最も単純な形式的体系の 1 つですので，道具立ての説明が少なくてすみます．

**苫迦：** はい．Simple is best と言いますからね．

**羅茶：** また，等式表現で用いられる等式論理についても，詳しく話しだすと，ものごとへの「視点」を表すために形式的体系の間の射を使う，という私が申し上げたい話に到達する前にこの連載が終わってしまいそうです．

**苫迦：** それではつまらない．

**羅茶：** 幸い，等式論理については日本語の教科書[3)]や，有名な教科書の，著者による無料版[2)]（海賊版ではありません）もありますし，項書換系の理論などを通じてご存知の方も多いのですから，このへんの解説は教科書にお任せすることにして，我々はいくつか，等式表現の例を作ってみることにしましょう．

**苫迦：** 賛成です．記法の確認にもなりますね．

**羅茶：** まず，単純な例ですが，家族関係と，師弟関係に関する等式表現 Fam と Shitei を**表 -1** に示してみました．

**苫迦：** なるほど．確かに，兄弟とは父を共有するし，伯父の父はすなわち祖父ですね．ふむふむ，もっとも母の兄弟も伯父だったりしますが．

**羅茶：** ここではそもそも母を表す語彙がありません．また兄と弟も区別できません．家族関係といったときに我々が思い浮かべる関係を Fam は十分に (adequately) 表しているとは言えないかもしれません．「ある等式表現が意図どおりにつくられているかどうか」を調べることは妥当性確認 (validation) と呼ばれていますが，この問題には，今は立ち入らないことにしましょう．

**苫迦：** そう言われると不安になってきました．えーと，Fam ではなんだか，father と son がアトミックなものと扱われている感じですね．で，最後の公理が father と son の関係を表していて，

| 等式表現 Mnd = $(\Sigma^M, E^M)$ | | |
|---|---|---|
| 語彙 $\Sigma^M$ | アリティ | 函数記号 |
| | 0 | $\varepsilon$ |
| | 2 | $\bullet$ |
| 公理 $E^M$ | $x \bullet \varepsilon \approx x$ | |
| | $\varepsilon \bullet x \approx x$ | |
| | $(x \bullet y) \bullet z \approx x \bullet (y \bullet z)$ | |

| 等式表現 Grp = $(\Sigma^G, E^G)$ | | |
|---|---|---|
| 語彙 $\Sigma^G$ | アリティ | 函数記号 |
| | 0 | e |
| | 1 | ${}^{-1}$ |
| | 2 | $\circ$ |
| 公理 $E^G$ | $x \circ \mathrm{e} \approx x$ | |
| | $(x \circ y) \circ z \approx x \circ (y \circ z)$ | |
| | $x \circ x^{-1} \approx \mathrm{e}$ | |
| | $x^{-1} \circ x \approx \mathrm{e}$ | |

| 等式表現 Rng = $(\Sigma^R, E^R)$ | | |
|---|---|---|
| 語彙 $\Sigma^R$ | アリティ | 函数記号 |
| | 0 | 0　1 |
| | 1 | $\ominus$ |
| | 2 | $\oplus$　$\otimes$ |
| 公理 $E^R$ | $x \otimes 1 \approx x$ | |
| | $(x \otimes y) \otimes z \approx x \otimes (y \otimes z)$ | |
| | $x \oplus 0 \approx x$ | |
| | $(x \oplus y) \oplus z \approx x \oplus (y \oplus z)$ | |
| | $x \oplus (\ominus x) \approx 0$ | |
| | $x \oplus y \approx y \oplus x$ | |
| | $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ | |
| | $(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z \oplus y \otimes z$ | |

表 -2　単，群，環の等式表現

$$\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{father}(\mathrm{father}(\mathrm{nephew}(x))) \approx \mathrm{father}(x)}\ \text{公理}}{\mathrm{father}(\mathrm{father}(\mathrm{nephew}(\mathrm{father}(x)))) \approx \mathrm{father}(\mathrm{father}(x))}\ \text{代入}, x \leftarrow \mathrm{father}(x)$$

図 -1　証明図の例

他のものはそれぞれ brother, uncle, nephew を father と son の言葉で表現している感じです．

**羅茶**：なるほどねえ．

**苦迦**：あれ，自分で考えておいて呑気なものですね．ほかに例はありませんか．

**羅茶**：単，群や環の等式表現を**表 -2** に示しましょう．

**苦迦**：群や環はともかく，単というのは初めて聞きました．

**羅茶**：英語では monoid と言われることが多いですね．単位元すら持たないものを半群といいますので，「単位元を持つ半群」という言い方もあります．しかし，monoid は mono に接尾辞 -oid をつけた英単語ですから，単という言葉は英語を忠実に翻訳していますね．昔，プログラミングシンポジウムの夕食の席で，monoid の訳語として H 氏が単という言葉を考え出されたと，別の大先輩 H 氏から教えていただきました．

**苦迦**：晩御飯も情報交換に有益というわけですね．ところで，単，群，環とこれらの等式表現はどういう関係にありますか？

**羅茶**：あとで等式表現の「モデル」というものを考えますが，たとえば Mnd のモデルと単が一致するのです．Mnd のモデルは単ですし，なにか 1 つ，単をもってくれば，それは Mnd のモデルになっています．

**苦迦**：なるほど．Grp や Rng も，モデルがそれぞれ群，環と一致する，というわけなのですね．ところで，何か定理はないのですか．

**羅茶**：たとえば，father(father(nephew(father($x$)))) ≈ father(father($x$)) は等式表現 Fam の定理です．

**苦迦**：えーと，父親の甥の祖父は自分の祖父と同じ，というわけですね．

**羅茶**：この等式の証明を表す図式として，**図 -1** のようなものをよく用います．証明図と呼びます．

**苦迦**：おお，証明は日本語で書くものと思っていましたが，こういう図式にすると，証明を一種のデータとして扱うことができそうですね．

**羅茶**：はい．証明などの議論，さらにはその議論の枠組みをデータとして扱うことが等式表現をは

| | Fam のモデル Fam$^{サザエ}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | uncle | brother | father | nephew | son |
| 波平 | – | – | – | ノリスケ | マスオ |
| フネ | – | – | – | ノリスケ | マスオ |
| サザエ | – | カツオ | 波平 | – | タラ |
| マスオ | – | カツオ | 波平 | – | タラ |
| カツオ | – | マスオ | 波平 | イクラ | タラ |
| ワカメ | – | マスオ | 波平 | イクラ | タラ |
| タラ | カツオ | – | マスオ | – | – |
| ノリスケ | 波平 | – | – | – | イクラ |
| タイ子 | 波平 | – | – | – | イクラ |
| イクラ | – | – | ノリスケ | – | – |
| – | – | – | – | – | – |

| Shitei のモデル Shitei$^{落語}$ | | |
|---|---|---|
| | 師匠 | 弟子 |
| 松鶴 | – | 鶴瓶 |
| 鶴瓶 | 松鶴 | 笑瓶 |
| 笑瓶 | 鶴瓶 | – |
| 米朝 | – | 枝雀 |
| 枝雀 | 米朝 | 南光 |
| 南光 | 枝雀 | – |

表 -3　Fam のモデル Fam$^{サザエ}$

じめとする形式的体系のアプローチの大切な目的の１つです．証明図は，すでに定理と分かっているもの，あるいは公理など，すでに得られているものをいくつか前提として，新しい等式を帰結として導き出す，という，推論規則の適用を繰り返した形をしています．公理から始めて一定の推論規則を繰り返し適用して導出される等式を定理と言います．

**苦迦：**定理の導出の様子を表しているのが証明図ですね．

**羅茶：**そうです．ちなみに，ここで定理といっているものは，公理から導出できる，つまり証明できるというだけで，正しいか正しくないか，とは無関係であることに注意してください．

### ❑ モデル

**苦迦：**定理は証明したものなのだから，正しくて当たり前，と何となく思っていましたが，式の証明とは別に真偽を議論するのですか？

**羅茶：**おっと，もちろんそうです．導出できること (derivability) と，正しいこと (validity) を分けて比べるのが，現代論理学の基本です．

**苦迦：**すると，正しい前提に推論規則を適用したからといって，それが導き出す帰結も正しいとは限らない，ということになりますか．これは大変．もっとも，公理といっても，単にいくつかの等式を公理と呼ぶ，というだけのことなのですから，正しいとは限らないのは当たり前か．

**羅茶：**そのとおりです．等式の真偽についても，詳しくは説明しませんが，真偽を議論するためには，モデルというものを考える必要がある，ということは，後の話のために必要です．

**苦迦：**なるほど．すると，ここでも，いくつかモデルの例と，何かの等式がそのモデルにおいて正しい，とか，単に正しい，といったことの例を作ってみましょうよ．

**羅茶：**それはいい考えですね．等式表現のモデルは，代数と呼ばれます．Fam 代数の例として，サザエさんの家族 Fam$^{サザエ}$を，Shitei 代数の例として落語家の師弟関係 Shitei$^{落語}$を**表 -3** に示してみました．たとえば Fam$^{サザエ}$では，台集合として{ 波平 , フネ , サザエ , マスオ , カツオ , ワカメ , タラ , ノリスケ , タイ子 , イクラ , ー}を考えます．ここで，ーと書くのは，つじつま合わせのために用いる架空の人物です．たとえばタラには兄弟がいませんから，そういう場合には brother（タラ）の値をーにしておくのです．

**苦迦：**なるほど，うーんやはり「ー」が気になりますね．

**羅茶：**ーのような余計な要素を設ける代わりに，写像ではなく部分写像，つまり値が定義されない場合もあるような写像でモデルを作ることも考え

| Mon 代数 $\mathbb{N}^+$ | | Mon 代数 $\mathbb{Z}^\times$ | | Grp 代数 $\mathbb{Z}^+$ | | Rng 代数 $\mathbb{Z}^{+\times}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 台集合 | $\mathbb{N}$ | 台集合 | $\mathbb{Z}$ | 台集合 | $\mathbb{Z}$ | 台集合 | $\mathbb{Z}$ |
| $\varepsilon$ | 0 | $\varepsilon$ | 1 | e | 0 | 0 | 0 |
| $\bullet$ | $(x,y)\longmapsto x+y$ | $\bullet$ | $(x,y)\longmapsto x\times y$ | $(-)^{-1}$ | $x\longmapsto -x$ | 1 | 1 |
| | | | | $\circ$ | $(x,y)\longmapsto x+y$ | $\ominus$ | $x\longmapsto -x$ |
| | | | | | | $\oplus$ | $(x,y)\longmapsto x+y$ |
| | | | | | | $\otimes$ | $(x,y)\longmapsto x\times y$ |

表 -4　Mon, Grp, Rng のモデル（代数）

られますが，等式表現のモデルは写像によって作らないといろいろほかで問題が生じます．

**苦迦**：全部を一につぶしたので，father ( 波平 ) ≈ father ( タイ子 ) のような，成り立ってほしくない等式も成り立ってしまっていますね．一のほかにもいろいろ気になることがあります．たとえば，演算結果の一意性です．Fam$^{サザエ}$ でも Shitei$^{落語}$ でも，各演算の値になるべきものが 1 つしかなかったのでよかったのですが，たとえば Shitei$^{落語}$ の台集合に仁鶴も含めると，弟子 (松鶴) の値を仁鶴にしていいのか鶴瓶にしていいのか分からなくなります．

**羅茶**：たしかに，いろいろ不満足なところがありますね．よい例ではなかったかな……

**苦迦**：まあしかし，家族や師弟関係のことならイメージしやすいし，そもそも，現実は数学的な道具立ての都合には，なかなか合ってくれないものだということを表すためにはよい例かもしれませんよ．

**羅茶**：なんだか慰められてしまいましたね…… 単や群，環には**表 -4** のようなモデルがあります．

## 形式的体系の射

### ❏ 集合かモデルか

**苦迦**：ところで，形式的体系によって，情報処理への視点を表す，ということだったのですけれど，その辺をもう少し説明してください．

**羅茶**：たとえば，整数全体の集まり $\mathbb{Z}$ を考えてみましょう．整数だけを考えるのではなく，加算や乗算など，整数の上の演算，操作などについて記述したいわけです．

**苦迦**：もちろん．

**羅茶**：さて，今，A さん，B さん 2 人の人がいてそれぞれ違う「視点」を持っていることにします．

**苦迦**：ここでの視点とは，どういうものでしょうか．

**羅茶**：今回のはじめに話したように，視点は，語彙と常識によって決まると考えられます．等式表現の語彙と公理が，それぞれ視点の語彙と常識に対応すると考えたいのです．

**苦迦**：なるほど．

**羅茶**：この場合は，整数やその上の演算についての語彙や常識が視点になる，と考えます．情報の処理を演算によって表しているつもりです．

**苦迦**：情報の処理は加減乗除よりはもっと複雑な過程でしょうが，まあ，感じは分かります．

**羅茶**：そこで，たとえば，A さんは，加算にも乗算にも，また，反数というか，つまり $x$ に対して $-x$ をとる演算も考える，ごく普通の視点を整数に対して持っているのですが，B さんは乗算しか見ず，加算はまったく使わないという，変わった視点を持っているとしましょう．

**苦迦**：情報処理過程が人によって違うというわけですね．大いに結構です．ところでこの場合，A さんが見ているものは B さんが見ているものを全部含んでいますね．そうでない例として，整数の上の加算を見る C さんも考えてみませんか．そうすると，B さんと C さんは，同じ整数というものを見ています．しかし，乗算は B さんが

見ているのにCさんが見ていません．また，加算は逆にCさんが見ているのにBさんが見ていません．

**羅茶**：結構ですね．ここで，Aさんは単なる集合$\mathbb{Z}$を相手にしているのではなく，環$(\mathbb{Z}, 0, 1, -, +, \times)$，言い換えればRng代数$\mathbb{Z}^{+\times}$を問題にしているのだと考えられます．いっぽうBさんは単$(\mathbb{Z}, 1, \times)$，つまりMnd代数$\mathbb{Z}^{\times}$を見ているわけです．また，Cさんは群$(\mathbb{Z}, 0, -, +)$を問題にしている，と言うことができますね．

**苦迦**：Cさんが加算の交換法則も問題にしているのであれば，見ているのは単なる群ではなく可換群だ，ということになるのかな．いずれにしろ，環とか単とかいう言葉がでてくるのは，+その他の演算だけではなく，操作が満たしている公理も問題にしているからですね．

**羅茶**：そのとおりです．一見，3人とも同じ集合$\mathbb{Z}$を対象にしているように見えますが，実はそうではなくて，別のものを見ているのであって，たまたま両者の台集合が一致している，というように考えるべきだと思うのです．

**苦迦**：なるほど，集合ではなく，モデルを見ていると考えるわけですね．モデルを云々するには，まずどの等式表現のモデルかを明確にしなければならないわけですが，Aさん，Bさん，Cさんではそれが違っていたわけだ．

**羅茶**：そうです．

**苦迦**：羅茶さんのおっしゃるように考えると，3人が見ているところのどこが違うのか，がはっきりしますね．

**羅茶**：はい．しかも，それらが「違う」ということをいうためには，どこかに共通の基盤がないとどうしようもないわけですが……

**苦迦**：確かに，北極海でアザラシを撃って暮らしているイヌイットと，チベット高原に出没する山賊とが，生業の話をしようとすると大変かもしれない．

**羅茶**：そのときに，お互いの常識，前提が違うよね，という話をするための基盤が，たとえば等式表現のような形式的体系の一般論ということになるわけです．

**苦迦**：違うということを議論するには，共通の拠りどころがいるわけだ．

**羅茶**：前回に議論したように，我々はデータやその上の演算などモノを扱うだけではなく，それらが満足している性質，命題をも扱うことにしているのでした．モノと命題の両方の記述を考えるために，形式的体系というものを持ち出し，その例として等式表現を考えています．

**苦迦**：形式的体系にすること，つまり形式化は，記述できるような形で考える，ということでもあるわけですね．

**羅茶**：はい．

**苦迦**：そこで，我々の言う「視点」は，たとえば等式表現のような形式的体系によって表されるというわけですか．

**羅茶**：そう考えてみたいのです．ある視点でモノを見るというのは，ある形式的体系におけるモデルを取り扱う，ということに相当するのではないでしょうか．つまり，Aさんは$\mathbb{Z}$を等式表現Rngの視点から，Bさんは等式表現Mndの視点から，それぞれ見ている，とみなすのです．

**苦迦**：すると，ある視点からの考えや推論は，その視点を表す形式的体系における式や証明図によって表現することができる，という筋書きですね．

**羅茶**：そのとおりです．

### ❑ 視点の間のコミュニケーションと形式的体系の間の射

**苦迦**：しかし，これでは別の視点を持った人とコミュニケーションできないかもしれません．語彙が同じならまだ何とかなるかもしれませんが，視点が異なると語彙も異なるかもしれませんから．

**羅茶**：はい．そこで，視点を異とするものの間でのコミュニケーションを表現するために，等式表現の間の写し方，あるいはマップとでもいうべきものを考えます．あとで射とか準同型と呼ぶことになりますけれど．

苦迦：なるほど．どのようなものですか．

羅茶：一般論を始めると大げさになるので，たとえば，等式表現 Mnd から Rng へのマップを考えてみましょう．

苦迦：そのようなものがあると Rng のモデルを見ている A さんと，Mnd のモデルを見ている B さんが，互いの対象物についての議論ができそうですね．

羅茶：Mnd から Rng へのマップは，Mnd の各函数記号を，Rng の函数記号に写す対応です．もちろん，写す先の函数記号のアリティは同じでなければなりません．このような函数記号の写し方，対応を Mnd から Rng への射ということにしましょう．たとえば，$\varepsilon$ を 1 に，$\bullet$ を $\times$ に写すわけです．

苦迦：変数を動かさないことにすれば，函数記号の行き先を決めることによって，Mnd のあらゆる項の行き先，つまり Mnd の項が Rng のどんな項に写されるのかが帰納的に決まってしまいますね．

羅茶：はい，それが重要なところです．ところで実は，Mnd の函数記号が写される先は，Rng の語彙に与えられている函数記号に限定されず，Rng の「一般化された函数記号」でよいのです．

苦迦：一般化された函数記号とは？

羅茶：それを説明する前にまず，語彙で与えられている函数記号の役割を考えてみましょう．

苦迦：すでに構成された項から新たな項を作り出すという役割がありますね．

羅茶：そのとおりです．アリティが $n$ の函数記号は，$n$ 個の項から新たな項を作り出します．たとえば $+$ はアリティが 2 ですが，これは $u, v$ 2 つの項から $u+v$ という新たな項を作り出すものです．

苦迦：アリティが $n$ の函数記号は，$n$ 個の項を項に写す写像を導き出しますね．

羅茶：はい．そこに注目すると，何も函数記号だけではなく，一般の項も同様の役割を果たすことができることに気づきます．$p$ 個の変数が出現している項は，$p$ 個の項を項に写す写像だとみなすことができます．

苦迦：なるほど，たとえば $x+2\times y$ には 2 つの変数 $x, y$ が出現しているから，2 つの項 $u, v$ を $u+2\times v$ に写す写像だとみなすことができる，というわけですね．

羅茶：はい．ですから，$x+2\times y$ はあたかもアリティが 2 である函数記号と同じように扱えるというわけです．

苦迦：ふむふむ，写す先が項であっても，「Mnd の各項が Rng のどんな項に写されるのかが帰納的に決まってしまう」ということがやはり言えますね．あれ，まてよ，この項をアリティが 3 の函数記号とみなすこともできますよ．$x+2\times y$ には $x$ と $y$ が出現しているだけではなくて，変数 $z$ も出現している，しかしたまたま，その出現が空であるのだと考えるのです．

羅茶：まったくそのとおり．ですから $x+2\times y$ によって，3 つの項 $u, v, w$ を $u+2\times v$ に写す写像を表す，と考えてもまったく問題ありません．写した先で $w$ が消えてしまうだけの話です．一般に $p$ 個の変数が出現している項は $p$ 以上の数 $q$ について，アリティ $q$ の函数記号とみなすことができます．ですから，項だけではなく，アリティも合わせて考えたものを一般化された函数記号と呼ぶことにします．

苦迦：すると，Mnd から Rng への射は，Mnd の各函数記号，つまり $\varepsilon$ と $\bullet$ を Rng の一般化された函数記号に写すものであればなんでもよいのですか．

羅茶：いいえ．条件があります．公理もちゃんと写されなければなりません．

苦迦：というと，どういうことになるのかな……

羅茶：たとえば $(x\bullet y)\bullet z \approx x\bullet(y\bullet z)$ のような Mnd の公理は，先ほどの対応によって，Rng の等式 $(x\otimes y)\otimes z \approx x\otimes(y\otimes z)$ に写りますが，これが Rng において公理から推論規則によって導出される等式，つまり定理にならなければならないのです．

苦迦：なるほど，もっともな要請ですね．Mnd の公理が Rng において定理かどうかを判定できるのも，先ほど申し上げたように，Mnd の各項が

| Mnd から Rng への射 $\tau^{\times}$ | |
|---|---|
| Mnd | Rng |
| $\varepsilon$ | 1 |
| $\bullet$ | $\otimes$ |

| Mnd から Rng への射 $\tau^{+}$ | |
|---|---|
| Mnd | Rng |
| $\varepsilon$ | 0 |
| $\bullet$ | $\oplus$ |

| Grp から Rng への射 $\tau^{+-}$ | |
|---|---|
| Grp | Rng |
| e | 0 |
| $^{-1}$ | $\ominus$ |
| $\circ$ | $\oplus$ |

**表 -5　Mnd から Rng への射の例**

Rng のどんな項に写されるのかが全部決まってしまうからですね．

**羅茶**：はい．この場合はたまたま，写される先が Rng の公理でもありますから，この条件が満たされていることは明白です．

**苦迦**：確かにその通りです．すると，**表 -5** の $\tau^{\times}$ のような射を定めることができますね．

**羅茶**：はい．もちろん Mnd から Rng への射はこれだけではなく，加算に注目する $\tau^{+}$ のようなものもあります．しかし，加算に注目するのなら，Grp から Rng への射 $\tau^{+-}$ を考えることもできます．+ は可換でもあることが要求されているのですから，さらに可換群の等式表現から Rng への射を考えることもできます．

**苦迦**：しかしまてよ，射の出元で成り立つことが全部，行き先でも成り立ってほしいとは限らないのではありませんか．つまり一部分だけが行き先で成り立ってくれればいいというような場合です．システムの受発注で，受注者が，発注者の視点をすべて含むような視点を持つことはまずありませんから．

**羅茶**：そうですね．代数の例を使うために，環から減算とそれに関連する公理を抜いた SRng を考えましょう．いわゆる半環というものです．Grp から SRng への射は存在しません．Grp の二項演算を SRng の加算に写したとしても，SRng の加算は逆元を持ちませんから．

**苦迦**：そうですよね．でも，Grp のほとんどのことは SRng でも解釈できるので，その辺をなんとかできないのでしょうか．

**羅茶**：形式的体系をシステムの関係者の視点の表現のために用いようとする場合は，そのようなことが，しょっちゅう起こりそうですね．このような場合には，仲介の等式表現を用意して，そこから出る両者への射を考えることができます．この場合だと，Mnd を仲介にすることができますね．**図 -2** を見てください．このようなパターンをスパンと呼んでいます．ほかにも，等式表現とその間の射からなるパターンがいろいろあって，たとえば互いに衝突する視点の間でのネゴシエーションや，補完，相互理解などのモデルを作れるのではないかと考えています．

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Mnd} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Grp} & & \mathrm{Rng} \end{tikzcd}$$

**図 -2　射のスパン**

**苦迦**：なるほど．ところで，函数記号を，真に一般的な函数記号に写すような例は，具体的に何かありますか？

**羅茶**：ブール環とブール代数の間の同型が有名です．積が冪等 (idempotent, $x \times x \approx x$) であるような環をブール環といいます．ブール代数はご承知の通りのものです．これらの等式表現 BRng, BAlg をどのように構成すべきかは明らかでしょう．このとき，BRng から BAlg への射を**表 -6** のように定めると，BRng のすべての公理が BAlg の定理に写ることを確かめることができます．逆に BAlg から BRng への射も表 -6 のようにして定めることができます．これらの射の行き先は，真に一般

| BRng から BAlg への射の例 | |
|---|---|
| BRng | BAlg |
| 0 | ff |
| 1 | tt |
| $\ominus x$ | $x$ |
| $x \otimes y$ | $x \wedge y$ |
| $x \oplus y$ | $(\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ |

| BAlg から BRng への射の例 | |
|---|---|
| BAlg | BRng |
| ff | 0 |
| tt | 1 |
| $x \wedge y$ | $x \otimes y$ |
| $x \vee y$ | $x \oplus y \oplus x \otimes y$ |
| $\neg x$ | $1 \oplus x$ |

表-6　ブール環とブール代数の間の同型

的な函数記号になっていますよね．実は，これらはちゃんとした意味で「同型」であることまで分かります．

**苦迦**：これはちょっと複雑で面白いですね．

**羅茶**：+ を単純に∨に写してしまうと，ブール環の公理の 1 つ $x+(-x) \approx 0$ をブール代数に写した $x \vee -x \approx \mathrm{ff}$ が，行き先のブール代数で証明できなくなってしまいます．ブール代数では $x \vee -x \approx \mathrm{tt}$ が証明できますから，もし $x \vee -x \approx \mathrm{ff}$ も証明できてしまうと，$\mathrm{tt} \approx \mathrm{ff}$ が証明できてしまいます．

**苦迦**：なるほど．ところで，先ほどは函数記号を一般化された函数記号に写すのが等式表現の射だ，ということでしたが，いつのまにか，$x \wedge y$ のような項を写すことになっていませんか．

**羅茶**：はい，さすがに苦迦さんの感覚は鋭いですね．まあ，意味は分かっていただけていると思いますが，確かに，この辺の議論，構文的にいろいろ曖昧なところがあることは認めざるを得ません．いまのお話だけでなく，必要に応じて，系統的な変数名の付け替え，いわゆる $\alpha$ 変換を施さなければなりません．

**苦迦**：そうでしょうね．しかし，この $\alpha$ 変換というやつ，厄介なのですよね．これが不要になるような工夫はないものでしょうか．

**羅茶**：計算機科学では De Bruijn index[1) ] が有名ですが，それとは別に，Lawvere theory というものがあります[3)]．詳細にまで立ち入っている余裕はありませんが，文字列に基づかずに圏論の考えを用いて形式的体系を表すアプローチです．

## ❏ 形式的体系の射が導くモデルの圏の間の函手

**羅茶**：ところで，たとえば $\tau^{\times}$ のような Mnd から Rng への射によって Mnd の公理を Rng で解釈したものがすべて定理であることを，射の性質として要請しました．これを使って，Rng 代数を Mnd 代数に写すことができます．

**苦迦**：あれ，等式表現の射は Mnd から Rng へ向いていたのに，モデルは逆向きに写されるのですか．

**羅茶**：そうです．実はこの写し方は Rng 代数の圏から Mnd 代数の圏への函手になっています．つまり代数だけでなく準同型もちゃんと写されるのです．この函手を $(\tau^{\times})^{*}$ と記しましょう．**図-3** を見てください．環 $(\mathbb{Z}, 0, 1, -, +, \times)$ は，加算に関する単とみなすことも，乗算に関する単とみなすこともできます．このことは，$\tau^{+}$ が引き起こす函手によって，Rng 代数 $(\mathbb{Z}, 0, 1, -, +, \times)$ が Mnd 代数 $(\mathbb{Z}, 0, +)$ に写ったり，$\tau^{\times}$ が引き起こす函手によって Rng 代数 $(\mathbb{Z}, 0, 1, -, +, \times)$ Mnd 代数 $(\mathbb{Z}, 1, \times)$ に写ったりすること，と考えることができます．

**苦迦**：なるほど，函数記号を写すだけだった等式表現の射 $\tau^{\times}$ が，代数全体がなす圏の間の対応を引き起こすわけですね．

**羅茶**：実は，この話には，まだ続きがあります．この函手 $(\tau^{\times})^{*}$ が左随伴を持つのです．

**苦迦**：ちんぷんかんぷんになってきました．

**羅茶**：圏論を知っている人であれば，左随伴というだけで，たくさんの事実を自分で引き出してく

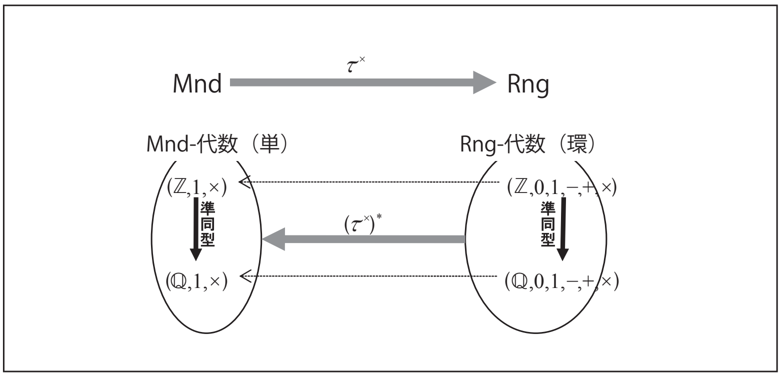



図-3　等式表現の射が引き起こす函手

れるのですが，とりあえず，1つだけお話しておきましょう．Mndから Rngへの射をつくれたのは，直感的には Rngが持つ構造のほうが Mndの構造よりも豊かだからですよね．

**苦迦**：たしかに，Rngのほうが函数記号も多い……

**羅茶**：だから，Mnd代数，つまり単が1つ与えられれば，それを最低限必要なだけ拡張して Rng代数，つまり環に拡張することができても不思議はありません．

**苦迦**：自由環の生成と似たようなことですね．自由環は演算も公理も一切仮定しない集合に対して，必要最小限の拡張をして生成するのだけれど，この場合は単からはじめて生成することを問題にするわけだ．

**羅茶**：そのとおりです．で，左随伴を持つ，というのは，そのような単から環への最低限の拡張が，確かに可能である，ということを言っているのです．

**苦迦**：ははあ．

**羅茶**：さらに，そのような拡張が同型を除いて一意であること，そのほかいろいろな事実が，左随伴というキーワードから出てきます．ですから左随伴を持つ，というのは大きな定理です．

**苦迦**：なるほど．

**羅茶**：このあたりの理論は Lawvere[4]の研究によって開拓されました．

## まとめ

**苦迦**：ところで，視点が異なる人の間のコミュニケーションを，等式表現の間の射によって表現する，とのことでした．今うかがったような代数の圏の間の函手や左随伴といったことは，記述の科学にとってどんな意義があるでしょう？

**羅茶**：おっと，大上段にふりかぶった質問ですね．こういう疑問に答えるのが一番難しい．

**苦迦**：そこをなんとか．

**羅茶**：まず，等式表現の間の射が語彙や常識のマップになっている，というのはすぐに納得してもらえると思います．

**苦迦**：はい．

**羅茶**：等式表現は記述の枠組みです．記述のための構文と意味を規定しています．

**苦迦**：はい，公理と推論規則に基づいて証明図を描く，などは構文の世界で，モデル，この場合は代数ですが，これを考えて正しさを議論する，というのが意味の世界という感じですね．

**羅茶**：はい．等式表現の間の射 $\tau^{\times}$ は，記述の枠組みの間のマップですが，これがモデル，つまり記述の対象となるものの間のマップ $(\tau^{\times})^{*}$ とどのように関係しているかを議論しました．記述の枠組みの間のマップから，記述の対象の間の逆向きのマップが自動的に導かれるわけです．さらに，記述の枠組みの間のマップと同じ向きに，記述の対象を標準的に拡張するマップがある，ということ

を言っているのが左随伴の話です．

**苦迦**：ふーむ，なるほど．まだまだ数学の話が奥深そうですが，記述の分析に使えそうですか．

**羅茶**：私は，そのように考えています．今回，まさにそのことをお話したかったのです．つまり，形式的体系についての数学の一般論があって，それが記述を分析するための道具として大いに用いることができそうだ，ということです．具体的な形式的体系にはいろいろあるのですが，等式表現を例にとってお話しました．しかし，この数学的な道具立てを用いて，実際にどの程度，記述の分析ができるのかは，これから研究していかなければなりません．

**苦迦**：なるほど．今後の話ですね．等式表現は代数学からの例が豊富でよかったのですが，Fam や Shitei などでは，必ずしも自然な記述ができませんでしたね．

**羅茶**：はい．等式表現の代わりに一階の体系，つまり我々に馴染みの深い一階述語論理に基づく形式的体系であれば，もっと身近な例も自然に書けるのですが，今度は道具立ての説明が大変だったでしょうね．ともあれ，そのような記述の分析についての議論は，今回だけでひとまず区切りをつけて，次回は記述の構成について考えてみたく思います．

**苦迦**：分析から構成へ，というわけですか．

**羅茶**：つまり，現実の世界をうまく表す形式的体系をどのようにして構成するのか．また，構成した形式的体系が意図通りのものであるかどうかの妥当性をどのようにして確認するのか．さらには，アブダクションをどのように行っていくか，といった問題もあります．記述の構成に関するこういった課題解決のために，たとえばオントロジー工学と最近呼ばれているものは，どのように使えるでしょうか．有名な KJ 法なども，大きなヒントを与えてくれると思います．次回はこういったことを考えてみましょう．

**苦迦**：楽しみにしています．


**参考文献**

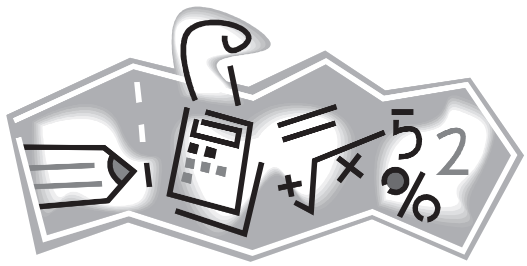
1）De Bruijn, N. G. : Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies : A Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem, Indagationes Mathematicae (Elsevier) 34 : 381–392. ISSN 0019-3577 (1972). http://alexandria.tue.nl/repository/freearticles/597619.pdf.

2）Burris, S. N. and Sankappanavar, H. P. : A Course in Universal Algebra, The Millennium Edition, http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html

3）井田哲雄：計算モデルの基礎理論，岩波講座ソフトウェア科学，ISBN-13 : 978-4000103527 (1991).

4）Lawvere, F. W. : Functorial Semantics of Algebraic Theories, Ph.D. Thesis, Columbia University (1963). Republished in Reprints in Theory and Applications of Categories, No.5, pp.1-121(2004) . http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/5/tr5abs.html.


（平成 22 年 8 月 2 日受付）





**木下佳樹**（正会員）
yoshiki@m.aist.go.jp

平成元年東京大学大学院理学系研究科博士課程情報科学専攻修了．理学博士（情報科学）．テキサスインスツルメンツ，産業技術総合研究所システム検証研究センター長等を経て現在，同組込みシステム技術連携研究体主幹研究員．

**高井利憲**（正会員）
t-takai@aist.go.jp

平成 13 年奈良先端科学技術大学院大学博士後期課程単位取得認定退学．博士（工学）．科学技術振興機構 CREST 研究員等を経て現在，産業技術総合研究所組込みシステム技術連携研究体研究員．