

## 手術シミュレータにおける臓器変形手法の向上

乾谷 徹<sup>†1,†2</sup> 緒方 正人<sup>†1,†2</sup> 長坂 学<sup>†1,†2</sup>  
榎山 和秀<sup>†2</sup> 窪田 吉信<sup>†2</sup>

筆者らが開発中の患者固有臓器モデルを扱う手術シミュレータでは、変形モデルとして有限要素法を用いている。実時間性が重要となるため、線形有限要素法が適しているが、姿勢回転を伴う大変形では体積増加の問題が生じる。このため、緻密な操作を要求する手術シミュレータには適さない。我々は、Co-Rotated FEM を実時間処理システムに実装し、実時間性を維持しつつこの問題を解決した。本報告では、この開発技術について報告する。

### Improvement of Deformation Model for Real-Time Surgical Simulator

TORU INUIYA<sup>†1,†2</sup> MASATO OGATA<sup>†1,†2</sup>  
MANABU NAGASAKA<sup>†1,†2</sup> KAZUHIDE MAKIYAMA<sup>†2</sup>  
and YOSHINOBU KUBOTA<sup>†2</sup>

We have been studying linear FEM as deformation model for our surgical simulator, because of its severe time-critical request. However it is not suitable for large rotational deformations, because of its violation of rotational invariance. For high fidelity simulation of large deformation, many non-linear FEM and its kinds have been proposed, such as Mooney-Rivlin and Co-Rotated FEM. We concluded that the Co-Rotated FEM is the best for our simulator, with reasonable computational cost and its life-size precision. In this paper, we report the real-time implementation of the method for large deformations.

†1 三菱プレジジョン (株)  
Mitsubishi Precision Co., Ltd.  
†2 横浜市立大学  
Yokohama City University

## 1. はじめに

筆者らは、現在、CT データを基本とした患者固有の臓器モデルを用いたミッションリハーサル型手術シミュレータを開発している。その中で、臓器の変形挙動は特に重要である。開発中のシミュレータでは、計算精度、安定性、また患者毎に異なる臓器モデルに対する適応性の高さから、変形計算モデルに有限要素法を用いている。また、手術シミュレータではその実時間性が重要であることから、線形有限要素法（線形 FEM）を実装した。しかし、線形 FEM は、回転を含む大変形時に体積が増加する問題が知られている<sup>1)</sup>。我々のシミュレータにおいても、術中重要な血管操作の模擬などにおいて、この現象が再現され大きな問題となった。

このような線形 FEM の問題は、線形化に伴う微小変形仮定に起因する。したがって、非線形計算モデルを適用すれば問題は生じない。非線形モデルには、非線形 FEM<sup>2)</sup> や Mooney-Rivlin 体<sup>3)</sup> などがある。しかし、非線形計算は実時間性の観点から手術シミュレータに適用することは難しい。線形計算のまま、この体積増加の問題を回避する手法として、Co-Rotated FEM が提案されている<sup>4)</sup>。線形 FEM の問題は、歪テンソルの回転不変性の破れによるものであることが知られている。Co-Rotated FEM は、あらかじめ回転をキャンセルした歪テンソルを定義することで、擬似的に回転不変性を持たせる手法である。

本報告では、この Co-Rotated FEM を新しい手術シミュレータの変形モデルの候補とし、その評価・実装した結果について述べる。2 章では、線形 FEM の問題を回転不変性の破れの観点から述べる。3 章では、Co-Rotated FEM について述べ、非線形 FEM との相違についても説明する。4 章では、手術シミュレータへの実装に関する説明をする。ここでは、特にシステムへの実装上で問題になると想定される鏡像変形の問題についても言及する。5 章では、Co-Rotated FEM の性能評価の為に小規模システムで行った、線形 FEM、幾何的非線形 FEM、Mooney-Rivlin 体との比較実験の結果を述べる。6 章では、実際に手術シミュレータに実装した結果を説明し、7 章において本報告をまとめる。

## 2. 線形有限要素法の問題点

実時間シミュレーションを想定した場合、変形計算モデルとして一般に線形 FEM が用いられる。線形 FEM は、微小変形を仮定することで歪テンソルを線形近似し、処理時間コストの大幅な削減を実現している。しかし、回転を含む大変形においては、非現実的な体積増加を生じる問題が知られている。この問題は、線形化によって歪テンソルの回転不変性が破

れることに原因がある<sup>5)</sup>。そのため、回転成分を含む大変形時には、偽の方向性を持った弾性エネルギーが発生し、体積が増加するのである。ここでは、非線形および線形の歪テンソルと、その回転不変性について述べる。

### 2.1 歪テンソルの回転不変性とその破れ

変形における変位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とすると、非線形の Green-Lagrange 歪テンソル  $\mathbf{E}$  は以下で定義される。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}) \quad (1)$$

線形 FEM では微小変形を仮定し、以下の様な線形近似した微小歪テンソルを用いる。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \quad (2)$$

ここで、変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  と変位の関係は次式の通りである。

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (3)$$

変形勾配テンソルは極分解によって、回転テンソル  $\mathbf{R}$  と、ストレッチテンソル  $\mathbf{S}$  に一意に分解することができる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{S} \quad (4)$$

このとき、各歪テンソルについて考える。まず、式 (1) および式 (3) から Green-Lagrange 歪テンソルは次のようになる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^\top \mathbf{S} - \mathbf{I}) \quad (5)$$

一方で、式 (2) から微小歪テンソルは以下となる。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^\top) - \mathbf{I} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}\mathbf{S} + \mathbf{S}^\top \mathbf{R}^\top) - \mathbf{I} \quad (6)$$

式 (5) から、Green-Lagrange 歪テンソルは、回転に依存しない (回転不変性を持つ) ことがわかる。つまり、純粋な剛体回転 ( $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ) においては、何ら応力を発生しない。一方で、式 (6) から、微小歪テンソルは、回転テンソルに依存することがわかる。これが、線形近似によって生じる回転不変性の破れである。

回転不変性が破れると、本来応力の発生しない剛体回転においても、内部応力が発生する。微小歪テンソルを用いる線形 FEM における体積増加の問題は、この回転による偽の内部応力の発生に原因があるのである。特に大変形時には、必然的に大きな回転を伴うことが多く、この問題が顕著に表れるのである。

## 3. Co-Rotated FEM

前述の通り、線形 FEM において用いられる微小歪テンソルは回転不変性の破れが生じており、これが体積膨張の原因となっている。Co-Rotated FEM は、Müller らによって提案された、線形計算スキームのまま、この問題に対応する手法である。この手法は、変形における回転成分をあらかじめキャンセルすることで、この回転不変性の破れに起因する問題を回避する。以下で、この手法の理論の概要について述べる。

### 3.1 理論

変形において生じる歪は、回転テンソルの影響は受けけないことは明らかである。しかし、線形 FEM で用いられる微小歪テンソルでは、回転の影響によって偽の応力が発生する。逆に、回転成分を全く含まない変形の場合であれば、(その線形性は別として) 微小歪テンソルの回転不変性の破れの問題は生じない。Co-Rotated FEM はこの点に着目し、あらかじめ変形勾配テンソルから回転成分を除去し、ストレッチテンソルだけから歪を定義する手法である。

式 (4) において、あらかじめ回転をキャンセルした変形勾配テンソル  $\mathbf{F}_c$  を考える。

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{S} \quad (7)$$

このときの微小歪テンソルは以下の通りとなる。

$$\boldsymbol{\epsilon}_c = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_c^\top) - \mathbf{I} = \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^\top) - \mathbf{I} = \mathbf{S} - \mathbf{I} \quad (8)$$

この回転をキャンセルした微小歪テンソルは、ストレッチ成分のみで定義されるため、回転不変性を有することは明らかである。したがって、Co-Rotated FEM では、線形 FEM で生じた回転不変性の破れによる体積増加の問題が回避される。

### 3.2 非線形 FEM との相違

Co-Rotated FEM は、回転不変性に起因する問題を回避しているが、線形近似そのものによる影響は残っている。したがって、歪テンソルの非線形項の影響が大きく現れるような大変形では、非線形の変形計算モデルとは異なる挙動を示す。

Co-Rotated FEM における歪テンソルと、非線形の Green-Lagrange 歪テンソルとの差異は以下の通りである。

$$\|\mathbf{E} - \boldsymbol{\epsilon}_c\| = \left\| \frac{1}{2} (\mathbf{S}^\top \mathbf{S} - \mathbf{I}) - \frac{1}{2} (\mathbf{S} + \mathbf{S}^\top - 2\mathbf{I}) \right\| = \frac{1}{2} (\mathbf{S} - \mathbf{I})^\top (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \quad (9)$$

これは、線形近似によって除かれた 2 次の項に対応し、変位方向に沿った歪のみを考えた

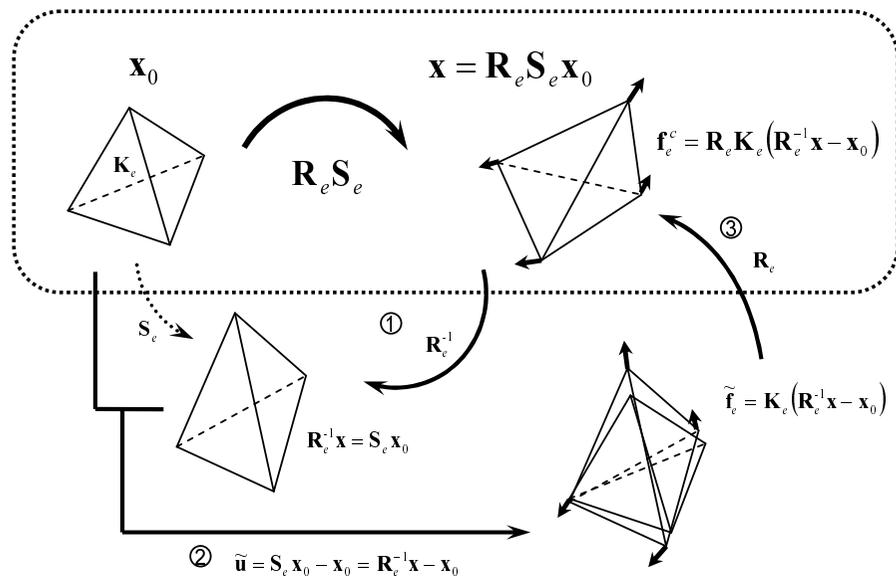


図 1 Co-Rotated FEM: (1) 変形後の要素から回転成分を除き、変形前とローカルの座標系を一致させる。(2) 一致させたローカル座標で応力を計算する。(3) 求めた応力ベクトルは変形前のローカル座標なので、変形後のローカル座標方向に回転させる。

場合には、Co-Rotated FEM は線形 FEM と同じ挙動を示すことを意味する。したがって、例えば 1 自由度の歪-応力特性では、線形 FEM のそれと同じ直線を描くこととなる。ただし、線形 FEM では回転不変性の破れによって、変位方向以外にも偽の歪を生じるため、多自由度の試験では両者の挙動は異なる。

#### 4. Co-Rotated FEM の実装

ここでは、Co-Rotated FEM の実装に関して、処理の流れを説明する。各四面体要素における応力は、図 1 の通りに算出する。

まず、変形後の要素から回転成分を除き、変形前とローカルの座標系を一致させる。このときの変位は以下のとおりである。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (10)$$

続いて、一致させたローカル座標で応力を計算する。

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = \mathbf{K}_e \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_e (\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (11)$$

ここで求めた応力ベクトルは変形前のローカル座標なので、変形後のローカル座標方向に回転させる必要がある。最終的な応力は以下のようなになる。

$$\mathbf{f}_e^c = \mathbf{R}_e \mathbf{K}_e (\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12)$$

以上を各要素に関して行うことで、各要素で発生する応力の関係式が求まる。これらを全要素に関してまとめることで、下記のような Co-Rotated FEM における運動方程式を考えることができる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}}, \quad \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \leftarrow \mathbf{R}_e \mathbf{K}_e (\mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (13)$$

離散時間において、式 (13) は変位の関係式として以下の様に近似することができる。

$$(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{C} + \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{u}^{i+1} = (2\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{C}) \mathbf{u}^i - \mathbf{M} \mathbf{u}^{i-1} + \Delta t^2 \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (14)$$

この連立方程式を解くことによって、新たな変位  $\mathbf{u}^{i+1}$  が求まる。

我々は、この方程式を安定に解くためには陰解法が適していると考え、特に収束性の観点から共役勾配法を用いて実装した。また、共役勾配法は、GPU によって高速に並列計算を行なっている。

なお、回転を算出するための極分解は、本質的には特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposition) であり、様々な手法が提案されているが、Co-Rotated FEM では剛性マトリクスの更新が毎フレーム必要となるため、高速な手法が望ましい。したがって、我々は計算速度の観点から Higham の極分解を適用した<sup>6)</sup>。Higham の手法は、以下の式を  $\|\mathbf{R}_k\| < \sigma$  ( $\sigma$  は収束の閾値) となるまで繰り返す漸化的な処理に基づいている。逆行列の計算が不要であり、また求める精度に応じて収束の閾値を設定することが可能である。

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_k^* \mathbf{X}_k) \right) \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{I} - \mathbf{X}_k^* \mathbf{X}_k \quad (16)$$

##### 4.1 鏡像変形に起因する問題への対処

何らかの原因で、四面体要素のトポロジーが変化して裏返りが発生したとする。このような状況において、Co-Rotated FEM では問題が生じる。ここでは、その現象について説明

する。

変形によって四面体の裏返りが起こった場合、その変形行列には以下の性質をもつ鏡像行列  $M_r$  が含まれる。

$$M_r = M_r^*, \quad M_r M_r^* = M_r^* M_r = I \quad (17)$$

変形勾配テンソルに極分解を行うと、鏡像行列は回転行列に含まれた鏡像回転行列の形で表れる。式 (17) から、鏡像行列はユニタリ行列であることがわかる。したがって、式 (5) や式 (7)、式 (8) から、Green-Lagrange 歪テンソルや Co-Rotated FEM における歪テンソルは、鏡像回転不変性を持つことがわかる。一方で、式 (6) から、微小歪テンソルは鏡像回転不変性は持たず、以下のようになる。

$$\epsilon_m = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_m^T) - \mathbf{I} = \frac{1}{2} (M_r \mathbf{F} + \mathbf{F}^T M_r^T) - \mathbf{I} \quad (18)$$

非線形 FEM および Co-Rotated FEM では、変形行列の鏡像成分は、回転成分と共に歪には影響を与えない。これは、何かしらの原因で四面体要素の鏡像変形が発生した場合には、裏返りを復元する力は発生せず、元の鏡像位置に向かう応力が発生することを意味する。一方で、線形 FEM では、鏡像成分の影響があるため、裏返りを復元する応力が発生する。

一般的には、変形に際して鏡像成分は含まれないため、このような問題を考慮する必要はないと考えられる。しかし、計算機への実装を考えた場合、計算誤差、要素頂点の強制的な変位や空間に固定された頂点などの拘束条件の影響によって発生する可能性がある。もし何かしらの原因で鏡像変換が発生した場合には、Co-Rotated FEM は復元する能力がないため、以降は鏡像位置へ収束することとなる。これは、実用上非常に大きな問題である。

裏返りが発生した場合の対処方法として、2つの方法が考えられる。ひとつ目は、線形 FEM では裏返りから復元する力が発生することを利用する方法である。線形 FEM であるため計算コストが低いと、実装が容易であるというメリットがあるが、回転成分が含まれている場合には要素体積の膨張が発生する問題点がある。ただし、負の体積から元に戻す場合にはその影響は小さいと考える。また、裏返りの有無によって、歪の定義が異なるため、不連続性の問題も考えられる。

もうひとつは、回転行列と共に鏡像行列がキャンセルされることを防ぎ、鏡像位置に収束するのを避ける方法である。具体的には、極分解の際に得られた鏡像回転行列から、鏡像行列のみを分解し、ストレッチ行列に掛け合わせる。この手法では、全て Co-Rotated FEM で変形計算を行なうため、上の方法とは異なり連続性の問題は発生しないと考えられる。

我々の手術シミュレータには、実装の容易さ、ライセンス的な精度を考えて前者の手法

表 1 処理時間の比較 [ms]

	線形 FEM	Co-Rotated FEM	幾何的非線形 FEM	Mooney-Rivlin 体
500 要素	1.571	3.752	12.51	19.06
1000 要素	3.755	7.963	24.53	33.44
5000 要素	14.37	36.72	117.5	168.9
10000 要素	28.44	73.59	233.6	343.8

表 2 変形前後の要素体積比の比較 [%]

	線形 FEM	Co-Rotated FEM	幾何的非線形 FEM	Mooney-Rivlin 体
平均	209.02	99.87	99.67	100.00
最大	274.80	105.80	102.56	100.01
最小	93.04	94.47	96.35	99.99

を実装した。なお、変形に鏡像を含む場合は、変形行列の行列式が負になることから、その判定は容易に可能である。

## 5. 小規模比較実験と考察

手術シミュレータへの実装の前に、Co-Rotated FEM の実時間性、変形形状の妥当性を小規模実験によって検討した。実験は、線形 FEM、幾何的非線形 FEM、Mooney-Rivlin 体のそれぞれと処理時間、変形形状を比較した。変形モデルは片持ち梁とし、自重によって変形をしている。物性値については臓器に近いものを想定し、弾性ゴムのヤング率  $1.5 \times 10^6$  [Pa]、ポワソン比 0.49、密度  $0.96$  [g/cm<sup>3</sup>] を用いた。

### 5.1 処理時間の比較

まず、各手法の変形計算処理時間の比較を行なった。実行環境は、CPU:Core 2 Quad 2.66GHz、RAM:2.00GB、OS:Windows XP、コンパイラ:Visual Studio 2005 である。結果を表 1 に示す。線形 FEM と比較した場合、Co-Rotated FEM では約 2.4 倍程度、幾何的非線形 FEM では約 7.7 倍程度、Mooney-Rivlin 体では約 11 倍程度の処理時間を要することがわかる。(尚、幾何的非線形 FEM および Mooney-Rivlin 体は、線形 FEM および Co-Rotated FEM とは実装方法が異なり、より最適化されたものである。したがって、これらの数値は参考程度として捉えていただきたい。)

### 5.2 変形形状の比較

続いて変形形状の比較を行なった。要素数は 400 要素である。図 2 は、変形形状の外観

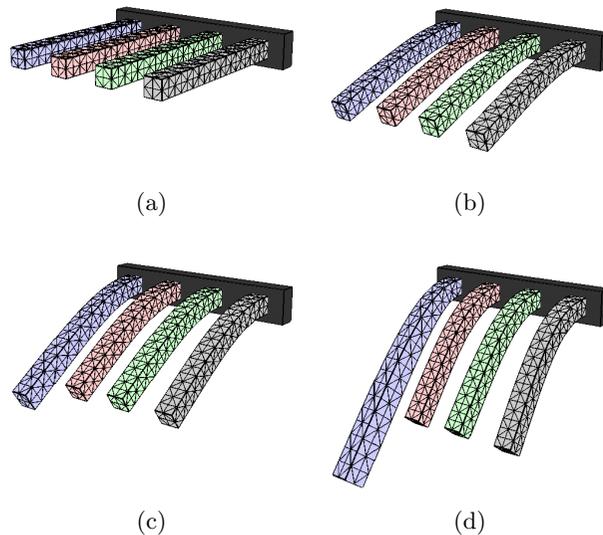


図2 梁モデルの変形結果：梁モデルを自重によって変形させた。(a) から (d) は順にその変形過程を示している。各梁は左から線形 FEM, Co-Rotated FEM, 幾何的非線形 FEM, Mooney-Rivlin 体である。要素数は 400, ヤング率  $1.5 \times 10^6$  [Pa], ポワソン比 0.49, 密度  $0.96$  [g/cm<sup>3</sup>] である。

である。線形 FEM では、偽の力によってその体積が大きく膨張しているが、Co-Rotated FEM, 幾何的非線形 FEM, Mooney-Rivlin 体では妥当な変形をしているように見える。表 2 は、変形前の要素体積に対する変形後の要素体積の比率である。線形 FEM は 2 倍程に膨張しているが、Co-Rotated FEM は 5% 程度、幾何的非線形 FEM は 3% 程度の要素体積変化に収まっており、Mooney-Rivlin 体はほぼ体積変化がないことがわかる。

### 5.3 考察

処理時間の比較結果から、幾何的非線形 FEM および Mooney-Rivlin 体は、非線形計算を要するため、線形 FEM に対する計算時間の増加が大きい。実時間処理を実現するためには、実装方法の工夫のみならずモデル要素数の大幅な削減が必要であると考えられる。一方で、Co-Rotated FEM は十分現実的な増加量に抑えられていると言える。

変形精度は、Mooney-Rivlin 体が最も良い。ただし、Co-Rotated FEM や幾何的非線形 FEM も、変形形状の外観に大きな差異は見られず、体積変化率においても数% の違いに留まっている。手術シミュレータで扱うライフサイズの精度を考えた場合、Co-Rotated

表 3 手術シミュレータにおける変形処理時間 [ms]

	線形 FEM	Co-Rotated FEM
腎臓 (2800 要素)	6.370	14.81
腎動脈 (2152 要素)	5.186	12.04
腎静脈 (2094 要素)	5.213	11.38

FEM や幾何的非線形 FEM でも十分実用に耐えることが可能である。

以上を総合すると、計算処理時間、変形形状の妥当性から Co-Rotated FEM は十分リーズナブルであり、手術シミュレータへの実装に適していると考えられる。

## 6. 手術シミュレータへの実装結果

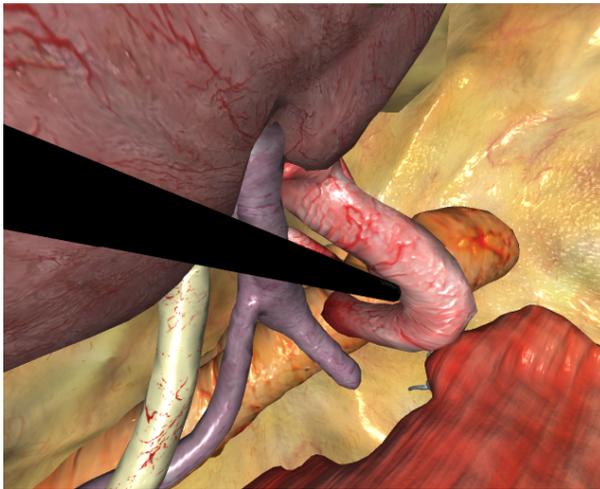
変形モデルとして線形 FEM と Co-Rotated FEM を手術シミュレータに実装し、血管操作を行なった際の画像を図 3 に示す。図から、線形 FEM では不自然な体積の膨張が生じているのに対して、Co-Rotated FEM では膨張せずに変形のリアリティが向上していることがわかる。この結果、線形 FEM では体積が膨張することで難しかった、入り組んだ血管を掻き分けるような手術手技も可能となった。実行時の処理時間は表 3 の通りであり、実時間処理を実現していることがわかる。

## 7. むすび

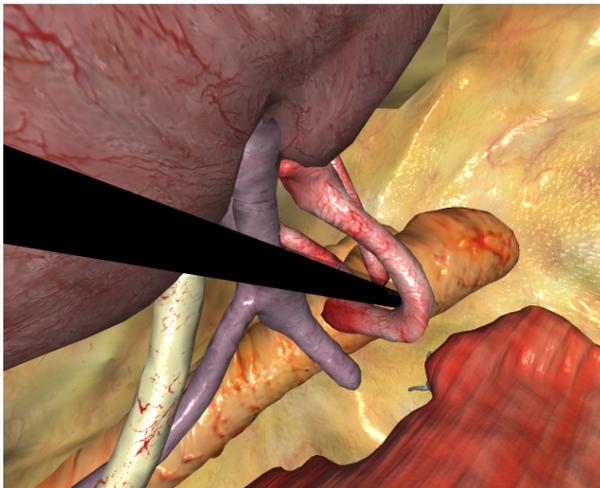
線形 FEM にかわる手術シミュレータの新たな変形手法として、Co-Rotated FEM を評価・実装した。線形 FEM, 幾何的非線形 FEM, Mooney-Rivlin 体との変形形状・処理時間の比較実験の結果、Co-Rotated FEM は、2つの観点から最も手術シミュレータへの実装に適していると結論付けた。

また、その検討結果を踏まえ、Co-Rotated FEM を手術シミュレータに実装し、実時間でライフサイズ精度での妥当な変形を実現することを可能とした。それによって、血管操作時・腎臓剥離時などのモデルの大変形・移動を伴う操作における、線形 FEM の体積膨張の問題点が解決され、よりリアリティのあるシミュレータへと近づいた。

今後は、より大きな要素数のモデルを実時間で扱うためにさらなる高速化を図る。また、膜組織などのより複雑な生体モデルを扱うためには、現在の枠組みにとらわれず、新たな手法を考案することも必要であると考えられる。



(a) 線形 FEM



(b) Co-Rotated FEM

図 3 手術シミュレータ上での腎動脈変形結果: 腎動脈の直径は、術具とほぼ等しく 5mm 程度である。(a) は線形 FEM による変形結果で、血管体積が膨張している。(b) は Co-Rotated FEM による変形結果で現実に近い。

## 参 考 文 献

- 1) Picinbono, G., Delingette, H. and Ayache, N.: Nonlinear and anisotropic elastic soft tissue models for medical simulation, *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA*, Vol.2 (2001).
- 2) Kikuuwe, R., Tabuchi, H. and Yamamoto, M.: An edge-based computationally efficient formulation of Saint Venant-Kirchhoff tetrahedral finite elements, *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, Vol.28, No.1, p.8 (2009).
- 3) Boulanger, P. and Hayes, M.: Finite-Amplitude Waves in Mooney-Rivlin and Hadamard Materials, *Topics in Finite Elasticity*, p.131 (2001).
- 4) Müller, M. and Gross, M.: Interactive virtual materials, *Proceedings of Graphics Interface 2004*, pp.239-246 (2004).
- 5) Hauth, M. and Strasser, W.: Corotational simulation of deformable solids, *Proc WSCG*, Vol.1, No.2 (2004).
- 6) Higham, N. and Schreiber, R.: Fast polar decomposition of an arbitrary matrix., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.11, No.4, pp.648-655 (1990).
- 7) Marchal, M., Allard, J., Duriez, C. and Cotin, S.: Towards a framework for assessing deformable models in medical simulation, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol.5104, pp.176-184 (2008).
- 8) Müller, M., Dorsey, J., McMillan, L., Jagnow, R. and Cutler, B.: Stable real-time deformations, *Proceedings of ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, pp.49-54 (2002).
- 9) Desbrun, M., Schröder, P. and Barr, A.: Interactive animation of structured deformable objects, *Graphics Interface*, pp.1-8 (1999).
- 10) Georgii, J. and Westermann, R.: Corotated finite elements made fast and stable, *Proceedings of the 5th Workshop on Virtual Reality Interaction and Physical Simulation* (2008).
- 11) Higham, N.: Computing the polar decomposition- with applications., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.7, No.4, pp.1160-1174 (1986).