ショート・ノート

指数関数の最良近似連分数*

浜　田　穂　積**

Abstract

We have already proposed a method of the minimax approximation for arbitrary function which is represented in the form of continued fractions[3]. This paper presents a modified method for the exponential function which takes into account the keeping of specific symmetry in the representation $e^x=\dfrac{f(x)+xg(x)}{f(x)-xg(x)}$, and the results of calculations forthe maximum relative errors of several magnitudes.

1. はじめに

Maehly[1]，山内[2]などにより，連分数の最良化は研究されている．しかし，今日ほどの計算能力のなかったころのため，手計算の部分が多く，最良化の精度を犠牲にするとか，項数の多い近似式が事実上能率的には求められないものである．筆者は，連分数の形の最良近似式の計算を能率的に行う方法を示した[3]．

指数関数 (e^x) については，これによって最良近似式を求めてもよいが，指数関数の加法性を利用して式を簡単化し，最良化のために補正する係数の個数を少なくすることができる．このためには，指数関数の場合にかぎって，一般の計算方法を多少変形した工夫をする方がよいといわれている．ここではそれを具体的に示し，結果についても述べる．

2. 最良化条件

指数関数の加法性とは

$$e^{-x}=1/e^x \tag{1}$$

となることである．このとき２つの偶関数 $f(x), g(x)$ を適当に選んで，

$$e^x=\frac{f(x)+xg(x)}{f(x)-xg(x)} \tag{2}$$

とすることができる．$f(x)$，$g(x)$ はそれぞれ２箇所に出現するので，このままだと処理しにくい．そのため次のように変形する．

$$e^x=1+\frac{2x}{h(x)-x} \tag{3}$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{4}$$

この $h(x)$ は次の連分数で表わせる．

$$h(x)=2+\frac{x^2}{6+}\frac{x^2}{10+}\cdots\frac{x^2}{+4i-2+}\cdots \tag{5}$$

ここでは，(5)の定数を補正することによって最良化するものとする．

さて，(5)を第 m 項までで打切ったものを $\Theta(x)$ とし，これを正しい $h(x)$ の代りに用いる．また，第 n 項までで打切ったものを $\theta(x)$ とし，求める近似式に対応するものとする．ここで $n<m$ である．

そこで，最良化条件として，相対誤差関数

$$R(x)=\left\{\frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x}-\frac{\Theta(x)+x}{\Theta(x)-x}\right\}\Bigg/\frac{\Theta(x)+x}{\Theta(x)-x}$$
$$=\frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x}\Bigg/\frac{\Theta(x)+x}{\Theta(x)-x}-1 \tag{6}$$

をとりたいのであるが，これでは対称性が生かせないので，通常上式の両辺に１を加えたのち対数をとった次のものが用いられる．

$$\log\{1+R(x)\}=\log\frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x}-\log\frac{\Theta(x)+x}{\Theta(x)-x} \tag{7}$$

しかしこれでは対数が入って計算が複雑で，精度もよくないので (7) を更に変形すると，

$$\log\{1+R(x)\}=2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left\{x\frac{\Theta(x)-\theta(x)}{\Theta(x)\theta(x)-x^2}\right\}^{2i+1} \tag{8}$$

が得られる．ここで

---

* Minimax Function of Exponential Function Formed of a Continued Fraction by Hozumi HAMADA (Systems Development Laboratory, Hitachi, Ltd.).

** (株)日立製作所システム開発研究所

$$E(x)=x\cdot\frac{\Theta(x)-\theta(x)}{\Theta(x)\theta(x)-x^2} \qquad (9)$$

とおけば，$\Theta(x)$, $\theta(x)$ はいずれも偶関数であるから，$E(x)$ は奇関数となる．さらに，(8) は $E(x)$ に関する奇関数で，かつ単調増加であるから，$E(x)$ を最良化条件として用いられることができる．ここでこれらの間には次の関係がある．

$$e^x \fallingdotseq \frac{\Theta(x)+x}{\Theta(x)-x}=\frac{1-E(x)}{1+E(x)}\cdot\frac{\theta(x)+x}{\theta(x)-x} \qquad (10)$$

$$R(x)=\frac{1+E(x)}{1-E(x)}-1=\frac{2E(x)}{1-E(x)} \qquad (11)$$

これから，$E(x)$ を最良化条件式として計算した場合の相対誤差を正しく定めることができる．

3. 計 算 法

さて$\Theta(x)$, $\theta(x)$ に関連して次のようにおく．

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_m=4m-2\\&\Theta_i=4i-2+\frac{x^2}{\Theta_{i+1}}\ \ (i=m-1, m-2, \cdots, 1)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta_n=4n-2+d_n\\&\theta_i=4i-2+d_i+\frac{x^2}{\theta_{i+1}}\ \ (i=n-1, n-2, \cdots, 1)\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(x)&=\Theta_1\\\theta(x)&=\theta_1\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

そこで (9) から次を得る．

$$\begin{aligned}E(x)&=\frac{x(\Theta_1-\theta_1)}{\Theta_1\theta_1-x^2}\\&=\frac{-x}{\Theta_1\theta_1-x^2}\left\{d_1+\frac{x^2}{\Theta_2\theta_2}(\Theta_2-\theta_2)\right\}\\&=\frac{-x}{\Theta_1\theta_1-x^2}\left[d_1-\frac{x^2}{\Theta_2\theta_2}\left\{d_2+\frac{x^2}{\Theta_3\theta_3}(\Theta_3-\theta_3)\right\}\right]\\&\cdots\cdots\\&=\frac{-x}{\Theta_1\theta_1-x^2}\left(d_1-\frac{x^2}{\theta_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{\theta_n}\left(d_n-\frac{x^2}{\Theta_{n+1}}\right)\cdots\right)\end{aligned} \qquad (15)$$

これを漸化式で表わすと次の通りである．

$$\left.\begin{aligned}&s_{n+1}=-1\\&s_i=-(d_i+x^2s_{i+1}/\Theta_{i+1})/\theta_i\ \ (i=n, n-1, \cdots, 1)\\&E(x)=\frac{xs_1\theta_1}{\Theta_1\theta_1-x^2}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

これを用いて d_i を計算する．収束範囲を

$$-\rho\leqq x\leqq\rho\ \ (\rho>0) \qquad (17)$$

また極値を与える x の値を x_j $(j=0, 1, \cdots, n)$ とし

$$x_0(=\rho)>x_1>\cdots>x_n>0 \qquad (18)$$

とする．このとき

$$E(x_j)+E(x_{j+1})=0\ \ (j=0, 1, \cdots, n-1) \qquad (19)$$

となるように d_i を定める．それには，d_i の初期値に対してそれへの補正量 dd_i を計算して補正する．**補正量 dd_i は次の方法により求める．** すなわち $E(x, d_1, \cdots, d_n)$ を全微分することにより

$$dE(x, d_1, \cdots, d_n)=\frac{\partial E}{\partial x}dx+\frac{\partial E}{\partial d_1}dd_1+\cdots+\frac{\partial E}{\partial d_n}dd_n \qquad (20)$$

を得るが，これを (19) を表わす式

$$\begin{aligned}&E(x_j, d_1+dd_1, \cdots, d_n+dd_n)\\&\qquad+E(x_{j+1}, d_1+dd_1, \cdots, d_n+dd_n)=0\\&\qquad\qquad(j=0, 1, \cdots, n-1)\end{aligned} \qquad (21)$$

に代入するのであるが，x の増分はここではないとすれば次の通りとなる．

$$\begin{aligned}&E(x_j)+E(x_{j+1})\\&\quad+\left\{\frac{\partial E(x_j)}{\partial d_1}+\frac{\partial E(x_{j+1})}{\partial d_1}\right\}dd_1\\&\quad+\cdots\cdots\\&\quad+\left\{\frac{\partial E(x_j)}{\partial d_n}+\frac{\partial E(x_{j+1})}{\partial d_n}\right\}dd_n=0\\&\qquad\qquad(j=0, 1, \cdots, n-1)\end{aligned} \qquad (22)$$

これは n 個の変数 dd_i に関する，n 個の式からなる連立一次方程式となっているので，これを dd_i について解いて，d_i+dd_i を新しい d_i とする計算を，d_i が収束するまで繰返す．(22)に出てくる $\partial E/\partial d_i$ は

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial d_i}&=\frac{\partial E}{\partial\theta_1}\cdot\frac{\partial\theta_1}{\partial d_i}=\frac{-x(\Theta_1^2-x^2)}{(\Theta_1\theta_1-x^2)^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial d_i}\\&=-\frac{x(\Theta_1^2-x^2)}{(\Theta_1\theta_1-x^2)^2}\left(-\frac{x^2}{\theta_2^2}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial d_i}\\&\cdots\cdots\\&=\frac{\Theta_1^2-x^2}{(\Theta_1\theta_1-x^2)^2}\cdot\frac{(-1)^ix^{2i-1}}{(\theta_2\cdots\theta_i)^2}\cdot\frac{\partial\theta_i}{\partial d_i}\\&=(-1)^i\frac{\Theta_1^2-x^2}{(\Theta_1\theta_1-x^2)^2}\cdot\frac{x^{2i-1}}{(\theta_2\theta_3\cdots\theta_i)^2}\end{aligned} \qquad (23)$$

であるが，これを漸化式で表わすと次の通りである．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial d_1}=-\frac{x(\Theta_1^2-x^2)}{(\Theta_1\theta_1-x^2)^2}\\&\frac{\partial E}{\partial d_i}=-\frac{x^2}{\theta_i^2}\frac{\partial E}{\partial d_{i-1}}\ \ (i=2, 3, \cdots, n)\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

以上で準備ができたので次の手順で計算する．

(a) (16) が

$$x_k=\rho\cos\left(\frac{2k-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ \ (k=1, 2, \cdots, n) \qquad (25)$$

において $E(x)=0$ となるように d_i を定める．ただ

し，θ_i は (13)において $d_i=0$ とおいたものとする．

（b） x_j の初期値を次のものとする．

$$x_j=\rho\cos\left(\frac{2j}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\ \ (j=0,1,\cdots,n) \tag{26}$$

（c） d_i の補正量 dd_i を計算して補正する． これを数回繰返す．

（d） 極値をとる x の値は x_j から少しずれているので，x_j をその値に修正する．

（e） 極値の絶対値をバラツキを調べ，収束したと見なせるようになるまで数回（c），（d）を繰返す．

4. 計 算 例

HITAC-8700 EDOS-MSO において，ALGOL の倍精度演算（16 進 14 桁）により，$\rho=(\log 2)/2$ として，$n=2\sim9$ について計算した．結果は **Table 1** の通りであるが， いずれの n についても手順（e）の繰返し 1 回で 10^{-5} のバラツキに収まった．実用的にはこれで十分であるので計算を打切った．計算時間は CPU 時間で 10 秒以内でった．

5. お わ り に

ALGOL, FORTRAN 等のコンパイラと組合せて用意する関数ルーチンのうち，指数関数 (exp) の計算方法は，精度のよさ，対称性のよさから，（3）の $h(x)$ に $\theta(x)$ を代入した形，あるいはそれを変形して有理式にしたものが用いられることがほとんどである．精度は Table 1 に見るように，n が大になるにしたがい急速に高精度が得られる．またその計算において，手順（e）の繰返しが 1 回で十分であるということは，最良近似となった誤差関数がチェビシェフ多項式に極めて相似していることと密接な関係があるようである．そのためか，いろいろな P と n について近似式を作って得られるものの精度には次のような簡単な式が存在することがわかった．

$$\text{最大相対誤差} \fallingdotseq \frac{4}{(2n-1)!!(2n+1)!!}\left(\frac{\rho}{4}\right)^{2n-1} \tag{27}$$

これに何らかの意味づけができるかも知れないが，現在では不明であり，今後の課題としたい．

Table 1 Constants of minimax exponential function.

$$e^x\simeq 1+\frac{2x}{-x+a_1+}\frac{x^2}{a_2+}\cdots+\frac{x^n}{a_n},\quad |x|\leq\frac{1}{2}\log 2$$

n	i	a_i	MRE
2	1	2.00001250573	4.3E-07
	2	6.015019524	
3	1	2.000000003758116	9.3E-11
	2	6.000009009482	
	3	10.015016658	
4	1	2.00000000000005759247	1.1E-14
	2	6.0000000023013920	
	3	10.0000068965783	
	4	14.0150156182	
5	1	2.000000000000000005338380	8.4E-19
	2	6.00000000000031999262	
	3	10.00000000149179243	
	4	14.00000556336942	
	5	18.01501511855	
6	1	2.000000000000000000003312284	4.4E-23
	2	6.000000000000000000277965909	
	3	10.00000000000001851298673	
	4	14.0000000001035686901	
	5	18.000004655675068	
	6	22.01501483875	
7	1	2.00000000000000000000000014714035	1.7E-27
	2	6.00000000000000000000164640640	
	3	10.000000000000000001480342189	
	4	14.00000000000011502549488	
	5	18.00000000007584114139	
	6	22.000004000251413	
	7	26.015014665937	
8	1	2.000000000000000000000000000004909458	5.0E-32
	2	6.000000000000000000000000000706292284	
	3	10.0000000000000000000008232219631	
	4	14.000000000000000008443620571	
	5	18.0000000000000075918678449	
	6	22.00000000057843261496	
	7	26.00000350555419412	
	8	30.0150145515887	
9	1	2.00000000000000000000000000000000012753103	1.2E-36
	2	6.00000000000000000000000000000229338784	
	3	10.000000000000000000000000003360441352	
	4	14.00000000000000000000043867862411	
	5	18.000000000000000000512760928116	
	6	22.00000000000000525923842318	
	7	26.000000000455351191809	
	8	30.00000311923148016	
	9	34.0150144719507	

MRE represents maximum relative error.

参 考 文 献

1) H. J. Maehly: Methods for Fitting Rational Approximations, J. ACM, Vol. 7, pp. 150～162 (1960), and Vol. 10, pp. 257～277 (1963).

2) 山内二郎：電子計算機のための数値計算法 II，培風館 (1967)，

3) 浜田穂積： 有理式近似および連分数近似の最良化，情報処理 Vol. 19, No. 11, pp. 1065～1071 (1978).

4) 一松 信： 初等関数の数値計算，教育出版 (1974).

（昭和 52 年 5 月 10 日受付）

（昭和 52 年 11 月 30 日再受付）