論　文

準エルミート(0,2)-補間多項式の存在性について*

鈴　木　千　里**

Abstract

Existence conditions are discussed of a polynominal with a degree $\leq 4n-1$ whose value is prescribed together with its second derivative at $2n$ given nodes on real axis.

It will be demonstrated that such polynomial can not be determined uniquely in some cases of even specific nodes. The main result in this paper is the following: If the nodes $\{x_i\}$ satisfy the following equations,

$$x_i=\begin{cases}-s^{i-1}, & \text{for } i=1,2,\cdots,n,\\ s^{2n-1}, & \text{for } i=n+1,n+2,\cdots,2n,\end{cases}$$

where $0<s<1/7$, then tehre exists the unique polynomial.

1. まえがき

有界な実数閉区間に含まれる基点の集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_K\}$の各元に対応する，任意に与えられる2つの実数列$(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \cdots, y_K^{(0)})$, $(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_K^{(2)})$に対し，

$$\left.\begin{aligned}&Q(x_i)=y_i^{(0)},\\&Q''(x_i)=y_i^{(2)},\ (i=1,2,\cdots,K)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

(ただし，“$''$”$=d^2/dx^2$) を満たすような $2K-1\geq$ 次の多項式 Q を求める問題は，準エルミートの(0,2)補間問題と呼ばれ，1955年に J. Suranyi と P. Turán[1]によって提起されて以来，数多く研究されてきた．実際，この問題の詳細な歴史的背景と主要な結果は文献2)に紹介されている．そして，その研究意義は，解が微分方程式や数値積分のアルゴリズムなどの研究において重要な役割を果たすことにある．

しかし，この問題には，しばしば解が存在しないことがある．従って，より一般的な条件のもとでの解の存在を示すことは重要な課題とされ，解の陽的表現を得ることと共に困難なものの一つとされてきた．

存在性に関して，これまで得られている興味ある成果としては次のようなものがある．基点集合が奇基数 $2n+1$ で，各元の間に $x_{n+1}-x_i=x_{2n-i+2}-x_{n+1}$, $(i=1,2,\cdots,n)$ の関係があるとき，すなわち数値線上の点 x_{n+1} を中心に他の点 x_i が左右に対称的に布置されているとき，どんな正の整数nに対しても問題は一意の解を有さないことが知られている[3]．それゆえ，偶基数の基点集合の場合が特に興味の対象とされる．これまでに知られている偶基数の基点集合の上での解の存在証明としては，P. Turán[1]らによるものがある．それは基点集合が多項式 $(1-x^2)P_{2n-1}'$ (P_{2n-1} は $2n-1$ 次の Legendre 多項式) の根によって構成される特殊な条件のもとで行われている．その他，P. Dyer[4]による証明がある．これは，$2n$ 個の基点が数直線上に等間隔に布置されるような基点集合の上で行われているが，$n=1,2,3$ の場合だけである．結局，いずれの存在条件も非常に特殊であるか限定的である．

本論文では，偶基数 $2n$ (ただし n は正の整数) の基点集合の上での解の存在性が議論される．最初に，数直線上で零点を中心に正負方向に対称的に布置された偶数個の点からなる基点集合のもとでは，一般に問題の一意の解の存在は，必ずしも保障されないことが示される．次に，その基点集合の元に対し，更に等比的に布置されているという付帯条件がつけられるとき，ある範囲の比率において一意の解が存在することが証明される．

---

* On Existence of Quasi Hermite (0,2)-Interpolation Polynomials by Chisato SUZUKI (Computer Science Laboratory, Fujitsu Laboratory Ltd.).

** (株)富士通研究所電子研究部

2. 準　備

初めに，2，3のことばを定義しておく．すなわち，準エルミート (0,2) 補間問題が一意の解を有するとき，問題は Poised であると呼び，そうでないときは non-poised であると呼ぶことにする．そして，解が存在するとき，その解を準エルミート(0,2) 補間多項式と呼ぶ．

本論文で議論される問題は，基点集合が次の条件を満たしている場合に限定される；基点集合の基数は偶数 $2n$ (n は正の整数) とし，基点集合の各元 x_i は，

$$x_i=\begin{cases}-s_i, & \text{for } i=1,2,\cdots,n,\\ s_{2n-i+1}, & \text{for } i=n+1,n+2,\cdots,2n\end{cases}\tag{2}$$

を満たしているものとする．ここで，各 s_i は互いに異なる任意の正の実数値とする．式 (2) で定義される基点集合は，数直線上で零点を中心として正負方向に対称的に布置された点の集まりであると考えられることから，これを偶対称(基点)集合と呼ぶことにする．

偶対称集合の上での準エルミート(0,2) 補間問題の Poised 性を議論するために，文献 3) によって知られている次の結果を利用する：基点集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_K\}$ の上での準エルミート (0,2) 補間問題が Poised であるためには，エルミート多項式の基底と準エルミート (0,2) 補間多項式の基底とを関係づける行列，

$$\boldsymbol{S}=(s_{i,j}),\quad s_{i,j}=\begin{cases}2g_{i,i}, & \text{for } j=i\\ -2\Lambda_{i,j}/(x_i-x_j), & \text{for } j\neq i\end{cases}\tag{3}$$

$(i,j=1,2,\cdots,K)$ の逆 $\boldsymbol{S}^{-1}$ が存在することであり，かつ，その場合に限られる(定理 3.2 参照)．ここで，

$$g_{i,i}=2\sum_{\substack{P=1\\ \neq i}}^{K}\frac{1}{(x_i-x_P)},\quad \Lambda_{i,j}=\left\{\prod_{\substack{P=1\\ \neq i,j}}^{K}\frac{(x_j-x_P)}{(x_i-x_P)}\right\}^2.$$

$\boldsymbol{S}$ の逆が存在する場合，問題の解 Q は

$$Q(x)=\boldsymbol{r}^t(x)\boldsymbol{y}^{(0)}+\boldsymbol{s}^t(x)\boldsymbol{y}^{(2)}\tag{4}$$

によって与えられる．ただし，$\boldsymbol{y}^{(j)}\equiv(y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \cdots, y_K^{(j)})^t$ $(j=0,2)$, $\boldsymbol{r}(x)\equiv\boldsymbol{r}^*(x)-\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}^*(x)$, $\boldsymbol{S}(x\}\equiv\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}^*(x)$，そして，$\boldsymbol{r}^*(x)\equiv(r_1^*, r_2^*, \cdots, r_K^*)$, $\boldsymbol{s}^*(x)\equiv(s_1^*, s_2^*, \cdots, s_K^*)$, $\boldsymbol{R}\equiv(r_{i,j})$ は，

$$r_i^*=\{1-(x-x_i)g_{i,i}\}\,l_i^2(x),\quad s_i^*=(x_i-x)l_i^2(x),$$

$$l_i(x)=\prod_{\substack{P=1\\ \neq i}}^{K}\frac{(x-x_P)}{(x_i-x_P)},$$

$$r_{i,j}=\begin{cases}-g_{i,i}^2+g_{i,i}^{(1)}, & \text{for } j=i,\\ \{1-(x_j-x_i)g_{i,i}\}\dfrac{2\Lambda_{i,j}}{(x_j-x_i)^2}, & \text{for } j\neq i.\end{cases}$$

ただし，$g_{i,i}^{(1)}=-\sum_{\substack{P=1\\ \neq i}}^{K}(x_i-x_P)^{-2}$ のように定義されている．また，$\boldsymbol{S}^{-1}$ が存在するためには，行列

$$\boldsymbol{T}\equiv(t_{i,j}),\quad t_{i,j}=\begin{cases}g_{i,i}, & \text{for } j=i,\\ (x_j-x_i)^{-1}, & \text{for } j\neq i\end{cases}\tag{5}$$

が正則であり，かつ，その場合に限られる(定理 4.1)．

これらの事実を適用するために，式 (2) で規定された偶対称集合に対応する $\boldsymbol{T}$ 行列を求める．そのとき，

$$\boldsymbol{T}_{2n}\equiv\left(\begin{array}{cccccc}
g_{1,1} & (s_1-s_2)^{-1}\cdots & (s_1-s_n)^{-1} & (s_1+s_n)^{-1} & (s_1+s_{n-1})^{-1}\cdots\cdots & (s_1+s_1)^{-1}\\
(s_2-s_1)^{-1} & g_{2,2} & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & (s_{n-1}-s_n)^{-1} & & & \\
(s_n-s_1)^{-1}\cdots & (s_n-s_{n-1})^{-1} & g_{n,n} & (s_n+s_n)^{-1}\cdots & \cdots\cdots & (s_n+s_1)^{-1}\\
-(s_1+s_n)^{-1}\cdots & \cdots\cdots & -(s_n+s_n)^{-1} & -g_{n,n} & (s_{n-1}-s_n)^{-1}\cdots\cdots & (s_n-s_1)^{-1}\\
-(s_1+s_{n-1})^{-1} & & \vdots & (s_n-s_{n-1})^{-1} & -g_{n-1,n-1} & (s_1-s_2)^{-1}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots\\
-(s_1+s_1)^{-1}\cdots\cdots & & -(s_n+s_1)^{-1} & (s_n-s_1)^{-1}\cdots\cdots & -(s_2-s_1)^{-1} & -g_{1,1}
\end{array}\right)\tag{6}$$

のようになる．

ただし，$g_{i,i}=-2\sum_{\substack{P=1\\ \neq i}}^{n}(s_i-s_P)^{-1}-2\sum_{P=1}^{n}(s_i+s_P)^{-1}$,

$(i=1,2,\cdots,n)$.

そこで，ここでは，偶対称集合の上での準エルミート (0,2) 補間問題の Poised 性の証明は，式(6)の行列の正則性の議論に基づいて行われる．

3. 存 在 定 理

基点が $x_{n+1}-x_i=x_{2n-i+2}-x_{n+1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の関係を満たすような奇基数の基点集合の上での準エルミート(0,2) 補間問題は non-poised であるのに反し，一つの偶対称集合である $(1-x^2)P_{2n-1}'(x)$ の多項式の根からなる集合の上では一意の解が存在する（付録参照)．このことから，任意の偶対称集合の上での問題も poised ではなかろうかという推論が働く．事実，等間隔に並ぶ偶数個の基点の上での問題は，poised であろうと予想されている．しかし，基点集合が偶対称的であるという条件だけでは，一般に問題の poised 性は保障されない．このことは次の命題によって証明される．

命題 3.1　偶対称基点集合の上で non-poised となる準エルミート (0,2) 補間問題がある.

証明　$n=2$ の場合について考える. 偶対称集合を

$$x_1=-1,\ x_2=-s,\ x_3=s,\ x_4=1, \qquad (7)$$

のように選び, そして式 (6) の $\boldsymbol{T}_4$ 行列が特異となる1と異なる正の実数 s の存在を示す. 実際, $\boldsymbol{T}_4$ の行列式 ρ_4 は次のようになる;

$$\rho_4(s)\equiv\det\boldsymbol{T}_4=\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}), \qquad (8)$$

ここで

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} g_{1,1} & -(s-1)^{-1} \\ (s-1)^{-1} & g_{2,2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2^{-1} & (s+1)^{-1} \\ (s+1)^{-1} & (2s)^{-1}\end{bmatrix},$$

$$g_{1,1}=-(s^2-5)/(s^2-1),\ g_{2,2}=-(5s^2-1)/s(s^2-1).$$

更に, 式 (8) を具体的に計算すれば

$$\rho_4(s)=\left\{\frac{3(11s^4-38s^2+11)}{4s(s^2-1)^2}\right\}\cdot\left\{\frac{3(3s^4-22s^2+3)}{4s(s^2-1)^2}\right\} \qquad (9)$$

となる. 従って, s が $\sqrt{(19\pm4\sqrt{15})/11}$, または $\sqrt{(11\pm4\sqrt{7})/3}$ の値をとるとき, $\rho_4=0$ となる. ゆえに, 問題は non-poised となる. Q.E.D.

この命題は, 直接的な方法でも証明できる. すなわち, 式 (7) の基点集合の上での準エルミート (0,2) 補間多項式の形式的な定義式は,

$$\det\begin{vmatrix}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & y_1^{(0)} \\
1 & -s & s^2 & -s^3 & s^4 & -s^5 & s^6 & -s^7 & y_2^{(0)} \\
1 & s & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 & y_3^{(0)} \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y_4^{(0)} \\
0 & 0 & 2 & -6 & 12 & -20 & 30 & -42 & y_1^{(2)} \\
0 & 0 & 2 & -6s & 12s^2 & -20s^3 & 30s^4 & -42s^5 & y_2^{(2)} \\
0 & 0 & 2 & 6s & 12s^2 & 20s^3 & 30s^4 & 42s^5 & y_3^{(2)} \\
0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & y_4^{(2)} \\
1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & Q(x)
\end{vmatrix}=0 \qquad (10)$$

によって与えられる. この式を基にして一意の $Q(x)$ が存在しないような s の存在を示せばよい. 事実, 任意に与えられる実数列 $y_i^{(0)}$, $y_i^{(2)}\ (i=1,2,3,4)$ に対し, 唯一の $Q(x)$ が存在するためには, Q の余因子 $\varDelta_{9,9}$ が零でないことを必要とする. しかし, $\varDelta_{9,9}$ を具体的に計算すれば,

$$\varDelta_{9,9}=2304s^2(s^2-1)^4(3s^4-22s^2+3)(11s^4-38s^2+11) \qquad (11)$$

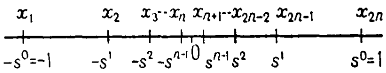

Fig. 1　Even nodes leading to a poised problem where $0<s<1/7$.

となる. 従って $\varDelta_{9,9}=0$ となる1と異なる $s>0$ の存在が示される.

この命題は, 基点集合が単に偶対称的であるという制約だけでは問題に対する一意の解の存在は一般に保障されないことを示唆している. しかし, 偶対称集合に対し, 更に適当な制限を添付することによって, 任意の正の整数 n に対しても問題が poised となることを証明し得る. この興味ある結果を与えるまえに, 一つの補題を述べる.

偶対称集合の元の値を定める s_i は,

$$s_i=s^{i-1},\ i=1,2,\cdots,n \qquad (12)$$

が満たされていると仮定する. ここで, $0<s<1$ とする. そのとき, 式 (12) を満たす偶対称集合は閉区間 $[-1,1]$ の上で零点を中心に正負方向に対称的に, しかも比率 s で布置された $2n$ 個の点によって構成されている (**Fig. 1** 参照). このような偶対称 (基点) 集合は等比的であるということにする. そのとき, この等比偶対称集合に対応する式 (6) の行列 $\boldsymbol{T}_{2n}$ は開区間 $(0,1)$ で定義された s の行列値関数となる. これを $\boldsymbol{T}_{2n}(s)$ で表わす.

補題 3.1　n を正の整数とする. そのとき, 開区間 $(0,1/7)$ の上での $\boldsymbol{T}_{2n}(s)$ は強優位対角行列*である.

証明　これは, $\boldsymbol{T}_{2n}(s)$ の対角要素の絶対値 $\alpha_i(s)$ と対応する行の残りの要素の絶対値の和 $\beta_i(s)$ に対し,

$$\alpha_i(s)>\beta_i(s)>0\ \ (\text{for } i=1,2,\cdots,2n) \qquad (13)$$

を満たすような $s\in(0,1)$ の定義域の存在を示すことによって行われる. α_i, β_i は式 (6), (12) から求められ,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_i=\alpha_{2n-i+1}&=\left|\frac{1}{s^{i-1}}+\sum_{P=i+1}^{n}\frac{4s^{i-1}}{s^{2(i-1)}-s^{2(P-1)}}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{P=1}^{i-1}\frac{4s^{i-1}}{s^{2(P-1)}-s^{2(i-1)}}\right|\\
\beta_i=\beta_{2n-i+1}&=\frac{1}{2s^{i-1}}+\sum_{P=1}^{i-1}\frac{2s^{P-1}}{s^{2(P-1)}-s^{2(i-1)}}\\
&\quad+\sum_{P=i+1}^{n}\frac{2s^{i-1}}{s^{2(i-1)}-s^{2(P-1)}}
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

となる. ここで, $i=1$ の場合は常に強優位対角であることと上の左辺の関係により, 不等式 (13) は $i=2, 3,\cdots,n$ についてのみ考察されれば充分である. いま,

---

* n 次の行列 $A=(a_{ij})$ が強優位対角であるとは, そのそれぞれの行成分に対し, 不等式

$$\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

が成立することである. ここで, $|\cdot|$ は絶対値記号.

s が

$$1>\delta_i \equiv 4\{(s^{2(1-i)}-1)^{-1}+(s^{2(2-i)}-1)^{-1}+\cdots +(s^{-2}-1)^{-1}\},\quad \text{for } i=2,3,\cdots,n$$

の不等式を満たすと仮定すれば，式 (14) の α_i における絶対記号は取り除かれる．実際，この仮定は $0<s<(\sqrt{2}-1)$ に対し真となる．そして，$\alpha_i{}^*$ と $\beta_i{}^*$ を $\alpha_i{}^*=s^{i-1}\alpha_i+\delta_i$，　$\beta_i{}^*=s^{i-1}\beta_i+\delta_i$ とすれば，不等式

$$\alpha_i{}^*(s)>\beta_i{}^*(s)>\delta_i>0,\ (i=2,3,\cdots,n). \tag{15}$$

が成立するならば，そのとき，式 (13) の条件式は満たされる．

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i{}^* &= 1+4\sum_{P=i+1}^{n}\frac{1}{1-s^{2(P-i)}}\equiv 1-2\gamma_i,\\ \beta_i{}^* &= \frac{1}{2}+2\sum_{P=1}^{i-1}\frac{s^{i-P}(1+2s^{i-1})}{1-s^{2(i-P)}}+2\sum_{P=i+1}^{n}\frac{1}{1+s^{2(P-i)}},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

更に $\alpha_i{}^{**}$，$\beta_i{}^{**}$ を $\alpha_i{}^{**}=\alpha_i{}^*+\gamma_i$，　$\beta_i{}^{**}=\beta_i{}^*+\gamma_i$ のように定義するときに，次の式が成立するならば，式 (15) の条件は満たされる．

$$\alpha_i{}^{**}(s)>\beta_i{}^{**}(s)>\delta_i>0,\ (i=2,3,\cdots,n), \tag{17}$$

この $\alpha_i{}^{**}$，$\beta_i{}^{**}$ は，$i=2,\ 3,\cdots,n$ に対し，不等式

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i{}^{**}(s) &> 1+\frac{2(n-i)}{1-s^{2(n-i+1)}}\geq 1,\\ \beta_i{}^{**}(s) &< \frac{1}{2}+\frac{2s}{1-s^2}\left\{\frac{1-s^{i-1}}{1-s}+2s\frac{1-s^{2(i-1)}}{1-s^2}\right\}\\ &< \frac{1}{2}+\frac{2s}{1-s}\cdot\frac{1+2s}{1-s}\equiv\beta(s)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

を満足する．従って不等式

$$\alpha_i{}^{**}(s)>1>\beta(s)>\beta_i{}^{**}(s)>\delta_i>0,\ (i=2,3,\cdots,n) \tag{19}$$

が満たされるならば，そのとき，式 (13) の条件も満たされることになる．そこで，$1>\beta(s)$ を満たす $s\in(0,\sqrt{2}-1)$ の範囲を求めると (0, 1/7) となる．
Q.E.D.

この補題から，準エルミート (0, 2) 補間問題に対する次の解の存在定理がただちに導かれる．

定理 3.1　n を正の整数とし，比率 $s\in(0,1/7)$ とする．そのとき，基数 $2n$ の等比偶対称基点集合の上での準エルミート (0, 2) 補間問題は poised である．

この定理の証明は補題から明らかである．実際，$T_{2n}(s)$ が強優位対角行列なら $T_{2n}(s)$ は正則である[5]．

最後に，この問題の解は，式 (2)，(12) そして定理の s の条件をもとにして式 (4) から得ることができる．

4. まとめ

本論文において，数直線上で零点を中心に正負方向に対称的にかつ等比 (比率 s は $<1/7$) 的に布置される偶数個の基点の上では，準エルミート (0, 2) 補間多項式が一意に存在することが示された (定理 3.1)．この存在条件は Legendre 多項式の根によって指定される Turán らの条件と比べると，かなりの自由度を有する．これは注目に値すると思われる．

今後の課題として一つは収束性の問題がある．すなわち，$n\to\infty$ のときの解 Q の極限値全体の集合の研究である．そして他の一つは，**3.** の初めに述べたような等間隔に並ぶ偶数個の基点の上での問題の poised 性の証明である．この証明は一層難しいが，充分に価値あるものと思われる．

謝　辞　日ごろ御指導頂いている慶応義塾大学高橋秀俊教授，国際情報社会科学研究所西村敏充氏そして富士通山下真一郎氏に深謝致します．並びに，富士通研究所宮川電子研究部長，小坂部長付に謝意を表します．

参考文献

1) J. Suranyi and P. Turán: Notes on Interpolation. I, Acta Math. Acad. Sci. Hunger., 6, pp. 67～79 (1955).
2) A. Shama: Some Poised and Nonpoised Problems of Interpolation. SIAM Review, Vol. 14, No. 1, pp. 129～151 (1972).
3) 鈴木千里: 準エルミート (0, q)-補間問題と解の陽的表現，情報処理，Vol. 18, No. 5, pp. 430～437 (1977).
4) J. Dyer: Generalized Multistep Methods in Satelite Orbit Computation, ACM, Vol. 15, No. 4, pp. 712～719 (1968).
5) たとえば，L. B. Roll: Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, P. 225, John Wiley & Sons (1969).

付　録

$(1-x^2)P_{2n-1}{}'(x)$ のすべての零点の集合 N は偶対称集合であることは，次のように示される：m 次の Legrandre 多項式 $P_m(x)$ の m 個の零点はすべて実数で，$(-1,1)$ の間にあり，かつすべて異なっていることはよく知られている．そして，$P_m(x)$，$(m\geq 1)$ は次式で与えられる．

$$P_m(x)\sum_{r=0}^{[m/2]}C_r{}^m x^{m-2r},$$

ここで，$[m/2]$ は $m=\text{even}$ で $m/2$，そして，$m=\text{odd}$ で $(m-1)/2$ の値をとる．C_r^m は次のように定義された係数である．

$$C_r^m=(-1)^r\frac{(2m-2r)\,!}{2^m r\,!\,(m-r)\,!\,(m-2r)\,!}$$

そこで，この Legrandre 多項式を x に関して微分して，$m=2n-1$ とおけば，

$$P_{2n-1}'(x)=\sum_{r=0}^{n-1}(2n-1-2r)C_r^{2n-1}(x^2)^{n-1-r}$$

を得ることができる．

従って，$\bar{x}$ が $(1-x^2)P_{2n-1}'(x)$ の零点であるならば，$-\bar{x}$ もまた零点となる．また，$P_{2n-1}'(0)=C_{n-1}^{2n-1}=(-1)^{n-1}/\{2^{2(n-1)}(n-1)\,!\}\neq 0$ であるので，$\bar{x}=0$ は零点とはなり得ない．ゆえに，$\boldsymbol{N}$ は偶対称集合である．

なお，集合 $\boldsymbol{N}$ の上での (0,2) 補間多項式の存在性と一意性の証明は文献 1) に与えられている．

(昭和52年4月11日受付)
(昭和53年2月10日再受付)