

特別なカードを含む神経衰弱ゲームの 勝率最大化戦略

坂元 香菜美^{†1} 篠田 正人^{†2}

神経衰弱とよばれるカードゲームに、ある特別なカードを取ったほうが勝ちというルールを導入する。2人のプレイヤーがこのゲームをするときの勝率を最大化する戦略について考察し、両者が最善を尽くしたときこのゲームが後攻有利であることを述べる。

Optimal Strategies of the Memory Game with Special Cards

KANAMI SAKAMOTO^{†1} and MASATO SHINODA^{†2}

We consider a modified version of *The Memory Game*, where we define that the winner of the game is the player possessing the pair of special cards. We study the optimal strategies which maximize the winning probability in the case of 2-player game, and we show that the player to flip second has an advantage over the opponent.

1. 概要

1.1 ゲームの設定

よく知られたトランプゲームの「神経衰弱」を簡略化したゲームを考え、プレイヤーが取るべき戦略と、各プレイヤーが最善を尽くした場合の手番による有利不利について考察

する。これまでに、取るカード枚数の期待値を最大にする戦略について Zwick-Paterson¹⁾ で、相手より多くのカードを取る確率を最大にする戦略については篠田²⁾ で考察されている。これらの先行研究については次節で述べる。神経衰弱ゲームのこうした数学的考察については坂井³⁾ の解説記事も参照されたい。本研究では「このカードを取れば勝ち」という特別なカードを含む神経衰弱ゲームを考え、そこでの勝率最大化戦略について調べる。

以下、ゲームの設定について詳しく述べる。

- (R1) ゲームは甲、乙の2人のプレイヤーが行う。甲が先攻、乙が後攻とする。
- (R2) $1, 1, 2, 2, \dots, N-1, N-1, N, N$ の数字のついた、全部で $2N$ 枚のカードを用いる。最初に、すべてのカードを場に伏せてランダムに並べる。
- (R3) 手番のプレイヤーはカードを1枚選んで表向きにする。さらにカードをもう1枚選び、先に選んだカードと同じ数字であれば場からその2枚を取る。このとき手番は移動せず、同じプレイヤーが再びカードを開けていく。選んだ2枚のカードの数字が異なれば、その2枚を裏向きにして、手番は相手に移る。
- (R4) 1の数字のカードのペアを取ったほうが勝ちとなり、勝ったプレイヤーは1ポイントを獲得する。負けたプレイヤーの獲得ポイントは0である。
- (R5) どちらのプレイヤーもいつまでも1の数字のカードを取れない場合はゲームは引き分けとする。このとき、双方のプレイヤーが0.5ポイントずつ獲得する。

この論文で扱うゲームの特殊な点はルール (R4) であり、この設定では1以外のカードを取った枚数は勝敗には関係ないことに注意しておく。また、次のことを仮定する。

仮定 プレイヤーの記憶力は完璧であるとする。すなわち、プレイヤーは一度でも表に向けられたカード（既知のカード）の場所をすべて記憶しており、表向けるカードを選択するとき開け間違えることはないものとする。

ゲームの進行例を $N=3$ として述べる。まず甲が2と3を開けると、手番が乙に移る。次に乙がまだ表向けられたことのないカード（未知のカード）を1枚開けそれが2であったとすると、乙は既知の2を再び開けその2枚を取ることができる。続いて乙はまた未知のカードを開けそれが1であったとすると、乙は残りの未知のカード2枚のうち一方を開け、それが1であれば乙が勝ち、それが3であれば手番が甲に移り、その結果甲の勝ちとなる。

この進行例において、手番が乙に移った時点で乙は（外れると知りつつ）わざと既知の2と3を開けてパスをする、すなわち自分の手番を放棄し、相手に新たな情報を与えないプレーが可能である。このとき、自分の手番になった甲も同様にパスをする戦略が可能である。双方のプレイヤーがパスを選択すれば引き分けとなる。ルール (R5) はこのような場合

^{†1} 奈良女子大学大学院人間文化研究科

Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University

^{†2} 奈良女子大学理学部

Faculty of Science, Nara Women's University

に対応している。ただし、既知のカードが場がないとき（甲の最初の手番など）には必ず未知のカードを開けなければならないことに注意しておく。我々の目的は、勝率（＝獲得ポイントの期待値）を最大化するためにプレイヤーがどのような戦略を採るべきか、すなわち開けるカードを既知、未知いずれから選ぶかを定めることである。

1.2 先行研究との関連

神経衰弱に関する先行研究 1), 2) との関連について述べておく。いずれの論文でも、プレイヤーは 2 人で記憶力は完璧という仮定をおいている。1) では自分が取るカード枚数と相手を取るカード枚数の差の期待値を最大化する戦略を求めている。この目的に対してはプレイヤーはその時点で場にあるカードの状態から最善の戦略を考えればよく、過去に各プレイヤーが何枚カードを取ったかを気にする必要はない。2) では、多くのカードを取ったほうのプレイヤーの勝ちとするゲームを考察している。この設定では、各状態での最善の戦略は、その時点までにお互いが何枚のカードを取っているかにも依存して決まる。1), 2) いずれの研究でも、

- わざと既知のカードを開け、パスをする戦略が有効な場合がある
- 戦略の選択は、残りのカード枚数および既知のカード枚数の偶奇に大きく依存することがわかっている。本論文でのモデル設定では 1) 同様に、最善の戦略を定めるためにはその時点での場のカードの状態だけに注目すればよい。そして本モデルでは 1 でないカードの取得枚数は勝敗に関係がないため、先行研究の場合よりもパス戦略が多く現れることが予想される。そのパス戦略の中でも「数字の同じカードが 2 枚とも既知であるのに取らない」という強い意味でのパスが最善となる可能性があるため、考慮すべき戦略の幅が大きく広がっているのが特徴である。

2. 数学的な考察

2.1 可能な戦略

プレイヤーが手番において取り得る戦略を具体的に述べる。そのために、場のカードの状態 $F_{n,m,k}$, $G_{n,m,k}$ を以下のように定める。 $n, m, k \geq 0$, $m + k \leq n \leq N$ である。

$F_{n,m,k}$: 場に $2n$ 枚のカードがあり、そのうち m 種類の数字のカードは 2 枚とも既知、 k 種類のカードは 1 枚が既知である。1 のカードは 2 枚とも未知である。

$G_{n,m,k}$: 場に $2n$ 枚のカードがあり、そのうち m 種類の数字のカードは 2 枚とも既知、1 を含む k 種類のカードは 1 枚が既知である。

例えば場に 1,1,2,2,3,3,4,4 のカードが残っているとき、もし 3 のみの場所がわかっていれば

$F_{4,0,1}$, 1,2,2 の場所がわかっているときは $G_{4,1,1}$ と表す。定義から、 $F_{n,m,k}$ においては $m + k \leq n - 1$, $G_{n,m,k}$ においては $k \geq 1$ であることに注意しておく。状態 $F_{n,m,k}$, $G_{n,m,k}$ から双方のプレイヤーが最善の戦略を採ったときの手番側の獲得ポイントの期待値をそれぞれ $f(n, m, k)$, $g(n, m, k)$ と表す。例えば $f(2, 0, 0) = 1/3$, $g(2, 0, 1) = 2/3$ である。 $g(n, m, n - m) = 1$ が $0 \leq m \leq n - 1$ のすべてに対して成り立つことは明らかである。

状態 $F_{n,m,k}$ で考えられる戦略は以下の通りである。一見して不自然な戦略もあるが、その意味については次節で述べる。

(F1) 2 枚とも既知のカードを開けて取る。 ($m \geq 1$)

(F2) 既知のカードのうち数字の異なる 2 枚を開けてパスする。 ($m + k \geq 2$)

(F3) 未知のカードのうち 1 枚をまず開ける。

- (a) 開けたカードの数字が既知のカードと一致したとき (確率 $k/(2n - 2m - k)$)
 - (i) もう一方の既知のカードを開けて取る。
 - (ii) 別の既知のカードを開ける。 ($m + k \geq 2$)
 - (iii) 未知のカードを開ける。
- (b) 開けたカードが 1 であったとき (確率 $2/(2n - 2m - k)$)
 - (i) 別の既知のカードを開ける。 ($m + k \geq 1$)
 - (ii) 未知のカードを開ける。
- (c) 開けたカードが 1 でなく、既知のカードとも一致しなかったとき (確率 $(2n - 2m - 2k - 2)/(2n - 2m - k)$)
 - (i) 別の既知のカードを開ける。 ($m + k \geq 1$)
 - (ii) 未知のカードを開ける。

手番のプレイヤーはまず (F1),(F2),(F3) のどれを選ぶかを決め、(F3) を選んだ場合はさらに (a)(b)(c) について (i)(ii)(iii) のどれを選ぶかを指定しなければならない。従って、考えられる戦略は最大で $1 + 1 + (3 \times 2 \times 2) = 14$ 通りである。それぞれの状態での獲得ポイントの期待値を考えると次の漸化式が成り立つ。

$$f(n, m, k) = \max \left\{ f(n-1, m-1, k), 1 - f(n, m, k), \frac{k}{2n-2m-k} f_a(n, m, k) + \frac{2}{2n-2m-k} f_b(n, m, k) + \frac{2n-2m-2k-2}{2n-2m-k} f_c(n, m, k) \right\},$$

ただし

$$\begin{aligned}
 & f_a(n, m, k) \\
 = & \max \left\{ f(n-1, m, k-1), 1 - f(n, m+1, k-1), \right. \\
 & \left. \frac{1}{2n-2m-k-1} \times \left\{ (k-1)(1-f(n, m+2, k-2)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. 2(1-g(n, m+1, k)) + (2n-2m-2k-2)(1-f(n, m+1, k)) \right\} \right\}, \\
 & f_b(n, m, k) \\
 = & \max \left\{ 1 - g(n, m, k+1), \frac{1}{2n-2m-k-1} \times \right. \\
 & \left. \left\{ 1 + k(1-g(n, m+1, k)) + (2n-2m-2k-2)(1-g(n, m, k+2)) \right\} \right\}, \\
 & f_c(n, m, k) \\
 = & \max \left\{ 1 - f(n, m, k+1), \frac{1}{2n-2m-k-1} \times \right. \\
 & \left. \left\{ f(n-1, m, k) + 2(1-g(n, m, k+2)) + k(1-f(n, m+1, k)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2n-2m-2k-4)(1-f(n, m, k+2)) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

である。

状態 $G_{n,m,k}$ で考えられる戦略は以下の通りである。

- (G1) 2枚とも未知のカードを開けて取る。 ($m \geq 1$)
- (G2) 既知のカードのうち数字の異なる2枚を開けてパスする。 ($m+k \geq 2$)
- (G3) 未知のカードのうち1枚をまず開ける。
 - (a) 開けたカードの数字が既知のカードと一致したとき (確率 $(k-1)/(2n-2m-k)$)
 - (i) もう一方の既知のカードを開けて取る。
 - (ii) 別の既知のカードを開ける。
 - (iii) 未知のカードを開ける。
 - (b) 開けたカードが1であったとき (確率 $1/(2n-2m-k)$)
 - (i) もう一枚の1を開けて、勝ちとなる。
 - (c) 開けたカードが1でなく、既知のカードとも一致しなかったとき (確率 $(2n-2m-2k)/(2n-2m-k)$)
 - (i) 別の既知のカードを開ける。
 - (ii) 未知のカードを開ける。

従って、考えられる戦略は最大で $1+1+(2 \times 3) = 8$ 通りである。それぞれの状態での獲

得ポイントの期待値を考えると次の漸化式が成り立つ。

$$g(n, m, k) = \max \left\{ g(n-1, m-1, k), 1 - g(n, m, k), \frac{k-1}{2n-2m-k} g_a(n, m, k) + \right. \\
 \left. \frac{1}{2n-2m-k} + \frac{2n-2m-2k}{2n-2m-k} g_c(n, m, k) \right\},$$

ただし

$$\begin{aligned}
 & g_a(n, m, k) \\
 = & \max \left\{ g(n-1, m, k-1), 1 - g(n, m+1, k-1), \frac{1}{2n-2m-k-1} \times \right. \\
 & \left. \left\{ (k-2)(1-g(n, m+2, k-2)) + (2n-2m-2k)(1-g(n, m+1, k)) \right\} \right\}, \\
 & g_c(n, m, k) \\
 = & \max \left\{ 1 - g(n, m, k+1), \frac{1}{2n-2m-k-1} \times \left\{ g(n-1, m, k) + \right. \right. \\
 & \left. \left. (k-1)(1-g(n, m+1, k)) + (2n-2m-2k-2)(1-g(n, m, k+2)) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

である。

ここで考察する最善の戦略とは、それぞれの状態 $F_{n,m,k}$, $G_{n,m,k}$ で $f(n, m, k)$, $g(n, m, k)$ を最大化する戦略のことである。このゲームでは場にあるカードの枚数および未知のカードの枚数は単調減少であるから、未知のカード枚数が少ない場合から順に漸化式に値を代入することで最善の戦略がすべて定まり、最終的に初期状態での甲の獲得ポイントの期待値 $f(N, 0, 0)$ まで求めることができる。本研究では $N \rightarrow \infty$ とし、各状態での最善の戦略は何か、および $f(N, 0, 0)$ の値の漸近挙動、すなわちこのゲームで先攻後攻のどちらが有利なのかについて考察していく。

2.2 パス戦略の意味

前節で述べた様々な戦略には、外れるとわかっていながらわざと既知のカードを開ける(パスをする)ものが多く含まれている。本節では具体例を通して、プレイヤーがパスをする意味を説明する。場に1,1,2,2,3,3,4,4の8枚のカードが残っており、そのうちの2,3が1枚ずつ既知であり(状態 $F_{4,0,2}$)、乙の手番であるとする。

- 乙がここで未知のカードを1枚開け、それが4であったとする。このとき、乙は次にもう1枚未知のカードを開けてそれが4ならそのまま手番を継続することができる。しかし、開けたカードが1であると次は甲の手番で1,2,3,4が1枚ずつすべて既知となり、甲はすべてのカードを取ることができる。従って、乙は最初に4を開けた時点で未知の

カードを開けず、既知の2をわざと開けて手番を放棄し相手に余計な情報を与えない戦略が有効となる。この有効性は簡単な計算により確かめられる。

- 上記の場面で乙が最初に開けたカードが2である場合を考えよう。このとき、乙は既知の2を開けてカードを取り手番を継続することができる。このようにカードを取った後の状態 $F_{3,0,1}$ での、獲得ポイントの期待値は $f(3,0,1) = 1/3$ である。これに比べ、既知の2を開けずわざと既知の3を開け、相手に手番を押しつけた場合の乙の獲得ポイントの期待値は $1 - f(4,1,1) = 1/2$ であり、取れるカードをわざと取らないというパス戦略が有効となる。すなわち、2のカードを取ってしまった状態 $F_{3,0,1}$ では既知のカードを2枚開けてパスする戦略が不可能となるために不利益が生じているので、「将来パスができなくなるくらいならカードを取らないで相手に手番を渡したほうがましである」と言えるのである。この意味のパスの可能性は1), 2)でも指摘されている。

最初の場面に戻ると、乙は未知のカードを開けず既知の2,3を開けてパスするのが最善策であり、手番を渡された甲も同様にパスをして引き分け、すなわち $f(4,0,2) = 1/2$ という結論になる。このように最初からパスが可能な場面では $f(n, m, k) \geq 1/2$ および $g(n, m, k) \geq 1/2$ が保証される。

2.3 戦略の絞り込み

前節までで述べたように各場面 $F_{n,m,k}$ および $G_{n,m,k}$ で考慮すべき戦略は多くあるが、そのうち最善でないことがわかるものを棄てて、調べる対象となる戦略を絞ることにする。以下のことが数学的に証明される。

命題 2.1 以下のことが成り立つ。

- (1) $m + k \geq 2$ ならば $f(n, m, k) \geq 1/2$ であり、 $m \geq 2$ ならば $f(n, m, k) = f(n - m + 2, 2, k)$.
- (2) すべての n, m, k に対して $g(n, m, k) = g(n - m, 0, k)$ であり $g(n, m, k) \geq 1/2$.

この命題は、自分の手番で取れるカードがあるのにわざと取らない戦略が現れる場面がそれほどないことを示している。(1)は、1のカードが2枚とも未知である場面では取れるのに取れないカードのペア数 m は2以下に制限して構わないことを意味している。直観的に言えば「将来パスしたいときのためには2ペア残しておけば十分」ということである。(2)は、1のカードが1枚既知である場面では取れるカードはすべて取って構わない、すなわち「将来パスができなくなって困る」ことはないという意味である。この結果、例えば $F_{n,m,k}$, $m + k \geq 3$ の状況では考察すべき戦略は6通り、などと対象を絞ることが可能になる。

命題 2.1 の証明 $m + k \geq 2$ のときは最初からパスが可能であるから(1)の前半は明らか。(1)

の後半は n に関する帰納法によって示せる。(2)について、等式 $g(n, m, k) = g(n - 1, m - 1, k)$ が成り立つことを示そう。戦略 (G1) の存在から $g(n, m, k) \geq g(n - 1, m - 1, k)$ であることは明らかである。もし $g(n, m, k) > g(n - 1, m - 1, k)$ であるとすれば、そのとき以下のいずれかが成り立っているはずであることが漸化式からわかる。

- $m + k = 2$, すなわち $m = k = 1$. これは、揃っているカードを取ってしまうことでパスができなくなり不利益が生じる可能性のためである。
- $g(n - 1, m, k - 1) > g(n - 2, m - 1, k - 1)$ または $g(n - 1, m, k) > g(n - 2, m - 1, k)$. これは、未知のカードを開けたときに既知のカードと揃い、手番がそのまま続いたときを考えている。

これ以外の、相手に手番が渡る状況では予め取れるカードは取っておいたほうがよい。

そこでまず $g(n, 1, 1) = g(n - 1, 0, 1)$, すなわち前者の状況でカードを取っても損をしないことを示す。これが示されれば、後者の状況は n に関する帰納法によって示され証明が完結する。自分の手番で未知のカードを1枚も開けずパスするのは、未知のカードを開けたときの獲得ポイントの期待値が $1/2$ 以下の場合に限られる。そこで任意の n に対して

$$g(n, 0, 1) \geq \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

を示せば十分である。そのために補題を1つ準備しておく。

補題 2.2 次の不等式が成り立つ。

$$g(n, 0, 1) \leq \frac{n}{2n - 1}. \tag{2.2}$$

補題 2.2 の証明 命題 2.1(1) より $g(n, 0, 2) \geq 1/2$, $g(n, 0, 3) \geq 1/2$ であるから

$$\begin{aligned} g(n, 0, 1) &= \frac{1}{2n - 1} + \frac{2n - 2}{2n - 1} \max \left\{ 1 - g(n, 0, 2), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2n - 2} g(n - 1, 0, 1) + \frac{2n - 4}{2n - 2} (1 - g(n, 0, 3)) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2n - 1} + \frac{2n - 2}{2n - 1} \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2n - 2} + \frac{n - 2}{2n - 2} \right\} \\ &= \frac{n}{2n - 1}. \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

以下、不等式 (2.1) を数学的帰納法を用いて証明する。直接計算により (2.1) は $n < 3$ で確かに成り立つことがわかる。以下 $g(n - 1, 0, 1) \geq 1/2$ を仮定し (2.1) を示す。 g の定義から

$$g(n, 0, 1) \geq \frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1}(1-g(n, 0, 2)), \quad (2.3)$$

$$g(n, 0, 1) \geq \frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} \left\{ \frac{1}{2n-2}g(n-1, 0, 1) + \frac{2n-4}{2n-2}(1-g(n, 0, 3)) \right\} \quad (2.4)$$

である。ここで仮に (2.3) の右辺 $< 1/2$ とすると

$$g(n, 0, 2) > \frac{2n-1}{2(2n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n-2)} \quad (2.5)$$

である。このときに (2.4) の右辺 $\geq 1/2$ であることを示せばよい。漸化式より

$$\begin{aligned} & g(n, 0, 2) \\ &= \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} \max \left\{ g(n-1, 0, 1), 1-g(n, 1, 1), \frac{2n-4}{2n-3}(1-g(n, 1, 2)) \right\} \\ & \quad + \frac{2n-4}{2n-2} \max \left\{ 1-g(n, 0, 3), \frac{1}{2n-3}g(n-1, 0, 2) + \frac{1}{2n-3}(1-g(n, 1, 2)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2n-6}{2n-3}(1-g(n, 0, 4)) \right\} \end{aligned}$$

である。ここで帰納法の仮定から

$$\max \left\{ g(n-1, 0, 1), 1-g(n, 1, 1), \frac{2n-4}{2n-3}(1-g(n, 1, 2)) \right\} = g(n-1, 0, 1)$$

が成り立ち、また $g(n-1, 0, 2) \leq g(n, 1, 2)$ であることから

$$g(n-1, 0, 2) + (1-g(n, 1, 2)) + (2n-6)(1-g(n, 0, 4)) \leq n-2$$

となる。よって

$$g(n, 0, 2) \geq \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2}g(n-1, 0, 1) + \frac{2n-4}{2n-2} \max \left\{ 1-g(n, 0, 3), \frac{n-2}{2n-3} \right\}$$

となる。ここでもし $1-g(n, 0, 3) \leq (n-2)/(2n-3)$ であれば、(2.2) を用いて

$$g(n, 0, 2) \leq \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2}g(n-1, 0, 1) + \frac{2n-4}{2n-2} \frac{n-2}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2n-2)(2n-3)}$$

となり、 $n \geq 3$ のとき (2.5) に反することになる。従って

$$g(n, 0, 2) = \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2}g(n-1, 0, 1) + \frac{2n-4}{2n-2}(1-g(n, 0, 3))$$

としてよい。この式を (2.4) に代入すると

$$g(n, 0, 1) \geq \frac{2n-2}{2n-1}g(n, 0, 2) > \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-1}{2(2n-2)} = \frac{1}{2}$$

となる。(証明終)

$G_{n,m,k}$ の状態では揃っている m ペアはすべて取ってよいことがわかったため、 $m=0$ の場合のみを考えれば十分である。以下では $G_{n,0,k}, g(n, 0, k)$ をそれぞれ簡単に $G_{n,k}, g(n, k)$ と書くことにする。すべての n, k について $g(n, k) \geq 1/2$ であるので、 $G_{n,k}$ において戦略の選択肢は3つしかなく、

0-ply : 2枚とも既知のカードを開け、パスをする。($k \geq 2$ のとき可能)

1-ply : まず未知のカードを1枚開け、もし既知のカードと数字が揃わなければ2枚目は既知のカードを開けてパスをする。

2-ply : 未知のカードを1枚開け、もし既知のカードと数字が揃わなくてももう1枚未知のカードを開ける。

のいずれかとなる。このとき $g(n, k)$ は再帰的に

$$\begin{aligned} g(n, k) = \max & \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2n-k} + \frac{k-1}{2n-k}g(n-1, k-1) + \frac{2n-2k}{2n-k} \times \right. \\ & \left. \max \left\{ 1-g(n, k+1), \frac{1}{2n-k-1} \left\{ g(n-1, k) + (k-1)(1-g(n-1, k)) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + (2n-2k-2)(1-g(n, k+2)) \right\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

と表されることになる。上の式の最初の $1/2$ は 0-ply に相当し、 $k \geq 2$ のとき実行可能である。この $g(n, k)$ についての基本的な評価式を2つ挙げておく。

命題 2.3 以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \leq g(n, k) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n-2k+1}, \quad g(n, k) + g(n, k+1) \geq 1 + \frac{1}{2(2n-k)}.$$

これらの不等式は漸化式から直接導ける。証明は省略する。

3. カード枚数が多いときの漸近挙動

3.1 1のカードが1枚既知である場合の漸近挙動

前にも述べたように、具体的な N の値についてそれぞれの状態での最善の戦略を再帰的に決定することは可能である。場の残りカード枚数が $2n$ 枚であり、1のカードのうち1枚が既知である状態 $G_{n,k}$ について計算を行い最善の戦略を調べてみると、次の傾向があることがわかる。

- $n-k$ が偶数のとき 1-ply が最善の戦略である。
- $n-k$ が奇数かつ $k < (2n+1)/3$ のとき、2-ply が最善の戦略である。

- $n - k$ が奇数かつ $k \geq (2n + 1)/3$ のとき、0-ply が最善の戦略である。

この傾向をもとに、状態 $G_{n,k}$ における戦略を以下の通り仮定する。本来は命題 2.3 などを用いて数学的に証明すべき事項であるが、現時点では未解決である。

仮定 1 $n - k$ が偶数のとき 1-ply が最善の戦略である。

仮定 2 $n - k$ が奇数のとき 0-ply または 2-ply が最善の戦略である。

この仮定のもとで $g(n, k)$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近挙動を求めると以下ようになる。

- $n - k$ が偶数かつ $k/n \rightarrow x$ のとき

$$g(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4(1-x)n} - \frac{6-7x}{32(1-x)^3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4(1-x)n} - \frac{1}{8(1-x)^2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

- $n - k$ が奇数かつ $k/n \rightarrow x$ のとき

$$g(n, k) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2-3x}{32(1-x)^3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} & x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

このように、 $n - k$ が奇数であるときは $k/n = 2/3$ のところを境に最善の戦略が 2-ply から 0-ply に変わることが確かめられる。この漸近挙動の n^{-2} までの項を $n = 100$ の場合の実際の値と比較したものが図 3.1 であり、この n^{-2} までの近似が非常によい値を示すことが確かめられる。

3.2 1 のカードが 2 枚とも未知である場合の漸近挙動

場の残りカードの状態が $F_{n,0,k}, F_{n,1,k}, F_{n,2,k}$ のときも具体的な n の値が与えられれば直接計算によって最善の戦略を求めることが可能であり、次の傾向があることがわかる。

- $k \geq 1$ であれば $f(n, 2, k) = f(n - 1, 1, k)$ である。すなわち、場に 2 枚ともそろっているペアが 2 つ以上あるときは、1 つを残して残りのペアを取って差し支えない。
- $f(n, 1, k) > f(n - 1, 0, k)$ となる n, k の組は多く存在する。すなわち、場に 2 枚ともそろっているペアが 1 つしかない場合は、それを取ると損をすることがある。

以下の項目では $m = 0$ または $m = 1$ とする。

- $n - m - k$ が偶数かつ $m + k \geq 2$ であれば 0-ply が最善の戦略である。
- $n - m - k$ が奇数かつ $k < (2n + 1)/3$ のとき、1-ply が最善の戦略である。
- $n - m - k$ が奇数かつ $k \geq (2n + 1)/3$ のとき、0-ply が最善の戦略である。

漸近的な挙動を調べるために $f(n, 1, k) > f(n - 1, 0, k)$ がどのようなときに成り立つかを知りたいが、これは計算結果から明確には読み取れず証明も出来ていない。そこで、すべ

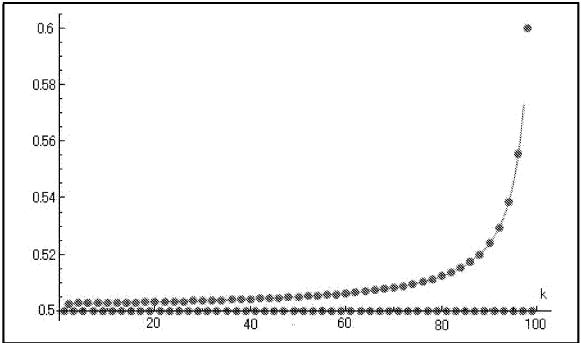


図 3.1 $g(100, k)$ の値
Fig. 3.1 The values of $g(100, k)$

での $F_{n,m,k}$ に対して最善の戦略を決定することはここでは行わず、実際のゲームに現れ得る場面のみにおいて戦略を考察することにする。

ゲーム開始からの進行を考える。最初の甲の手番で甲が開ける 2 枚のカードの種類により、

$$f(N, 0, 0) = \frac{1}{N(2N-1)} + \frac{2(2N-2)}{N(2N-1)}(1 - g(N, 2)) + \frac{N-1}{N(2N-1)}f(N-1, 0, 0) + \frac{(N-1)(2N-4)}{N(2N-1)}(1 - f(N, 0, 2))$$

となる。ここで右辺に現れる $g(N, 2)$ の項の漸近挙動は N の偶奇に依存していたため、 $f(N, 0, 0)$ の漸近挙動も N の偶奇に依存する。このように偶奇性に注意して、 N が十分大きいときのゲーム開始直後の進行が次のようになることがわかる。なお、ここでの考察には仮定 1,2 以外の新たな仮定は用いていないことを注意しておく。

N が偶数のとき 甲が 2 枚カードを開く。開いたカードが

- 2 枚とも 1 であれば甲の勝ち。
- 2 枚とも 1 でない同じ数字であればそれらを取ることにになり、改めて N が奇数の場合のゲームとなって開始されるのと同じである。
- 1 枚が 1 であれば、状態 $G_{N,2}$ で乙の手番となってゲーム続行。
- 2 枚の数字が異なりどちらも 1 でなければ状態 $F_{N,0,2}$ で乙の手番となる。乙は 0-ply を選択して、引き分けでゲームが終了する。

N が奇数のとき 甲が2枚カードを開く. 開いたカードが

- 2枚とも1であれば甲の勝ち.
- 2枚とも1でない同じ数字であれば, 改めて N が偶数の場合のゲームとなって開始されるのと同じである.
- 1枚が1であれば, 状態 $G_{N,2}$ で乙の手番となってゲーム続行.
- 2枚の数字が異なりどちらも1でなければ状態 $F_{N,0,2}$ で乙の手番となる. 乙はまず未知のカードを1枚開き,
 - そのカードの数字が既知のカードと同じであればそれらを取る. ※
 - 1であれば, もう1枚未知のカードを開く.
 - 既知のカードと揃わずかつ1でもなければ, 既知のカードを開く. このとき状態 $F_{N,0,3}$ で手番は甲に移り, 甲が 0-ply を選択して引き分けでゲームが終了する.

※の場面 ($F_{N-1,0,1}$) では, 乙が未知のカードを1枚開き,

- そのカードが既知のカードと同じであればそれらを取って $F_{N-2,0,0}$ の状態となり, 改めて N が偶数の場合のゲームとなって乙の先攻で開始されるのと同じである.
- 1であれば, もう1枚未知のカードを開く.
- 既知のカードと揃わずかつ1でもなければ, 既知のカードを開く. このとき手番は甲に移り, 甲が 0-ply を選択して引き分けでゲームが終了する.

このとき, $f(N,0,0)$ の $N \rightarrow \infty$ での漸近挙動は

$$f(N,0,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) & N \text{ が偶数のとき} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{16N^3} + o\left(\frac{1}{N^3}\right) & N \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

となる. 具体的な $f(2M-1,0,0)$, $f(2M,0,0)$ の値をそれぞれ $M \leq 50$ について求め $1/2$ との差を計算してプロットしたものが図 3.2, 図 3.3 である. $f(N,0,0)$ は N についての最初の項の近似で十分良い値が求められることがわかる.

以上の結果から, 双方のプレイヤーが最善の戦略を採る限り $F_{n,m,k}$, $m \geq 1$ の状況は現れないことになる. 従って, 既知のカードの数字が2枚揃っているのに取らない状況は, どちらかのプレイヤーが最善でない戦略を採らないと生じない.

3.3 ゲームの結論

以上の解析結果をもとに, このゲームの結論を述べる.

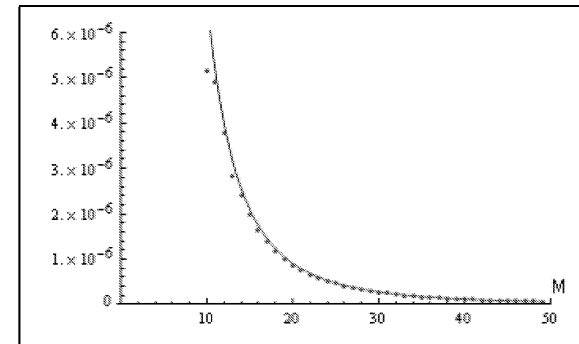


図 3.2 $\frac{1}{2} - f(2M-1, 0, 0)$ の値
Fig. 3.2 The values of $\frac{1}{2} - f(2M-1, 0, 0)$

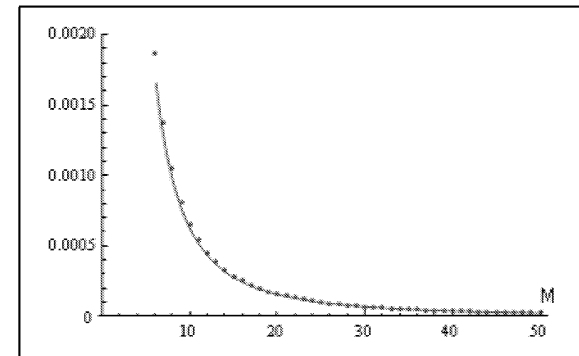


図 3.3 $\frac{1}{2} - f(2M, 0, 0)$ の値
Fig. 3.3 The values of $\frac{1}{2} - f(2M, 0, 0)$

- N の偶奇に関わらず, このゲームは後攻が有利である.
- N が偶数のときのほうが後攻の有利の度合いが大きい.
- このゲームでは引き分けに終わる確率が非常に大きい.

神経衰弱ゲームの先行研究において, ゲーム開始時点での有利不利は N の偶奇によって異なり N が奇数なら先攻有利, N が偶数なら後攻有利とされていたが, 本研究での特別なカードを含むルールでは N の偶奇に関わらず後攻が有利という新しい結果が得られた. ただし N が偶数のときのほうが先攻後攻の差が大きく N が奇数のときは比較的互角に近い,

という意味で N の偶奇性は結論に影響している。

このゲームの進行を最初から見ると、引き分けに終わらず実際に勝負がつくためには最初の甲または乙の手番のうちに 1 のカードが現れなければならない。この確率は $O(N^{-1})$ のオーダーであり、このゲームが引き分けとなる確率は $N \rightarrow \infty$ で 1 に収束する。すなわち、最初のカード枚数が多ければこのゲームはほとんど決着がつかず引き分けに終わる。甲または乙の最初の手番で 1 のカードが現れた場合、その後の状態 $G_{n,k}$ においてプレイヤーは $n-k$ が偶数のときは 1-ply を、 $n-k$ が奇数のときは 2-ply を選択する。そして場における未知のカードの割合が少なくなり $k/n \geq 2/3$ となると、 $n-k$ が奇数のときは 0-ply を選択することとなって引き分けでゲームが終了する。したがって、たとえ最初のどちらかの手番で 1 が現れてゲームが進行しても、もう 1 枚の 1 が現れるのが遅いとゲーム中盤で双方がパスを繰り返し引き分けに終わってしまう。その意味で、実際にプレイするには退屈なゲームであるといえる。

4. 今後の課題

本研究において我々は実際にプレイするよりもかなり簡略化された神経衰弱ゲームにおける戦略とゲームの結論を調べた。この簡略化による特徴、

1. 特別なカードを導入している
2. プレイヤーを 2 人としている
3. 記憶力を完璧と仮定している

の 3 点の一般化について順を追って説明する。

1. 特別なカードを導入したルールではパス戦略の重要性が上がるため、様々な戦略の可能性を追求するという意味があったが、一方でパスが増えると引き分けが多くなるという面もある。実際に行うゲームを退屈でないものするためには、パス戦略に何らかの制限を加えることが必要である。今回のルールに「どちらも 1 のカードを取っていない場合は他のカードを多く取ったほうが勝ち」という勝敗判定を加えればその時点で負けているプレイヤーのパス戦略が制限されるため引き分けは多少減るが、それでも両者の取った枚数が同じ場面（ゲーム開始直後など）でのパス戦略は減らず、引き分けをすべて無くすものではない。また、勝ちに 3 ポイント、引き分けに 1 ポイント与えることにより勝ちを優遇するルールも考えられるが、その場合は「どちらかがパスを避けたら両者の獲得ポイントの期待値は上がるが自分からは勝負したくない」という状況があり得るため、プレイヤーの意思決定の方法を適切に定める必要が生じる。

2. 実際に神経衰弱ゲームが行われる場合に 3 人以上のプレイヤーがいることが一般的であるため、参加人数を 2 人より多くすることは当然の課題である。プレイヤーを増やすことで戦略選択は複雑になる。本研究のように特別なカードを取る取らないで勝敗が決まる設定では 2 位と 3 位以下に差をつけないのが自然であるが、取った枚数によって 2 位以下の順位も定める場合、1 位になることを諦めたプレイヤーが自分の順位の競争相手に取らせるくらいなら 1 位のプレイヤーに取らせたほうがましと考えることもあり得るため、数学的解析は困難であるが戦略的な面白さはかなり増す。

3. 数学的な興味から言えばプレイヤーの記憶力を完璧と仮定したときのゲームの結論は重要であるが、現実のゲームにおいては当然記憶力に限りがある。不完全な記憶力の設定方法も「記憶できる枚数が有限」「記憶できる時間が有限」など様々な場合が考えられる。こうした設定の下では、「単にパスをするのではなく、記憶を確かめるために既知のカードを開ける」などいろいろな戦略が生じて面白さが増す。なお、本研究のように特別なカードを導入したルールでプレイヤーの記憶力が 0 であれば、プレイヤーは各手番でランダムに 2 枚ずつカードを開けその結果先攻有利（勝率 $(1/2) + (1/8)N^{-2} + o(N^{-2})$ ）となり、記憶力の度合によって先攻後攻の有利不利も変わることがわかる。

後者 2 つの一般化については、シミュレーションによる戦略分析が不可欠となる。実際にプレイされるゲームに即し、トランプ 52 枚 1 セットの場合にシミュレーションを実行するのも興味深い課題である。

5. まとめ

特別なカードを取ったほうが勝ちという神経衰弱ゲームにおいては、カード枚数に関わらず後攻がやや有利である。カードのペア数が偶数の場合のほうが先攻後攻の差が大きい。各場面での戦略選択は、場のカード枚数および未知のカード枚数の偶奇性に依存する。十分多い枚数のカードでゲームを行う場合は、双方がパスを繰り返すことによって引き分けとなる可能性が高い。

参考文献

- 1) Zwick,U. and Paterson,M.S.: The memory game, *Theoretical Computer Science* 110, pp.169-196 (1993).
- 2) 篠田正人: Winning strategy of the memory game, *IPPSJ Symposium Series* Vol.2008, No.11, pp.181-188 (2008).
- 3) 坂井公: パズルの国のアリス, 日経サイエンス 2009 年 9 月号, pp.69-71.