情報処理学会研究報告
IPSJ SIG Technical Report

Vol.2010-MPS-78 No.10
2010/5/21

総頂点間経路長を最小にする完全２分木の同一階層内２辺追加モデル

澤　田　　　清[†1]

本研究では，高さ H の完全 2 分木に対して，深さ N の同じ階層に 2 辺を追加するモデルを考える．ここでは，完全 2 分木の全頂点対について最短経路長を合計した総頂点間経路長を最小にする最適深さ N^* を求めた．最適深さは完全 2 分木の高さ H に関係なく $N^* = 2$ となった．

A Model of Adding Two Edges in a Level of a Complete Binary Tree Minimizing Total Path Length

Kiyoshi Sawada[†1]

This study proposes a model of adding two edges to the same level of depth N in a complete binary tree of height H. An optimal depth N^* is obtained by minimizing the total path length which is the sum of lengths of the shortest paths between every pair of all nodes in the complete binary tree. The optimal depth is $N^* = 2$, irrespective of height H.

1. はじめに

ピラミッド組織構造は上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造であり，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木として表すことができる[1),2)]．このとき，根付き木の各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．筆者らは，完全 2 分木型のピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加階層を求めるモデルをいくつか提案した[3)–6)]．そこでは，完全 2 分木の全頂点対の最短経路長を合計した総頂点間経路長が最小となるような関係追加階層を解析的に求めた．

文献 3) では，高さ H の完全 2 分木型組織構造の同じ階層内で 2 人のメンバー間の関係を追加するモデルを提案した．すなわち，高さ H の完全 2 分木に対して，根以外の共通祖先を持たない深さ N の頂点間に辺を追加する場合に，総頂点間経路長を最小にする最適深さ N^* を求めた．本発表では，完全 2 分木の深さ N の同じ階層に 2 辺を追加するモデルを考える．

2. 問題設定

高さ $H(H = 2, 3, \ldots)$ の完全 2 分木に対して，深さ $N(N = 2, 3, \ldots, H)$ の階層に 2 辺を追加する．ここで，完全 2 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が 2 である 2 分木を指す[7)]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

なお，同じ深さの階層に 2 辺を追加する方法は複数あるが，ここでは根以外の共通祖先を持たない頂点間に 2 つの辺を追加する．すなわち，追加する 2 辺の頂点対を (n_1^X, n_1^Y)，(n_2^X, n_2^Y) とすると，n_1^X と n_1^Y の最深共通祖先の深さおよび n_2^X と n_2^Y の最深共通祖先の深さを 0 とする．また，n_1^X と n_2^X の最深共通祖先の深さおよび n_1^Y と n_2^Y の最深共通祖先の深さは 1 とする．

完全 2 分木の 2 頂点 v_i と $v_j(i, j = 1, 2, \ldots, 2^{H+1} - 1)$ の間の最短経路長を $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j} = l_{j,i}$，$l_{i,i} = 0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したような 2 辺追加後の 2 頂点 v_i，v_j 間の最短経路長を $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j} - l'_{i,j}$ は辺追加により 2 頂点間の最短経路長がどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j} - l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．ここで，総頂点間短縮経路長を最大にすることは，総頂点間経路長を最小にすることを意味する．

3. 総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，上述した同じ深さの階層への 2 辺追加に対して，総頂点間短縮経路長を定式化する．3.1 で同じ深さの階層への 1 辺追加に対する総頂点間短縮経路長を示し，それを拡張

†1 流通科学大学
University of Marketing and Distribution Sciences

する形で 2 辺追加の定式化を示す.

3.1 1 辺追加の総頂点間短縮経路長

ここでは，高さ $H(H = 1, 2, \ldots)$ の完全 2 分木に対して，根以外の共通祖先を持たない深さ $N(N = 1, 2, \ldots, H)$ の 2 頂点間に 1 辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長の定式化を示す[3)].

ここで，追加する辺の頂点を v_0^X，v_0^Y とし，v_0^X の祖先の中で深さ $N-k$ の頂点を $v_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-1)$，$v_0^Y$ の祖先の中で深さ $N-k$ の頂点を $v_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ とする．また，v_0^X と v_0^Y の子孫の集合をそれぞれ V_0^X と V_0^Y と書く．ただし，子孫はその頂点自身も含むものとする．さらに，頂点 v_k^X の子孫の集合から v_{k-1}^X の子孫の集合を除いたものを $V_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-1)$，頂点 v_k^Y の子孫の集合から v_{k-1}^Y の子孫の集合を除いたものを $V_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ とする．

このとき，V_0^X と V_0^Y の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$A_H(N) = \{M(H-N)\}^2(2N-1) \tag{1}$$

と表される．ただし，$M(h)(h = 0, 1, 2, \ldots)$ は高さ h の完全 2 分木の頂点数を表す．次に，V_0^X と $V_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ の頂点間と，V_0^Y と $V_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$B_H(N) = 2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}\{M(H-i-1)+1\}(2i-1) \tag{2}$$

で与えられる．さらに，$V_k^X(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ と $V_k^Y(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ の頂点間の短縮経路長の総和は,

$$C_H(N) = \sum_{i=1}^{N-2}\{M(H-i-2)+1\}\sum_{j=1}^{i}\{M(H-N+j-1)+1\}(2i-2j+1) \tag{3}$$

となる．ただし,

$$\sum_{i=1}^{0} \cdot = 0\,, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0 \tag{5}$$

と定義する．

以上より，根以外の共通祖先を持たない深さ $N(N = 1, 2, \ldots, H)$ の 2 頂点間に 1 辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ は,

$$\begin{aligned} S_H(N) &= A_H(N) + B_H(N) + C_H(N) \\ &= \{M(H-N)\}^2(2N-1) + 2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}\{M(H-i-1)+1\}(2i-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-2}\{M(H-i-2)+1\}\sum_{j=1}^{i}\{M(H-N+j-1)+1\}(2i-2j+1) \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

3.2 2 辺追加の総頂点間短縮経路長

ここでは，高さ $H(H = 2, 3, \ldots)$ の完全 2 分木に対して，2. で述べたように深さ $N(N = 2, 3, \ldots, H)$ の階層に 2 辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長を定式化する．

2 辺それぞれの頂点対は根以外の共通祖先を持たないので，各辺の追加による短縮経路長は 3.1 で求めた $S_H(N)$ であるが，2 辺で共通の短縮部分があるため，その短縮経路長を減じる必要がある．2 辺で共通の短縮経路長は $2\{M(H-N)\}^2$ であるので，2 辺を追加する場合の総頂点間短縮経路長 $T_H(N)$ は，式 (6) を用いて

$$\begin{aligned} T_H(N) &= 2S_H(N) - 2\{M(H-N)\}^2 \\ &= \{M(H-N)\}^2(4N-4) + 4M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}\{M(H-i-1)+1\}(2i-1) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{N-2}\{M(H-i-2)+1\}\sum_{j=1}^{i}\{M(H-N+j-1)+1\}(2i-2j+1) \end{aligned} \tag{7}$$

と定式化される．

4. 最適辺追加深さ

ここでは，式 (7) の $T_H(N)$ を最大にする辺追加深さ N^* を求める．

式 (7) に

Vol.2010-MPS-78 No.10
2010/5/21

$$M(h) = 2^{h+1} - 1 \tag{8}$$

を代入して整理すると，次式が得られる．

$$T_H(N) = -2^{2H-2N+3} + (3N-1)\,2^{2H-N+1} + 3 \cdot 2^{H-N+3} - 3 \cdot 2^{H+2} + 4N - 4. \tag{9}$$

ここで，$T_H(N)$ の N に関する差分を $\Delta T_H(N)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta T_H(N) &\equiv T_H(N+1) - T_H(N)\\ &= 3 \cdot 2^{2H-2N+1} - (3N-4)\,2^{2H-N} - 3 \cdot 2^{H-N+2} + 4\\ &< 0\end{aligned} \tag{10}$$

となる．ただし，$N = 2, 3, \ldots, H-1$ である．したがって，総頂点間短縮経路長 $T_H(N)$ を最大にする最適辺追加深さは，高さ H に関係なく $N^* = 2$ である．

5. おわりに

本研究では，高さ H の完全 2 分木型組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような追加的関係を求める目的で，同じ階層内で 2 つの関係を追加するモデルを提案した．そこでは，総頂点間短縮経路長を定式化し，それを最大にする追加辺の深さを解析的に求めた．最適辺追加深さは，完全 2 分木の高さに関係なく $N^* = 2$ となった．これは，組織の階層数に関係なくトップから 2 つ下の階層での関係形成が最も効率的であることを示している．

参考文献

1) Robbins, S.P.: *Essentials of Organizational Behavior, 7th ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J. (2003).
2) Takahara, Y. and Mesarovic, M.: *Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2003).
3) 澤田　清，宇野　斉：完全 2 分木型組織構造への関係追加モデル，日本応用数理学会論文誌， Vol.10, No.4, pp.335–346 (2000).
4) 澤田　清：総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化，日本応用数理学会論文誌， Vol.13, No.3, pp.353–360 (2003).
5) Sawada, K. and Wilson, R.: Models of Adding Relations to an Organization Structure of a Complete K-ary Tree, *European Journal of Operational Research*, Vol.174, No.3, pp.1491–1500 (2006).
6) Sawada, K.: A Model of Adding Relations in Two Levels to an Organization Structure of a Complete Binary Tree, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol.4, No.5, pp.1135–1140 (2008).
7) Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. and Stein C.: *Introduction to Algorithms, 2nd ed.*, MIT Press, Cambridge, Mass. (2001).