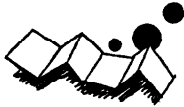


解説



環境汚染問題への有限要素法の応用†

松澤田 安 弘††

1. ま え が き

今日、環境問題は、エネルギー問題、食糧問題などとならんで、大きな社会問題の一つとなってきた。大気汚染、水質汚濁、原子力発電所からの温排水拡散など、公害問題の環境アセスメントにおいて、コンピュータ・シミュレーションの占める位置も、大きくなってきた。その一般的な内容は、与えられた境界条件、初期条件のもとに、ある微分方程式の解を求めるといものであるが、この際、多くの場合、電子計算機を用いて数値的に解くことになる。ところで、この数値解法の代表的なものには、従来、差分法が用いられてきたが、このほかの有効な手法に有限要素法がある。

有限要素法の長所としては、複雑な境界形状への適合性や、汎用プログラム作成の容易さなどがあげられるが、構造解析分野での長足の進歩を背景に、その応用範囲は、非構造分野にも、急速に拡大しつつある。本小文は、有限要素法の非構造問題への適用に関する研究^{1)~8)}、とくに、環境汚染問題への基礎的な適用の方法と、実際の応用例を中心に述べたものである*。なお、有限要素法自身の説明としては、文献9)がわかりやすいであろう。

2. 拡散・流動問題への適用

2.1 拡散問題への応用

有限要素法の、熱伝導方程式への適用については、Wilson, E. L. ら¹⁰⁾ (1966) が、また、2次元拡散問題への適用については、Guymon, G. L. ら¹¹⁾ (1970) が最初ではないかと思われる。また、差分法と有限要素法との関連についての研究も行われてきているが^{12)~14)}、ここでは、有限要素法の適用についてのみ、

ふれる。いま、つぎの2次元非定常拡散方程式を解くことを考える。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (1)$$

ここで、

C: 濃度 (ppm), u, v: x, y 方向の流速 (m/sec)

K_x, K_y: x, y 方向の拡散係数 (m²/sec) であり、境界条件は、C=C₀ (固定値) または、∂C/∂h=0 (h: 境界での外向き法線の方向余弦) (2) とする。

2.1.1 ガラーキン法による解析

いま、一要素内で、 $C = \sum_1^n N_i(x, y) C_i(t)$ とおく。

ここに、N_i: 形状関数、n: 一要素あたりの節点数、C_i: 節点での値、である。重み関数を N_i にとり、ガラーキン法を採用すると、グリーンンの定理から、式(2)の境界条件を考慮して、n個の連立方程式が、マトリクスの形で、つぎのように表わされる。

$$[P]\{\dot{C}\} + [D]\{C\} = 0 \quad (3)$$

ここで、マトリクス、 $[P]_{ij} = \sum_1^m \left\{ \int_{V^e} N_i N_j dx dy \right\}$, $[D]_{ij} = \sum_1^m \left\{ \int_{V^e} \left[N_i u_x \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + N_i v_y \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \times K_x \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) K_y \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\}$ である。

なお、[P] は対称マトリクス、[D] は、非対称マトリクスであり、n: 総節点数、m: 総要素数、V^e: 一要素の範囲である。いま、タイム・パラメータθを導入し、{時刻 (t-Δt) での式(3)} × (1-θ) + {時刻 (t) での式(3)} × θ を造り、(1-θ){Ċ} + θ{Ċ} = {C} + θ{C} - {C} / Δt とおく。次式を得る。

$$\left(\frac{[P]}{\Delta t} + [D]\theta \right) \{C\}_t = \left(\frac{[P]}{\Delta t} - [D](1-\theta) \right) \{C\}_{t-\Delta t} \quad (4)$$

したがって、式(4)の連立方程式を、順次、解いていくことになる。

2.1.2 変形ガラーキン法による解析

ガラーキン法の場合は、式(4)からわかるように非対称マトリクスを解かなければならない。したがって、

† The Application of Finite Element Method for Environmental Problems by Yasuhiro MATSUDA (Osaka DP Service Center, DP Service, IBM Japan, Ltd.).

†† 日本アイ・ビー・エム(株) DP サービス、大阪 DP サービス・センター

* 温排水拡散シミュレーションについては紙数の都合上、省略した。

ここでは、計算時間を少なくするために、式(4)左辺の $[D]$ マトリクスの対称化を考える。すなわち、マトリクスに含まれる移流項を、ある時刻で一定値をとるとし、ベクトル $\{F\}$ とみなすと、式(3)は、次式のようにおける。

$$[P]\{\dot{C}\} + [D]\{C\} + \{F\} = 0 \quad (5)$$

よって、式(4)は、つぎのように変形される。

$$\left(\frac{[P]}{\Delta t} + [D]\theta\right)\{C\}_i = \left(\frac{[P]}{\Delta t} - [D](1-\theta)\right)\{C\}_{i-\Delta t} - \{F(\theta\{C\}_i + (1-\theta)\{C\}_{i-\Delta t})\} \quad (6)$$

このとき、

$$[D_{ij}] = \sum_1^m \left\{ \int_{V_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} K_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} K_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \right\} \quad (7)$$

であり、対称マトリクスとなる。また、

$$\{F_i\} = - \sum_1^m \left\{ \int_{V_e} N_i Q dx dy \right\}$$

であるが、ここで、

$$Q = -u_x \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_e - v_y \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_e, \quad u_x, v_y: \text{要素ごとの流速 (m/sec)}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_e \equiv \sum_1^{n_x} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) C_j(t), \quad (1/m),$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_e \equiv \sum_1^{n_y} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) C_j(t) \quad (1/m) \quad (8)$$

となる。なお、式(6)の $\{F(C)\}$ の C は、式(8)の $C_j(t)$ に対応している。いま、最も簡単な近似として、式(6)右辺の $\{C\}_i$ を $\{C\}_{i-\Delta t}$ で置き換えると次式を得る。

$$\left(\frac{[P]}{\Delta t} + [D]\theta\right)\{C\}_i = \left(\frac{[P]}{\Delta t} - [D](1-\theta)\right)\{C\}_{i-\Delta t} - \{F(C_{i-\Delta t})\} \quad (9)$$

ここで、式(9)で、 $\theta=1$ とすると、Cheng, R. T.¹⁵⁾ による方式と一致する。

2.1.3 人工拡散を導入した変形ガラーキン法の提案⁷⁾

変形ガラーキン法式(9)の計算精度を改良するために、フーリエ級数法による誤差解析を利用して求めた人工拡散係数 ($u^2 \Delta t / 2$) を考慮し、拡散係数 K を $\left(K + \frac{u^2 \Delta t}{2} \right)$ として計算する。図-1の範囲に対する三種類の計算結果 ($t=10 \text{ sec}$) を図-2~図-4に示した

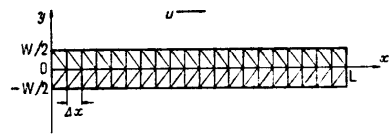


図-1 拡散問題の計算対象

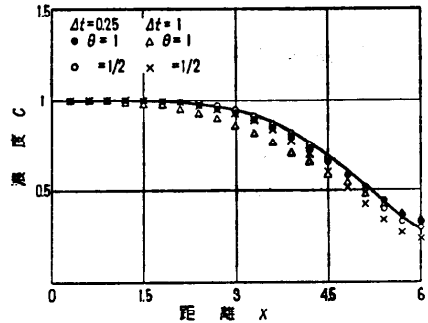


図-2 ガラーキン法の数値計算例

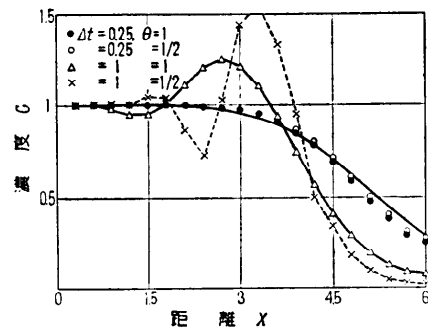


図-3 変形ガラーキン法の数値計算例

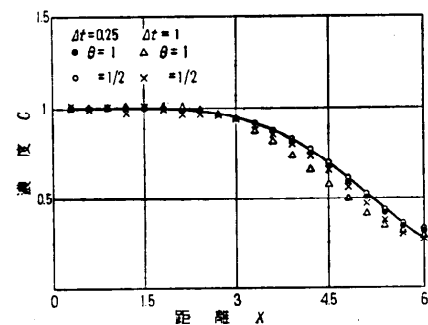


図-4 人工拡散を考慮した変形ガラーキン法の散値計算例

が、図-2、図-4の解は、ほぼ同精度とみなすことができる。したがって、マトリクスの対称性、すなわち、計算時間を考慮すると、人工拡散を考慮した変形ガラーキン法が、最適の解法であるといえる。(人工拡散

の導入および θ の選択については文献7) を参照されたい。なお、計算条件としては、図-1において、解を $C(x, t)$ とおくと、 $C(x, 0)=0 (0 \leq x \leq L)$; $C(0, t)=1 (t > 0)$; $x=L$ で、 $\partial C/\partial x=0$ であり、 $L=6$ (cm), $\Delta x=0.3$ (cm), $u=0.5$ (cm/sec), $K=0.1$ (cm²/sec), $W=0.06$ (cm) とした。また、図-2, 図-3, 図-4 中の実線は解析解である。

2.2 流動問題への応用

有限要素法による流動解析は、差分法に比べて、その歴史は非常に新しいが、すでに、完全流体、ストークス流れ、非圧縮性・圧縮性流体、高分子流体、電磁流体、自由表面をもつ流れ、湖水の流れ、潮流などへと、急速に、その適用が試みられつつある。(具体的な問題についての論文は、Cheng, R. T.¹⁵⁾ (1972) によるものが最初ではないかと思われる。) いっぽう、数値誤差や、安定性の検討などについては、一般に、差分法に比べて十分とはいえない状況にあるが、これらの研究も、現在、発展途上にあり、徐々に、実用的な数値解法として、有限要素法が採用されていくであろう。一例として、2次元非圧縮性粘性流体の、ナビヤ・ストークス方程式への応用を紹介する。いま、流れ関数 ψ と、渦度 ω を用いると、無次元化した形で次式を得る。

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -\omega & (10) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{R_s} \nabla^2 \omega & (11) \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & (12) \end{cases}$$

ここで、レイルズ数 $R_s = u_0 L / \nu$, u_0 : 代表速度, L : 代表長さ, ν : 動粘性係数である。境界条件は、各 ψ , ω について、おのおの $\psi = \psi_0$ (固定) または、 $\partial \psi / \partial h = 0$; $\omega = \omega_0$ または $\partial \omega / \partial h = 0$ の2種類とする。(h: 境界での外向き法線の方向余弦) すなわち、式(11)は式(1)と同じ形であり、また式(10)は、式(1)の一部と考えることができるため、2.1での解法を用いることができる。浮力を考慮した場合も同様に考えることができる。

3. 大気中におけるガス拡散問題の解析

3.1 ガス拡散モデル(1)による解析

大気汚染シミュレーションでは、ブルーム・モデルや、パフ・モデルなど、解析解を利用した方法と、数値解を利用した方法^{16), 17)}とが用いられている。数値解によるものとして、高速道路での自動車の排ガス拡

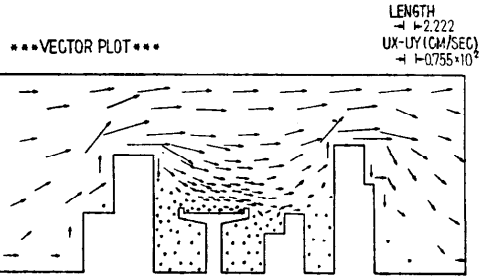


図-5 ガス拡散モデル(1)による風速分布

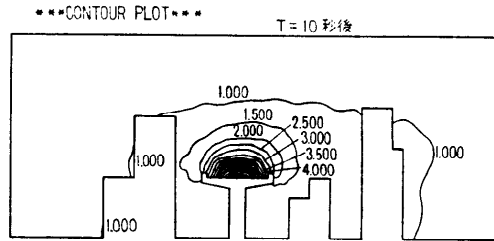


図-6 ガス拡散モデル(1)による濃度分布 (ppm)

散に関する計算例を図-5, 図-6 に示したが、(139 節点, 202 要素) これはストークス流れとして流れの場を求め、その後、非定常拡散方程式を解いたものである。

3.2 ガス拡散モデル(2) (乱流モデル)による解析

3.2.1 基礎式

いま、次式のような、鉛直2次元 $x-z$ 座標における、非圧縮性粘性流れに対する運動方程式、および、ガス拡散方程式を考える。

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -\omega & (13) \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = K \nabla^2 C & (14) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial z} = \beta g \frac{\partial C}{\partial x} + \varepsilon \nabla^2 \omega & (15) \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} & (16) \end{cases}$$

ここで、 ψ : 流れ関数 (m²/sec), ω : 渦度 ($= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}$), (1/sec), C : 濃度 (ppm), u, w : x, z 方向の流速 (m/sec), β : 熱膨張係数 ≈ -0.0198 (ヘキサン・ガス, C₆H₁₄ の場合: 空気よりやや重い), g : 重力加速度 ($= 9.8$) (m/sec²), ε : 渦動粘性係数 (m²/sec), K : 渦動拡散係数 (m²/sec) であり、 ε, K については、Smagorinsky-Deardorff モデル¹⁸⁾により、

$$\varepsilon = K = C^2 \Delta \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (17)$$

とした。ただし、 C : 定数 (0.1 のオーダー) (-), Δ : 1メッシュあたりの面積 (m^2) である。すなわち、この場合の、拡散係数、粘性係数は速度の関数であり、比較的、最近 (1970) 提案されたものであるが、自然界における風の動きや、一般の乱流現象のシミュレーションに一定の成功をおさめているようである。式(13)~(16)の定式化については式(10)~(12)に準じて考えることができる。なお、式(17)において、速度の1階微分項が現われるため、有限要素法の定式化における形状関数としては、 ψ は2次要素を、 ω , C は、1次要素を用いた。

3.2.2 数値計算例

海上に浮んだタンカーからのヘキサン・ガスが、どう拡散するかというシミュレーションを行った。ここでは、タンカーでの火災事故に関連した調査ということで、厳密な検討が要求されたため、乱流モデルが用いられた。図-7 に計算対象 (175 節点 274 要素) を、また、右端での平均風速が 3 m/sec の場合の計算結果を図-8、図-9 に示す。図-8 では、船体の左側で、逆流が発生している。なお、このとき、 $C=0.7$ 、タイム・ステップ $\Delta t=0.05$ であり、 $T=10.05$ までの計

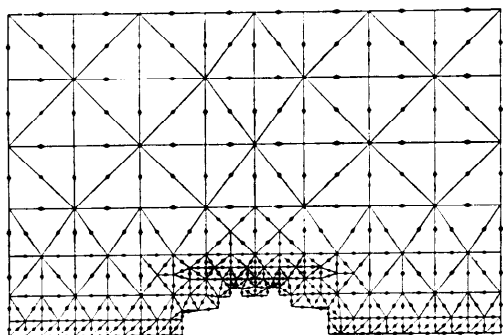


図-7 ガス拡散モデル(2)の要素分割図

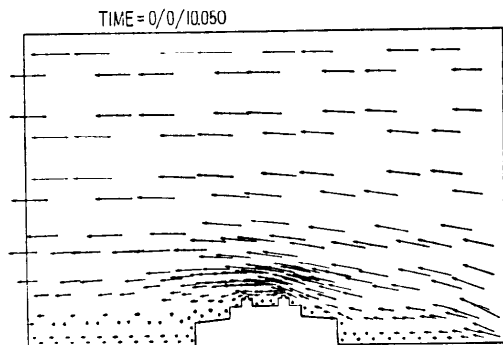


図-8 ガス拡散モデル(2)による風速分布

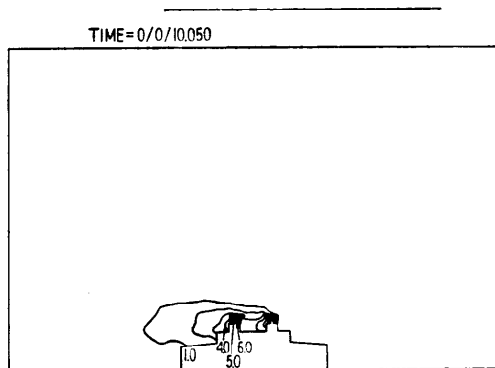


図-9 ガス拡散モデル(2)による濃度分布 (ppm)

算で、IBM S/370-M 168 により、290kバイト、CPU: 2.7分であった。

4. 水質汚濁問題の解析

4.1 水質汚濁シミュレーションの概要

水質汚濁現象を支配している要因としては、潮汐運動や渦運動による混合拡散、沈澱、水中のバクテリアや酸素による自然浄化作用、溶存酸素の量、再ばっ気作用 (大気中の酸素を水中に溶け込ませること) などがあげられる。しかし、現在のシミュレーションが対象としているのは、主に混合拡散作用であり、他の要因については、現在の技術レベルではモデル化が不十分なために、ほとんど手がつけられていないといっても過言ではない。この水質汚濁シミュレーションは、潮流計算と汚染拡散計算の二つから成り、1960年代後半から1970年代にかけて、運輸省などを中心に、その手法の開発が行われてきた¹⁹⁾⁻²¹⁾。そして、1970年代の前半からは、シミュレーションの結果を、直接、行政のための資料として用いる傾向が強くなってきているが、このような事情は、米国などでも、ほぼ同様と思われる²²⁾⁻²⁵⁾。計算対象も、従来の、有明・八代海や、周防灘のような大海域 (100 km×100 km) に加え、広島港、佐世保港などの、比較的小さな海域 (数 km×数 km 程度) にまで広がってきており、また、シミュレーションの実施主体も、初期の運輸省から、建設省、環境庁、通産省、各県の行政レベル (企画、港湾、衛生、環境などの部課)、建設会社、港湾・下水道関係の民間コンサルタント会社などへと、拡大してきた。

4.2 潮汐運動のシミュレーション

従来、潮流計算には、数値解法として、伝統的に差

表-1 シミュレーション・モデルの大きさ

	Grotkop ⁸⁰⁾ (1973)	Taylor ⁸¹⁾ (1975)	Connor ⁸²⁾ (1976)	本文での事例
節点数	69	64	53/58	大阪湾、瀬戸内海 183/596
要素数	97	9*	74/86	306/906

(* — アイソパラメトリック・エレメント)

分法が用いられてきたが^{20)~29)}、複雑な形状をなす陸境界の近似、また、精度に応じたメッシュ分割、プログラムの汎用化などの面で不便があった。これらの点を克服するため、近年、有限要素法を潮汐流へ適用した例があるが^{30)~32)}、逆に、潮汐流においては、差分法に比べて、多くの計算時間を必要とすることが指摘され³³⁾、有限要素法を、そのまま実際の海域、しかも、瀬戸内海のような大きな海域 (130 km×300 km) へ適用することには、なお、困難があった。すなわち、これまでの適用例では、わずかに 70 節点、100 要素までのモデルしか取り扱っていないが、(表-1) これは従来の手法では、多くの計算時間と記憶容量が必要とされたためであろう。

この点に鑑み、計算精度と電子計算機の記憶容量および計算時間の、バランスのとれた実用的な解法として新たに前進計算型有限要素法を提案した。

4.2.1 基礎式

潮汐計算で用いる計算式は、その運動が長波とみなし得ることなどを考慮したつぎのような 2 次元モデルである。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - u\frac{\partial U}{\partial x} - v\frac{\partial U}{\partial y} + fV - \gamma^2 u\sqrt{u^2+v^2} + AF^2U \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial y} - u\frac{\partial V}{\partial x} - v\frac{\partial V}{\partial y} - fU - \gamma^2 v\sqrt{u^2+v^2} + AF^2V \quad (19)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} + AF^2\zeta \quad (20)$$

ただし、U: x 方向の線流量 ≡ u · (h + ζ) (m²/sec)

V: y 方向の線流量 ≡ v · (h + ζ) (m²/sec)

u, v: x, y 方向の平均流速 (m/sec)

ζ: 水位 (m)

t: 時刻 (sec)

h: 水深 (m)

A: 人工粘性係数 (m²/sec)

γ²: 底面での摩擦係数 = 0.0026 (-)

g: 重力加速度 = 9.8 (m/sec²)

f: コリオリ係数 = 2ω sin φ (1/sec)

ω = 7.292 × 10⁻⁵ (rad/sec), φ: 緯度(度)であり、境

界条件は (1) U = U₀, V = V₀, ζ = ζ₀: 境界値固定(時間変化可能) (2) 陸または島で U l_x + V l_y = 0 (ただし、l_x, l_y: 外向き法線方向余弦の x, y 成分)、初期条件は、ζ(x, y, t = 0) = ζ₀(x, y), u(x, y, t = 0) = u₀(x, y), v(x, y, t = 0) = v₀(x, y) である。

4.2.2 有限要素法による定式化

いま、一要素内で、 $U = \sum_1^{n_s} N_i(x, y)U_i(t)$, $V = \sum_1^{n_s} N_i(x, y)V_i(t)$, $\zeta = \sum_1^{n_s} N_i(x, y)\zeta_i(t)$ とおく。ここで、n_s: 一要素あたりの節点数、N_i: 形状関数、U_i(t), V_i(t), ζ_i(t): 節点値である。重み関数を N_iにとり、式(18)~(20)をガラーキン法により定式化すると、グリーンの定理より、境界条件を考慮して、結局、n 個の連立方程式がマトリクス形で、つぎのように表される。(n: 総節点数, m: 総要素数, V': 一要素の範囲)

$$[P]\{\dot{U}\} + [D]\{U\} + \{F\}_1 = 0 \quad (21)$$

$$[P]\{\dot{V}\} + [D]\{V\} + \{F\}_2 = 0 \quad (22)$$

$$[P]\{\dot{\zeta}\} + [D]\{\zeta\} + \{F\}_3 = 0 \quad (23)$$

ただし、

$$[P_{i,j}] = \sum_1^m \left\{ \int_{V_s} N_i N_j dx dy \right\}$$

$$[D_{i,j}] = \sum_1^m \left\{ A \int_{V_s} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \right\}$$

$$\{F_i\}_N = - \sum_1^m \left\{ \int_{V_s} N_i Q_N dx dy \right\} \quad (N=1, 2, 3)$$

であり、Q₁, Q₂ は、おのおの、式(18), (19)の右辺第 1 項~第 5 項、Q₃ は、式(20)の右辺、第 1~2 項に対応する。

4.2.3 前進計算型有限要素法の提案⁸⁾

式(21)~(23)の一般形として次式を考える。

$$[P]\{\dot{C}\} + [D]\{C\} + \{F\} = 0 \quad (24)$$

式(24)の連立方程式をそのまま解くのは、計算時間がかかるため、各種の前進計算型の定式化を考えしたが、最終的には、フーリエ級数法による誤差解析を利用して、つぎの「人工粘性を考慮した二段前進型計算方式」を採用した。なお、形状関数としては三角形 1 次要素を用いた。

$$\left. \begin{aligned} [\bar{P}]\{C\}_t^* &= (\alpha_1 [P] - \Delta t [D])\{C\}_{t-\Delta t} \\ &\quad - \alpha_2 \Delta t \{F\}_{t-\Delta t} \\ [\bar{P}]\{C\}_t &= (\beta_1 [P] - \Delta t [D])\{C\}_{t-\Delta t} \\ &\quad - \beta_2 \Delta t \{F\}_{t-\Delta t} - \beta_3 \Delta t \{F^*\}_t \\ A &= \beta_2 g h \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

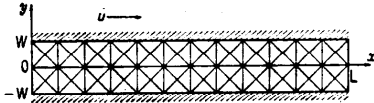


図-10 潮流基本モデルの計算対象

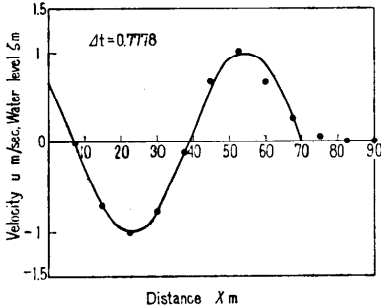


図-11 潮流基本モデルの計算結果

ここに、 $[P]$ は、集中マトリクスとよばれ、対角項 $P_{ii} = \sum_{j=i} P_{ij}$ のみから成り、 $\alpha_1=1, \alpha_2=0.5, \beta_1=1, \beta_2=0.025, \beta_3=0.2, \beta_4=0.8$ である。すなわち式(25)では、連立方程式を解く必要が無いため、従来の有限要素法に比べ、計算時間は短くなる。図-10において、境界条件を、 $x=0$ で、 $u, \zeta = \sin(t) (t > 0), y = \pm W$ で、 $v=0$ 、初期条件を $t=0$ で、 $u, \zeta = 0 (0 < x < L), g=10(\text{m/sec}^2), h=10(\text{m}), W=7.5(\text{m}), L=90(\text{m})$ としたときの潮流基本モデルの計算結果を図-11に示す。(ただし、この際、式(18), (19)での右辺第2~5項は無視されている。)

これより、数値解は、解析解 $u, \zeta = \sin(t-x/10)$ (図中の実線)と、良好な一致を示していることがわかる。なお、このときの安定条件は*、誤差解析により、次式で与えられる。

$$\Delta t \leq \frac{1.6 \Delta L}{\sqrt{g H_{\max}}} \quad (26)$$

ここで、 ΔL : 最小要素の代表長さ (m), H_{\max} : 最大水深 (m) である。

4.3 拡散現象のシミュレーション

海域での汚染物質の拡散現象を考えると、海流は、一般に、約12時間の周期変動をするため、非定常モデルを用いるのが自然であるといえる。しかし、現実のシミュレーションでは、汚染濃度の絶対値が問題になることが多く、非定常計算では電子計算機の所要計算時間が増大し、これが、実用上の、大きな障害になることが多い。この(定常)拡散モデルは、1潮汐内

* 数値解が、異常に大きくなるような現象(発散現象)が起こらないための条件。

の平均流速を移流項に、1潮汐間の平均流速からの標準偏差を拡散係数に反映させたもので、適当な代表長さ係数(後述)が決まれば、短い計算時間での拡散シミュレーションを可能にするものである。

4.3.1 基礎式^{34),35)}

水深を考慮した2次元非定常拡散方程式を一周期間(一般に、約12時間)にわたって時間積分し、その平均量を考えると次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial C}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_{x0} + K_{xv}) \bar{H} \frac{\partial C}{\partial x} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (K_{y0} + K_{yv}) \bar{H} \frac{\partial C}{\partial y} \right\} + \bar{H} Q \quad (27) \end{aligned}$$

ただし、 C : 平均濃度 (ppm)

\bar{U}, \bar{V} : 流れ一周期間の U, V 平均値 (m^2/sec)

U, V : x, y 方向の線流量,

$U = u(h + \zeta), V = v(h + \zeta)$

ζ : 水位 (m), h : 平均水深 (m)

\bar{H} : 流れ一周期間の $(h + \zeta)$ の平均値 (m)

K_{x0}, K_{y0} : x, y 方向の渦動拡散係数 (m^2/sec)

K_{xv}, K_{yv} : x, y 方向の流速による拡散係数 (m^2/sec)

Q : 汚濁負荷量 (ppm/sec)

である。また、流速による拡散係数 K_{xv}, K_{yv} は、潮汐計算で得られる流速 u, v から、その標準偏差

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{M}{1} \sum_1 (u - \bar{u})^2 / M}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{M}{1} \sum_1 (v - \bar{v})^2 / M}$$

を計算し、

$$K_{xv} = \alpha \Delta S_x \sigma_x, \quad K_{yv} = \alpha \Delta S_y \sigma_y \quad (28)$$

として求める。ここで M は、流れ一周期間で求めた流れ場の個数であり、 α は、拡散係数の代表長さ係数(無次元パラメーター)で、 $\Delta S_x, \Delta S_y$ としては、要素の大きさや、流程(流れの行程長さ)に関連させることが多い。なお、境界条件は、 $C=C_0$ (固定値)、または、

$$K_x \frac{\partial C}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial C}{\partial y} l_y = 0 \quad (29)$$

とする。ただし、 l_x, l_y : 境界面上での外向き法線方向余弦である。

4.3.2 有限要素法による定式化¹⁾

いま、一要素内で、

$$C = \sum_1^{n_s} N_i(x, y) C_i(t)$$

とおく。

ここで、 N_i : 形状関数、 n_s : 一要素あたりの節点数、である。重み関数を N_i にとると、式(27)の i 番目の方程式は次式で与えられる。

$$\int_{V_v} N_i \left[\left[\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \sum_1^{n_s} N_j C_j - Q_0 \right] dx dy = 0 \quad (30)$$

ここで、 $K_x = (K_{x0} + K_{xv})\bar{H}$, $K_y = (K_{y0} + K_{yv})\bar{H}$, $Q_0 = \bar{H}Q$, V' : 一要素の範囲である。

上式に、グリーン定理を適用し、式(29)の境界条件を考慮すると、結局、 n 個の連立方程式が、マトリクスの形で、つぎのように表わされる。

$$[D][C] + \{F\} = 0 \quad (31)$$

ここで、

$$[D] = \sum_1^m \left\{ \int_{V_v} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right) K_x \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right) K_y \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) + N_{iu} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + N_{iv} \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} \quad (32)$$

$$\{F\} = - \sum_1^m \left\{ \int_{V_v} N_i Q_0 dx dy \right\} \quad (33)$$

となる。

ただし、 n : 総節点数, m : 総要素数である。よって、式(31)の連立方程式を1回だけ解けば、濃度 $[C]$ が得られる。なお、マトリクス $[D]$ は、流速 u, v のために、非対称マトリクスとなるが、連立方程式の解法には、ガウスの消去法を用いた。また、実際の計算においては、要素の大きさ、拡散係数、流速の関係に注意する必要がある。形状関数としては、三角形1次要素を用いた。

5. 水質汚濁シミュレーションの例

5.1 シミュレーションの実例

港湾の設計や、埋め立てに伴う流況変化、また、下水処理場の設置に関連した環境アセスメントのために行ったシミュレーションの具体例を表-2 に示す。

本章では、この内、大阪湾、瀬戸内海への適用例と、実測値および差分解析との比較について紹介したが、そのシミュレーションの規模を表-3 に示す。

また、このときのタイム・ステップ Δt と、シミュレーションのパフォーマンスに関するデータを表-4、表-5 に示す。すなわち、実際の計算でのタイム・ステップ Δt は、1次元誤差解析から得られた理論式、式(26)により、ある程度予測できることがわかる。これは、また、誤差解析理論が、実際のシミュレーションモデルに適用できることを示している。

5.2 大阪湾での COD 濃度の予測³⁰⁾

大阪湾の明石海峡(図-12, A部)と、友ヶ島水道

表-2 有限要素法によるシミュレーションの実例 (1973年~1979年)

対象海域	使用モデル
琵琶湖	定常流れ・定常拡散
舞鶴港	非定常流れ・定常拡散
富山港	非定常流れ・定常拡散
小浜湾	定常流れ・定常拡散
大阪湾	非定常流れ・定常拡散
瀬戸内海	非定常流れ・定常拡散
田辺湾	非定常流れ
早瀬々戸	非定常流れ
広島港	定常流れ・定常拡散
広島湾	非定常流れ・定常拡散
洞海湾	定常流れ・定常拡散
周防灘	定常拡散
別府湾	定常流れ・定常拡散
佐世保港	定常流れ

表-3 シミュレーションの規模

対象	範囲 (km×km)	水深 (m)	節点数	要素数
大阪湾	50×50	7~94	183	306
瀬戸内海	130×300	4~104	596	906

表-4 タイム・ステップの比較とパフォーマンスに関するデータ(潮流計算)

対象	最小代表長さ ΔL (m)	理論 Δt (sec) (式(26))	数値計算での Δt (sec) (発散)	シミュレーション量 (時間)	所要計算時間 (分)	記憶容量 (kバイト)
大阪湾	2000	105	90(100)	24	7.2	222
瀬戸内海	5000	251	225(240)	36	13.9	364

(IBM S/370-M 168 による.)

表-5 パフォーマンスに関するデータ(汚染拡散計算)

対象	$K_{xy} = K_{yx}$ (m ² /sec)	α (-)	所要計算時間 (分)	記憶容量 (kバイト)
大阪湾	10	20	0.7(5ケース)	276
瀬戸内海	100	42	2.2(4ケース)	340

(IBM S/370-M 168 による.)

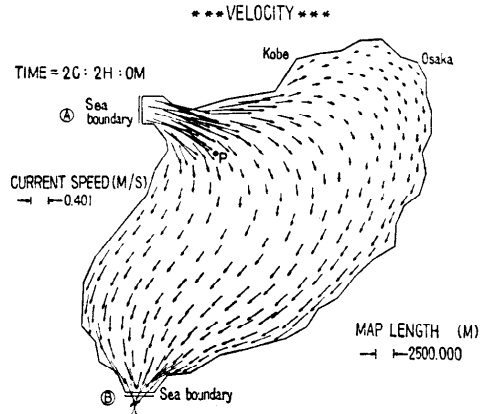


図-12 大阪湾の流況(2潮汐目2時)

図-12, B部) で, 流速と水位の実測値を与えて計算した結果を図-12 に, また, 図-12 中の点Pにおける潮流楕円と実測値との比較を図-13 に示す. これよ

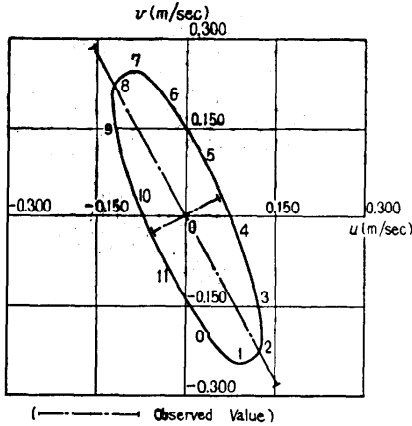


図-13 大阪湾(点P)での潮流楕円図と実測値との比較

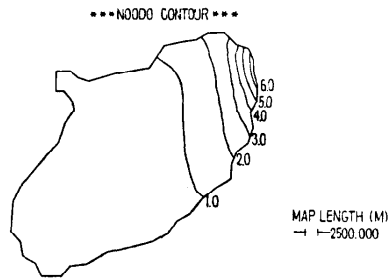


図-14 大阪湾 COD の濃度分布 (ppm, $\alpha=20$)

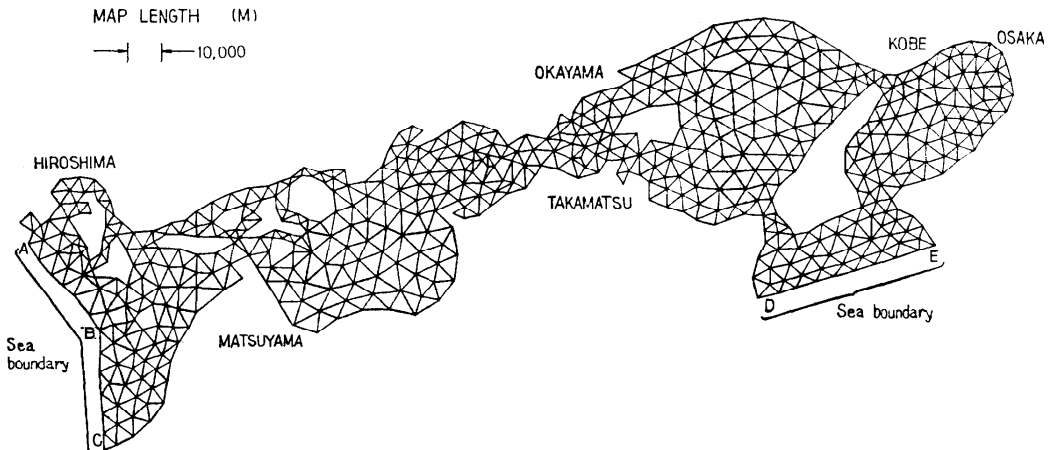


図-15 瀬戸内海の要素分割図

り, 潮流の収束性, 再現性は良好であることがわかる. また, 図-14 に, COD 濃度拡散シミュレーションの一例を示す.

5.3 瀬戸内海での COD 濃度の予測と, 差分解との比較

図-15 の瀬戸内海西部 (A-B-C) と, 紀伊水道 (D-E) で流速と水位の実測値を, 内点の 17 点で流速の実測値を与えた. 備讃瀬戸での東流最強時の計算結果を図-16 に示す. また, 図-16 に対応した差分法による計算結果³⁴⁾ (環境庁, 1974) を図-17 に示す.

このとき, 計算が収束する* までのシミュレーション時間は, 差分法の場合の 10 潮汐 (120 時間) に対して, 有限要素法では 3 潮汐であったが, これは, 陸境界での流れの向きが, 差分法の場合の 'ジグザグ' (図-17) に比べ, 有限要素法では自然に近く, 'なめらか' になっているためと思われる. さらに, タイム・ステップが, 差分法では 30 秒, 有限要素法では, 225 秒であることを考えると, 収束解を得るまでの, 計算くり返し回数は, 差分法の場合の 100 に対して, 有限要素法の場合には, わずか, 4 となる.

($\therefore \frac{10(\text{潮汐})}{30(\text{秒})} : \frac{3}{225}$ から,) どちらの計算も, 前進型計算法であることを考えれば, 有限要素法の場合の所要計算時間は, 差分法の場合の, 優に, 1/10 以下になるものと予想できる. また, 島の近似の形などから, 精度的にも, 図-16 が, 図-17 よりすぐれていることは明らかであろう. なお, 図-18 に COD 濃度拡散シミュレーションの一例を示す.

* '収束する' とは, 一潮汐 (一般に約 12 時間) の周期運動をしている流れが, その一周期前の状態にはほぼ近くなることをいう.

TIME = 3C:2H:0M

*** VELOCITY ***

CURRENT SPEED (M/S)

→ ← 0.417

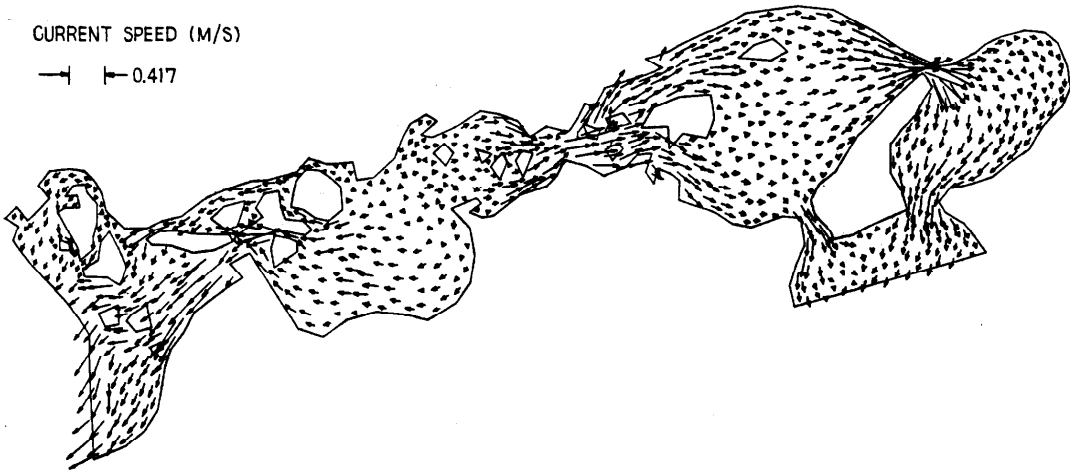


図-16 瀬戸内海の流況 (3潮汐目2時)

VELOCITY VECTOR

11 CYCLE 0 HOUR 0 MIN 0 SEC

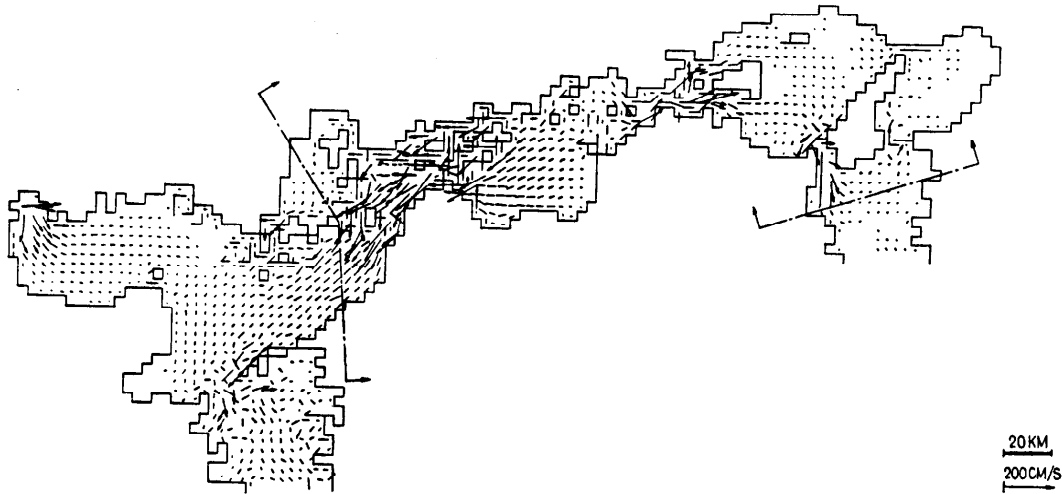


図-17 差分法による瀬戸内海の流況 (11潮汐目0時)**

5.4 有限要素解と差分法との比較

シミュレーションの経験を通じて、この計算法が、従来の、差分法によるものと比較して、下記のような利点を有していることがわかった。(1)複雑な境界が扱える。(2)同じ要素分割数の場合の所要計算時間は、前進型計算法であるため、差分法と比べても本質的な差は出てこない。(3)必要とする計算精度を考慮した要素分割により、経済的なシミュレーションが可

能である。(4)流況の収束が早い。これは、陸境界での流向に無理が無いと思われる。(5)強制条件としては、境界、または任意の点において、「水位のみ」または、「流速のみ」に加え、「水位と流速」を同時に与えることができるため、流況の再現がしやすい。

すなわち、(2)~(4)より、精度を落とさないで、所要計算時間を、一般の前進計算型差分法に比べて、大幅に減少させることができる。いっぽう、電子計算

NOODO CONTOUR

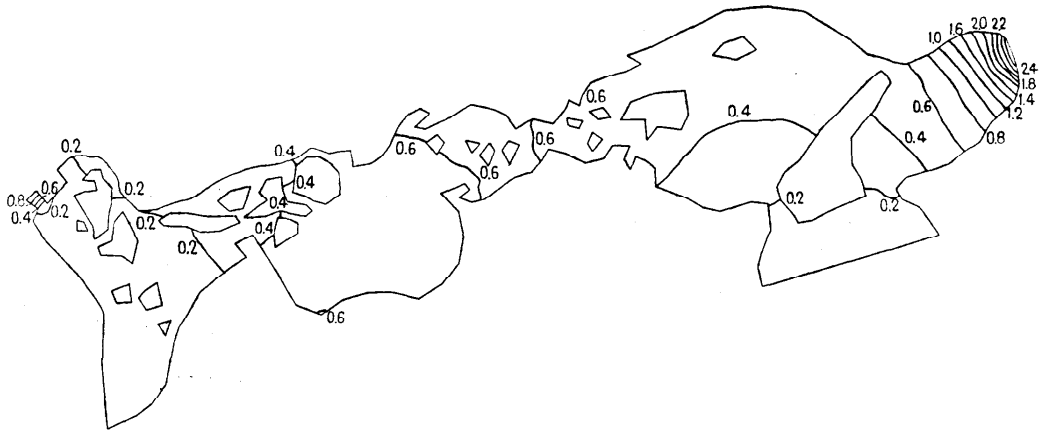


図-18 瀬戸内海の COD 濃度分布 (ppm, $\alpha=42$)

機の所要記憶容量は、一般に、差分法より、大きくなるといえるが、メッシュ数が、差分法より、少なくできることや、電子計算機の大容量化の傾向を考えると、実質的には、あまり問題にならない程度と思われる。(表-4, 表-5)したがって、この計算法は、差分法、また、従来の有限要素法の欠点を補う、実用的なものであるといえよう。

6. むすび

(1) 拡散・流動問題への有限要素法適用の方法として、「人工拡散を考慮した変形ガラーキン法」を提案し、ヘキサソ・ガスの、大気中への拡散シミュレーションを紹介した。

(2) 水質汚濁シミュレーション・モデルについて、誤差解析手法により、「前進計算型有限要素法」を提案した。そして、実測値や、差分法との比較を含めた実例を紹介し、新しい数値解法の有効性を確認した。

モデル式や3次元解法の確立などが今後の課題として考えられる。

なお、これらの解法は、現在、すすめている、3次元の温排水拡散シミュレーションや、電子工学分野での電子ビーム解析、半導体解析にも適用できるものと思われる。今後、さらに、誤差解析手法などを用いた計算精度の改善と、計算時間を考慮した実用的な数値解法の開発を続けていく予定である。

参考文献

- 1) 松田：熱拡散および流動問題への応用，日本機械学会関西支部第71回講習会「有限要素法——計算技術と応用」教材，pp. 111-126 (1976)。
- 2) 松田：熱拡散・流動・場の問題の解析，通信教育「有限要素法」教材，日刊工業新聞社，pp. 1-56 (1978)。
- 3) 松田，堀川：有限要素法による拡散・流動問題の解析，流体力学，Vol. 14, No. 6, pp. 305-316 (1978)。
- 4) 松田：非構造問題に対する有限要素法，日本材料学会講習会「第8回初心者のための有限要素法」教材 pp. 15-26 (1978)。
- 5) 松田：流体力学への応用，化学工学協会関西支部講習会「有限要素法の化学工学への適用を考える」教材，pp. 22-28 (1978)。
- 6) Matsuda, Y.: A Water Pollution Prediction System by the Finite Element Method, Advances in Water Resources, Resources, Vol. 2, March, pp. 27-34 (1979)。
- 7) 松田，堀川：有限要素法による拡散・流動問題の解析，第1報，日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 395 (1979)。
- 8) 松田，堀川：有限要素法による拡散・流動問題の解析，第2報，日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 395 (1979)。
- 9) 戸川：有限要素法，電子通信学会誌，Vol. 60, No. 8, pp. 945-952 (1977)。
- 10) Wilson, E. L. & Nickell, R. E.: Application of the finite element method to heat conduction analysis, Nuclear Engng. Design, Vol. 6, pp. 276-286 (1966)。
- 11) Guymon, G. L., Scott, V. H. & Herrmann, L.

- R.: A General Numerical Solution of the Two-Dimensional Diffusion-Convection Equation by the Finite Element Method, *Water Resources Res.*, Vol. 6, No. 6, pp. 1611 (1970).
- 12) Bruch, J. C. & Zylvolski, G.: Finite Element Weighted Residual Solution to One-dimensional Field Problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 6, pp. 577-585 (1973).
- 13) Donea, J.: On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat-Conduction Equation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 8, pp. 103-110 (1974).
- 14) Wood, W. L. & Lewis, R. W.: A Comparison of Time Marching Schemes for the Transient Heat Conduction Equation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, pp. 679-689 (1975).
- 15) Cheng, R. T.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations by the Finite Element Method, *Phys. Fluids*, Vol. 15, No. 12, pp. 2098-2105 (1972).
- 16) 日本機械学会編: 自動車排出ガスによる大気汚染に関する研究 (1971).
- 17) Reynolds, S. D., Roth, P. M. & Seinfeld, J. H.: *Atmospheric Environment*, Vol. 7, pp. 1033 (1973).
- 18) Deardorff, J. W.: A Numerical Study of Three-dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers, Vol. 41, No. 2, pp. 453-480 (1970).
- 19) 堀口他: 湾内における物質の拡散, 第15回海岸工学講演会講演集 (海講), pp. 324-330 (1968).
- 20) 堀口他: 洞海湾における汚染物質の拡散, 第18回海講 (1971).
- 21) 金子他: ADI 法による潮流と汚染拡散の数値計算, 運輸省港湾技術研究所報告, Vol. 14, No. 1, pp. 3-61 (1975).
- 22) Leendertse, J. J. & Gritton, E. C.: A Water-Quality Simulation Model for Well-Mixed Estuaries and Coastal Seas, Vol. I, Principles of Computation, Memorandum RM-6230-RC, The Rand Corp., Santa Monica, California (Feb. 1970).
- 23) Leendertse, J. J. & Gritton, E. C.: A Water-Quality Simulation Model for Well-Mixed Estuaries and Coastal Seas, Vol. II, Computational Procedures, Report R-708-NYC, The Rand Corp., New York (July 1971).
- 24) Pinder, G. F., Gray, W. G. & Brebbia, C. A.: *Finite Elements in Water Resources*, Pentech Press, London (1977).
- 25) Pinder, G. F., Gray, W. G. & Brebbia, C. A.: *Finite Elements in Water Resources*, p.4, 186, Pentech Press, London (1978).
- 26) Dronker, J. J.: Tidal Computations in shallow water, *Proc. ASCE, Hy.* 6-81 (June 1955).
- 27) 宇野木, 磯崎: 高潮の数値実験による二, 三の結果について, 第9回海講 (1962).
- 28) 伊藤他3名: 数値模型による東京湾横断堤の防潮効果に関する研究, 第11回海講, pp. 108-117 (1964).
- 29) Leendertse, J. J.: Aspects of a Computational Model for Long period Water Wave Propagation, RAND Memorandum, RM-5294-PR, Santa Monica, California (1967).
- 30) Grotkop, G.: Finite Element Analysis of Long-period Water Waves, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 2, pp. 147-157 (1973).
- 31) Connor, J. J. & Brebbia, C. A.: *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, p. 233, Newnes-Butterworths, London (1976).
- 32) Taylor, C. & Davis, J. M.: Tidal and Long Wave Propagation—A Finite Element Approach *Comp. Fluids*, Vol. 3, pp. 125-148 (1975).
- 33) Weare, T. J.: Finite Element or Finite Difference Methods for the Two Dimensional Shallow Water Equation?, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 7, pp. 351-357 (1976).
- 34) 環境庁: 瀬戸内海の水質汚濁シミュレーション, 公害研究対策センター, B-1012, p. 70 (1974).
- 35) 運輸省第四港湾建設局: 周防灘および周辺海域汚染計算報告書 (1974).
- 36) 溝口, 岩崎, 松田, 野田: 有限要素法による水質汚濁シミュレーション・システムの開発, 土木学会第5回環境問題シンポジウム (1977).

(昭和54年4月3日受付)

付 録

有限要素法による非構造問題の解析プログラム一覧 (日本アイ・ビー・エム)

(A) FEM-FLOW, 有限要素法による流体速度分布解析プログラム, N: GE 18-5020-0 (1975).

(B) FEM-DIFFUSION, 有限要素法による熱・拡散解析プログラム, N: GE 18-5029-0 (1975).

(C) WPS-FEM, 有限要素法による水質汚濁解析シミュレータ, N: GE 18-5062-1 (1976).

(D) FEM-BEAM, 有限要素法による電子ビーム軌道解析プログラム (1976).

(E) FEM-HEAT/FLOW, 有限要素法による熱流体解析プログラム (1977).

(F) FEM-SEAPOL, 有限要素法による水質汚濁シミュレーション・システム, N: GE 18-5134-0 (1978).