講　座

数理論理学 (2)†

小 野 寛 晰††

2. 数学的理論の形式化とその限界

この章では数学的理論の形式化とその問題点について述べる．前半では，数理論理学のもっとも重要な結果の一つである Gödel の不完全性定理にふれ，後半では数学的理論を1階の述語論理の上で展開する場合と，その他の論理（たとえば2階の述語論理）の上で展開する場合の比較検討をおこなう．

2.1 Peano の自然数論

数学的理論の形式化の例として Peano の自然数論をとりあげてみよう．この理論を記述するのに使われる言語 L_0 は定数記号 0，関数記号 $'$，$+$，$\cdot$ および述語記号 $=$ を持つ．s'，$s+t$，$s\cdot t$ は内容的にはそれぞれ $s+1$ (successor function)，s と t の和および s と t の積を表わす．ここで便宜上つぎのような略記をすることにしよう．0に n 回関数記号 $'$ をほどこして得られる項 $0''\cdots'$ を $\bar{n}$ と表わす．$\bar{n}$ はもちろん自然数 n を形式的に表現したものである．自然数 n に対しこのように定義される項 $\bar{n}$ のことを numeral という．つぎに，s を変数を一つも含まないような項とする．s は内容的には一つの自然数 m を表わしている．そこで，表現 $\bar{s}$ は numeral $\bar{m}$ を示すものとする．たとえば s が $(0''+0')'$ であれば，s は $(2+1)+1$，すなわち4を意味するから $\bar{s}=\bar{4}$ となる．

1階の Peano の自然数論 **PA** の公理は，等号に関する公理とつぎの **A1** から **A7** までの公理からなる．

A1.　$\forall x \neg (x'=0)$

A2.　$\forall x \forall y\ (x'=y' \supset x=y)$

A3.　$\forall x\ (x+0=x)$

A4.　$\forall x \forall y\ (x+y'=(x+y)')$

A5.　$\forall x\ (x\cdot 0=0)$

A6.　$\forall x \forall y\ (x\cdot y'=x\cdot y+x)$

A7.　(数学的帰納法)

任意の1階の論理式 $\varphi(x)$ に対し

$(\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\supset\varphi(x')))\supset\forall x\varphi(x)$.

A7 は無限個の公理からなっている．数学的帰納法は **A7** よりもつぎのように表わすのが自然かもしれない．

A7′.　$\forall P((P(0)\wedge\forall x(P(x)\supset P(x')))\supset\forall x P(x))$.

しかしながら P は（内容的には）自然数の部分集合全体を動くような変数だから，**A7′** という表現は2階の論理式になってしまう．しかし，Peano の自然数論を，この章の後半で導入される「2階の述語論理」の上で形式化する場合には **A7′** を数学的帰納法の公理としてとることができる．このとき，この理論を「2階の Peano の自然数論」という．同様にしてもっと高い「階」の述語論理の上で等号に関する公理および **A1** から **A6**，**A7′** の公理をとれば，高い「階」での Peano の自然数論が定義される．高い階まで許されると，自然数の集合や自然数上の関数，自然数の集合の集合といったものもとり扱うことが可能になる．ところでこのように自然数に加えてさまざまな集合や関数を用いることが許されると，この枠組の中でまず整数を定義することができる．つぎに整数の対に対してある同値関係を導入すれば有理数を構成することもできる．さらに Dedekind の方法を用いれば，有理数のある種の集合（切断）から実数が構成される．このようにして，十分高い階の自然数論では実数そして実関数などがつぎつぎと定義され，いわゆる解析学の多くを展開することが可能になる．(厳密にいえば，おのおのの性質に対しその性質により規定される集合が存在することを保証する「内包の公理 (comprehension axiom)」を仮定する必要がある．)

ところで1章の最後で，Peano の自然数論の公理により自然数の集合 N が一意的に定められると述べたのだがこの意味をもう一度検討しておこう．まず，N が一意的に定められるという言葉の意味は，構造 N' が Peano の自然数論の公理をみたすならば N と N' とは同型であるということだ．（この一意性の証明は

† Mathematical Logic by Hiroakira ONO (Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University).

†† 広島大学総合科学部総合科学科

1) を参照されたい.) さて一意性の証明を眺めてみればわかるのだが, ここで Peano の自然数論といっているのは厳密には「2階」の Peano の自然数論のことである. そしてさらにこの場合 **A7′** の「述語変数」P(厳密な定義は 2.4 を見よ) は対象領域 (この場合には自然数全体の集合) の部分集合全体を動くものと解釈しなければならない. もちろん2階の述語論理ではおのおのの述語変数は対象領域の部分集合全体を動くことを意図して導入されるのだから, この注意はあらずもがなの感を与えるかもしれない. しかし述語変数の解釈の問題はこれから述べる不完全性定理と本質的なかかわりあいを持っており, これ以上の議論は **2.4** に譲らなければならない.

さて, それでは1階の Peano の自然数論 **PA** は $\boldsymbol{N}$ を一意的に定めるだろうか. いいかえれば **PA** のモデルはすべて同型だろうか. そうならないことは簡単に示される. たとえばコンパクト性定理を用いれば定理 1.9 と全く同様にして $\boldsymbol{N}$ と同型でないようなモデルを作ることができる. また Löwenheim-Skolem の定理によれば **PA** の非可算モデルも存在することがわかる. (もちろんそのようなモデルは $\boldsymbol{N}$ と同型ではありえない.) しかしこのことは自然数論 **PA** が自然数の性質を完全に記述しつくしていないことを意味するのではない. というのは, 1階の述語論理の上で形式化をおこなう限り, どんな公理の集合をとってきても Löwenheim-Skolem の定理が適用されるのだから. むしろ問題は $\boldsymbol{N}$ 上でなりたつ論理式と **PA** で証明可能な論理式との関係である. **PA** のすべての公理は $\boldsymbol{N}$ で (自然な解釈をあたえれば) 正しいのだから, このことから **PA** で証明可能な論理式は $\boldsymbol{N}$ で正しいことが導かれる. では $\boldsymbol{N}$ で正しい論理式は **PA** で証明できるだろうか. いいかえれば **PA** は, $\boldsymbol{N}$ で正しいような論理式をすべて証明するのに十分な公理を持っているのだろうか. もしこのことがなりたつとすれば $\boldsymbol{L}_0$ の閉じたどんな論理式 φ に対しても **PA** で φ が証明可能か, または $\neg\varphi$ が証明可能でなければならない. 一般に任意の数学的理論 $\boldsymbol{T}$ に対し, どんな閉じた論理式 φ をとっても, $\boldsymbol{T}$ で φ が証明可能かまたは $\neg\varphi$ が証明可能であるとき, $\boldsymbol{T}$ は**完全**であるといわれる. ところで, 上に述べた問題に対する否定的な解決を与えたのがこれから述べようとする Gödel の不完全性定理である. この定理によれば, 単に **PA** が不完全であるだけでなく, **PA** の公理を含むようなどんな無矛盾な理論 $\boldsymbol{T}$ においても, $\boldsymbol{T}$ の公理すべてを構成的な方法により数え上げることができる限りは, $\boldsymbol{T}$ は不完全であるというのだ.

この結果と1章で述べた完全性定理 (**定理 1.3**) とを混同しないで欲しい. 完全性定理からわかることは, ($\boldsymbol{N}$ と同型でないようなモデルも含めて) **PA** の「すべてのモデル」で正しい論理式は **PA** で証明できることを主張しているのだ. Gödel の不完全性定理からはおおよそつぎのように表わされる重要な結果が導かれる. (前者を第1不完全性定理, この結果を第2不完全性定理とよぶ.)

> 自然数論をその中で展開することができるような, どんな数学的理論 $\boldsymbol{T}$ も (無矛盾である限りは)「$\boldsymbol{T}$ の無矛盾性」を $\boldsymbol{T}$ の中で証明することはできない.

2.3 ではこれらの不完全性定理を厳密な形で述べるがその前に不完全性定理が得られるまでの数学の歴史の流れを一度ふりかえっておくことも意味があろう.

2.2 Hilbert の夢

現代数学の枠組は集合概念によってあたえられるといわれる. しかし集合概念が明確に意識されて使われるようになったのは19世紀の末になってからである. そして数学の本質はその自由性にあると考えた Cantor は集合そのものを数学的な対象として積極的に認め, 集合論を展開していった. そして集合を通して我我は無限に対する明確な概念を獲得するに至ったのである. ところが19世紀の末から20世紀の初頭にかけて集合論のパラドクス (たとえば Burali-Forti のパラドクスや Russell のパラドクス) があいついで見いだされ Cantor の集合論は大きく揺がされることになる. このことは単に集合論のみならず, これまでその正しさが素朴に信じられてきた数学の基礎そのものに対する危機をも意味したのであった. 物理学の理論の正しさが自然現象により保証され実験によって確認されるとすれば, 数学の理論の正しさは何により保証されどのようにして確認されるのだろうか. このような数学的思考そのものに対する反省がおこなわれ, さまざまな立場からこの数学の危機を乗り越えようとする試みがなされた. そのうちの一つの立場は, たとえば集合論のように我々の直観の遠く及ばないような無限をとり扱ったり, 無限のプロセスを含むような非構成的な方法により証明をおこなったりすることをすべて排除してしまおうとするものであった.

たとえば群 G があたえられたとき, G の部分集合 S から生成される G の部分群 (すなわち S を含むような最小の G の部分群) の存在はどのように証明されるか

を考えてみよう．普通は，こんな具合に証明がおこなわれる．G の部分群のうち S を含むものすべてをとる．そして，それらすべての共通部分を G_0 とすると G_0 も部分群になるから G_0 がSを含む最小の部分群になるというのである．それではGが無限集合のときGの部分群でSを含むものはどのようにして集められるのか．ここで仮に部分群をつぎつぎと選びだすような具体的な手続きがあたえられたとしよう．するといつかはこの手続きで G_0 自身も選びだされるはずである．そうすると G_0 の定義に G_0 自身が使われることになる．これは循環論法に陥っているのではないか．（少なくとも G_0 の定義は構成的でない．）これと同じような論法を使ったからこそ Russell のパラドクスがひきおこされたのではないか．上の立場ではこのような理由で非構成的な証明を排除しようとしたのである．しかし，このことは同時にこれまで長い間かかって得られた数学の多くの結果を捨て去ることを意味していた．

これに対して Hilbert はこれまでの数学が基本的には間違いのないものだということを堅く信じていたから，これらの非構成的な方法をも含むすべての数学を擁護したいと考えた．これはまた非構成的な証明を用いた不変式論に関する彼の定理を擁護することにもつながっていたのかもしれない．前に述べた立場では数学の証明からすべての非構成的な方法をとり除こうとしたのに対し，Hilbert は数学の証明は非構成的であってもかまわないが数学そのものの正しさを確認する際には，有限的，構成的な方法を用いなければならないとした．そして Hilbert のプログラムとよばれるつぎの目標をかかげたのである．

1）すべての数学を形式化すること．そしてこの形式化は有限的な方法でおこなわなければならない．

2）このように形式化された数学的理論の無矛盾性を有限的な方法で証明すること．

数学的思考が自由におこなわれるべきものならば，論理的に思考が可能なものはすべて数学の対象となるのではないか．もしもその数学的理論が矛盾をひきおこさない限りは，このような考えに至った Hilbert は数学，とくに自然数論，実数論，（公理的）集合論の形式化とその無矛盾性の証明にたち向っていった．

ところで Hilbert のとった有限的な方法に基づく立場――有限の立場といわれる――による数学の形式化とはどういうことなのか．まず，形式的な体系とは公理と推論規則からなりたつものであり，そこでの証明は意味内容に基づくものではなくいわば機械的な記号処理としておこなわれるものでなければならない．そのためには推論に必要などんな数学的概念も公理の中に明白に記述されてなければならない．もちろん論理演算の持つ内容さえも形式的に記述しておかなければならない．しかしその際，形式体系の記述自身のためには最小限の直観は許さざるをえない．たとえば二つの記号が等しいのか違うのかといった判断は許されよう．しかし，有限の立場からどこまでの直観が許されるのかとなると必ずしも明確でない．つぎにあげる Herbrand の有限の立場に対する考えは Hilbert の考えに近いものと思われる．

1）とりあつかわれる対象および関数の数は有限で確定したものでなければならない．そしてそれらは矛盾なく定義されなければならない．

2）いかに構成されるかを示すことなく，ある対象の存在を語ってはならない．

3）無限個の要素からなる対象の集合をあつかってはならない．（たとえば自然数の一つ一つを論ずることはかまわないが，自然数全体の集合に言及することは避けなければならない．）

4）「すべての x」についてなりたつというには，x を一つとってきたときその x についてなりたつということが（x に依存しないような）統一的な形で示さなければならない．

ところが，このような Hilbert の夢は Gödel の不完全性定理によって打ち砕かれてしまった．Gödel がこの定理の証明に用いたアイデアは，「メタ」な概念を適当なコード化によって自然数論の中で記述することであった．まずおのおのの論理式はコード化によって自然数として表わされる．すると論理式についてのある性質とか論理式の間の関係などは自然数上の述語として表現されることになる．もちろん論理式についての性質がすべて記述できるというわけではない．たとえば「（論理式が）正しい」という性質は決して記述できないこと（2.3 の Tarski の定理参照）が知られている．しかし，このようにしてメタな概念を自然数論の中で記述していくと，いわゆる「うそつきのパラドクス」のように自分自身に言及するような命題さえも表現することができ，このことを用いて Gödel の定理が証明されるのである．ところで，我々が（もっとも制限した意味での）有限の立場に基づいて証明をおこなう限りは，「証明可能である」という性質は自然数論の中で記述できることが確かめられる．そして対象とし

ている数学的理論を T とすれば，「T が無矛盾である」という命題も「T で $1=0$ が証明可能でない」と表現されるから，やはり自然数論の中で記述できることになる．Gödel の不完全性定理によれば，T が少なくとも自然数論を含む限りは「T が無矛盾である」ことは T のなかで証明できない．ましてや有限の立場で「T の無矛盾性」は証明できないことになってしまう．

このように Hilbert のプログラムはもともとの意味では実現されないことがわかった．しかしながらここに至るまでの過程でいくつかの重要な理論や概念および技法が獲得されていったのである．Hilbert のプログラムを現時点でどのように評価するかは意見のわかれるところである．たとえば有限の立場をもとの意味よりもう少しゆるく解釈し，その立場から無矛盾性の証明をおこなうことも考えられる．しかしここではこれ以上この問題には立ち入らない．

2.3 Gödel の不完全性定理

それでは Gödel の不完全性定理の証明の概略を述べることにしよう．はじめに**原始帰納的関数**とよばれる自然数上の関数のクラスをつぎのように定義する．

定義 2.1

1) $f(x)=0$ は原始帰納的である．

2) $f(x)=x'$ は原始帰納的である．

3) $1\leq i\leq n$ であるような任意の i, n に対して $f(x_1, \cdots, x_n)=x_i$ は原始帰納的である．

4) g が m 変数，$h_1, \cdots, h_m$ が n 変数の原始帰納的関数であるとき，

$$f(x_1, \cdots, x_n)=g(h_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_n))$$

により定められる関数 f は原始帰納的である．

5a) k が任意の自然数，g が2変数の原始帰納的関数のとき，

$$f(0)=k, \quad f(x')=g(x, f(x))$$

により定められる関数 f は原始帰納的である．

5b) g が $n-1$ 変数，h が $n+1$ 変数 $(n>1)$ の原始帰納的関数のとき，

$$f(0, x_2, \cdots, x_n)=g(x_2, \cdots, x_n)$$
$$f(x', x_2, \cdots, x_n)=h(x, f(x, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$$

により定められる関数 f は原始帰納的である．

以上により原始帰納的とわかる関数のみを原始帰納的関数とするのである．原始帰納的関数の一般的な性質についてはたとえば 2) を参照されたい．つぎに $R(x_1, \cdots, x_n)$ を自然数の上で定義された n 変数の関係とする．$R(x_1, \cdots, x_n)$ の特性関数 $f_R(x_1, \cdots, x_n)$ はつぎのように定義される．

$$f_R(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0 & R(x_1, \cdots, x_n) \text{ がなりたつとき} \\ 1 & R(x_1, \cdots, x_n) \text{ がなりたたないとき.} \end{cases}$$

$R(x_1, \cdots, x_n)$ はその特性関数 $f_R(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的であるとき，原始帰納的な関係であるといわれる．

自然数上の関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が **PA** の言語 L_0 で**数値ごとに表現可能**であるとは，L_0 のある論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ が存在してどんな自然数 $m_1, \cdots, m_n, k$ に対しても

（1） $f(m_1, \cdots, m_n)=k$ ならば，**PA** で
$$\varphi(\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_n, y)\equiv y=\overline{k}$$

が証明可能となることをいう．ただし $\theta\equiv\psi$ は $(\theta\supset\psi)\wedge(\psi\supset\theta)$ の省略形とする．

また自然数上の関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ が L_0 で数値ごとに表現可能であるとは，L_0 のある論理式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ が存在してどんな自然数 $m_1, \cdots, m_n$ に対しても

（2） $R(m_1, \cdots, m_n)$ がなりたつならば，**PA** で $\psi(\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_n)$ が証明可能であり，

（3） $R(m_1, \cdots, m_n)$ がなりたたないならば，**PA** で $\neg\psi(\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_n)$ が証明可能となる

ことをいう．**PA** が無矛盾であることを仮定すれば，明らかに（1），（2），（3）の逆もなりたつ．

補題 2.1 1) 任意の原始帰納的関数は L_0 で数値ごとに表現可能である．

2) 任意の原始帰納的な関係は L_0 で数値ごとに表現可能である．

したがって今後は $f(x_1, \cdots, x_n)$ および $R(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的であるとき，（1）の論理式 φ および（2），（3）の論理式 ψ をそれぞれ $\bar{f}(x_1, \cdots, x_n)=y$ および $\bar{R}(x_1, \cdots, x_n)$ と書くことにする．また以下では「数値ごとに表現可能」なことを単に表現可能であるということにする．

ここで **PA** を含むような数学的理論 T を任意に一つ選ぶ．T はさらにつぎの条件をみたすものとする．

1) T の言語 L_T は L_0 を含む．

2) T は有限個の公理または公理型(axiom schema)により公理化される．

ここで公理型というのは，**PA** の公理の **A7**（数学的帰納法）のように論理式の一つのタイプとして表わされるような公理の（無限）集合のことである．（実際には条件 2) よりもっと一般的な条件の下で不完全性定理は証明できる．3) 参照のこと．）以下ではこの T

を固定して考える．1章では任意の数学的理論（すなわち閉じた論理式の集合）Sに対し，Sでφが証明可能という概念を定義したのだが，ここではこれをつぎのように変更しておく．形式体系**LK**を拡張して，閉じた論理式の集合Sの各論理式 φ に対し，sequent $\to\varphi$ も beginning sequent として許すことにする．このようにして得られる体系を**LK**(S)とする．明らかに，任意の論理式ψに対しψが**LK**(S)で証明可能となる必要十分条件はψがSで（1章の意味で）証明可能となることである．そこでこれからは**LK**(S)でψが証明可能のとき，単にSでψが証明可能であるとよび，$S\vdash\psi$ と表わすことにする．

さて言語 $\boldsymbol{L}_T$ 上の各表現（たとえば記号とか項，論理式，sequent，証明図など）に対し自然数を1対1に対応させるようなコード化を考える．もちろんコード化のしかたはいろいろあるのだが，ここでは以下のような方法を選んでおく．そしてこのコード化により表現Xに対して定められる自然数を「X⌝ と表わし，Xの **Gödel** 数とよぶことにする．まず $\boldsymbol{L}_T$ の中の各記号および sequent で使われる記号 →，―，・（コンマ）に対し相異なる奇数を対応させる．つぎにXが記号列 $X_1X_2\cdots X_n$ であるときには$\ulcorner X\urcorner$を$2^{\ulcorner X_1\urcorner}3^{\ulcorner X_2\urcorner}\cdots,p_n^{\ulcorner X_n\urcorner}$ とする．ただし各 X_i は単一の記号であり p_n は n 番目の素数とする．このようにすれば論理式や sequent に対する Gödel 数が定義される．つぎに（**LK**$(\boldsymbol{T})$ の）証明図の Gödel 数を帰納的に定義しよう．

1) $\boldsymbol{P}$が（**LK**$(\boldsymbol{T})$ の）beginning sequent S だけからなる証明図であれば，$\ulcorner\boldsymbol{P}\urcorner$ は $\ulcorner S\urcorner$ に等しいとする．

2) $\boldsymbol{P}$ が $\dfrac{\boldsymbol{P}_1}{S}$ または $\dfrac{\boldsymbol{P}_1\ \boldsymbol{P}_2}{S}$ の形（ただし $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ は証明図，Sは sequent）のとき，$\ulcorner\boldsymbol{P}\urcorner$はそれぞれ $2^{\ulcorner\boldsymbol{P}_1\urcorner}3^{\ulcorner-\urcorner}5^{\ulcorner S\urcorner}$ または $2^{\ulcorner\boldsymbol{P}_1\urcorner}3^{\ulcorner\boldsymbol{P}_2\urcorner}5^{\ulcorner-\urcorner}7^{\ulcorner S\urcorner}$ であたえられるものとする．

このようにコード化しておくと，たとえば

$\mathrm{neg}(\ulcorner\varphi\urcorner)=\ulcorner\neg\varphi\urcorner$,

$\mathrm{imp}(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner\psi\urcorner)=\ulcorner\varphi\supset\psi\urcorner$

が任意の論理式 φ,ψ に対してなりたつような原始帰納的関数 neg および imp の存在が示される．重要なのはつぎのような原始帰納的な関係 Prov の存在である．

補題 2.2　原始帰納的な関係 $\mathrm{Prov}(x,y)$ が存在し，任意の自然数 m,n に対しつぎの 1)，2) が同値になる．

1) $\mathrm{Prov}(m,n)$ がなりたつ．

2) **LK**$(\boldsymbol{T})$ のある証明図 $\boldsymbol{P}$ とある論理式 φ が存在し，$m=\ulcorner\boldsymbol{P}\urcorner$，$n=\ulcorner\varphi\urcorner$ かつ $\boldsymbol{P}$ の end sequent は $\to\varphi$ となる．

Prov は原始帰納的だから表現可能である．いま，$\overline{\mathrm{Pr}}(x)$ を

（4）　$\overline{\mathrm{Pr}}(x)\equiv\exists y\,\overline{\mathrm{Prov}}(y,x)$

により定義しておく．Gödel 数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ と形式的な表現 $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ とは区別すべきものだが，以下では簡単のために $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$ を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．

補題 2.3

D1.　$\boldsymbol{T}\vdash\varphi$ ならば $\mathbf{PA}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

D2.　$\mathbf{PA}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$.

D3.　$\mathbf{PA}\vdash(\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\wedge\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\varphi\supset\psi\urcorner))\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\psi\urcorner)$.

D1 の証明のみを述べておく．補題 2.2 と Prov が表現可能であることからつぎの（5），（6）は同値になる．

（5）　$\boldsymbol{T}\vdash\varphi$.

（6）　自由変数を含まないようなある項 t が存在して，$\mathbf{PA}\vdash\overline{\mathrm{Prov}}(t,\ulcorner\varphi\urcorner)$.

（6）より $\mathbf{PA}\vdash\exists y\,\overline{\mathrm{Prov}}(y,\ulcorner\varphi\urcorner)$ が得られる．したがって D1 がなりたつ．

つぎの定理が不完全性定理の証明のキイ・ポイントとなる．

定理 2.4　（**対角化定理**）　1変数xの任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し，ある閉じた論理式ψが存在して

$\mathbf{PA}\vdash\psi\equiv\varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$.

数学的理論 $\boldsymbol{T}$ が ω-無矛盾であるとは，任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し，$\boldsymbol{T}\vdash\neg\varphi(\bar{n})$ がすべての自然数 n についてなりたつときには $\boldsymbol{T}\vdash\exists x\varphi(x)$ とはならないことをいう．明らかに，$\boldsymbol{T}$ が ω-無矛盾ならば $\boldsymbol{T}$ は無矛盾である．

定理 2.5　（**Gödel の第1不完全性定理**）　$\boldsymbol{T}$ が ω-無矛盾ならば $\boldsymbol{T}$ は不完全である．すなわち，ある閉じた論理式ψが存在してψも $\neg\psi$ も $\boldsymbol{T}$ で証明可能でない．

証明　定理 2.4 を論理式 $\neg\overline{\mathrm{Pr}}(x)$ に対して適用するとある閉じた論理式ψが存在して

（7）　$\boldsymbol{T}\vdash\psi\equiv\neg\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\psi\urcorner)$

がなりたつ．（$\boldsymbol{T}$ は **PA** を含んでいることに注意．）いま $\boldsymbol{T}\vdash\psi$ と仮定すると補題 2.3 の D1 より $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\psi\urcorner)$ となる．一方 $\boldsymbol{T}\vdash\psi$ ならば（7）より $\boldsymbol{T}\vdash\neg\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\psi\urcorner)$ が得られる．これは $\boldsymbol{T}$ の「無矛盾性」に反す．したがってψは $\boldsymbol{T}$ で証明可能でない．そしてこのことから，すべての自然数 n に対して $\neg\overline{\mathrm{Prov}}(\bar{n},\ulcorner\psi\urcorner)$ が $\boldsymbol{T}$ で証明可能になる．ここで $\boldsymbol{T}$ の「ω-無矛盾性」

を使うと $\exists y\,\mathrm{Prov}(y, \ulcorner\phi\urcorner)$，すなわち $\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ は $\boldsymbol{T}$ で証明可能でない．すると(7)より $\neg\phi$ も $\boldsymbol{T}$ で証明可能でないことになる．

Rosser はこの第1不完全性定理を強めて，$\boldsymbol{T}$ の無矛盾性から $\boldsymbol{T}$ の不完全性が導かれることを示した．ところで近年になるまで **PA** の不完全性を示すような論理式 ϕ としてはいわば「メタ」数学的な内容を持つ論理式しか知られていなかった．最近になって Paris と Harrington により，**PA** の不完全性を示す一例として組合せ論的な内容を持つ純粋に数学的な命題が見いだされている（7)）．ここで対角化定理の別の応用例として Tarski の定理をあげておこう．$\boldsymbol{T}$ の言語 $\boldsymbol{L}_T$ 上の1変数の論理式 $\tau(x)$ が $\boldsymbol{T}$ の真偽の定義 (truth definition) をあたえるとは，$\boldsymbol{T}\vdash\phi\equiv\tau(\ulcorner\phi\urcorner)$ がすべての閉じた論理式 ϕ に対してなりたつこととする．

定理 2.6 **(Tarski の定理)** $\boldsymbol{T}$ が無矛盾ならば，$\boldsymbol{T}$ の真偽の定義をあたえるような論理式は存在しない．

証明．$\tau(x)$ が $\boldsymbol{T}$ の真偽の定義をあたえると仮定する．いま $\neg\tau(x)$ について対角化定理を適用すると $\boldsymbol{T}\vdash\theta\equiv\neg\tau(\ulcorner\theta\urcorner)$ となるような θ が存在する．一方この θ に対して $\boldsymbol{T}\vdash\theta\equiv\tau(\ulcorner\theta\urcorner)$ がなりたつはずである．これは $\boldsymbol{T}$ の無矛盾性に反す．

この証明で θ は「自分自身が正しくない」ということを意味する命題になっている．したがって Tarski の定理は「うそつきのパラドクス」を形式的体系の中で再現したものといえよう．さて論理式 $\neg\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner 1=0\urcorner)$ は $\boldsymbol{T}$ の無矛盾性を意味しているからこれをあらたに $\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}$ と書くことにする．

定理 2.7 **(Gödel の第2不完全性定理)** $\boldsymbol{T}$ が無矛盾ならば $\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}$ は $\boldsymbol{T}$ で証明できない．

証明 ϕ を定理 2.5 の証明に用いたのと同じ論理式とする．以下で

(8) $\boldsymbol{T}\vdash\phi\equiv\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}$

を示す．ϕ は $\boldsymbol{T}$ で証明できないから，(8)より $\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}$ も $\boldsymbol{T}$ で証明できないことが導かれるのである．さて $\boldsymbol{T}\vdash 1=0\supset\phi$ より補題 2.3 の D1 を使えば $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner 1=0\supset\phi\urcorner)$ となる．さらに D3 より $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner 1=0\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)$ となる．この対偶と(7)から $\boldsymbol{T}\vdash\phi\supset\neg\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner 1=0\urcorner)$，つまり $\boldsymbol{T}\vdash\phi\supset\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}$ がえられる．つぎに D2 より

(9) $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)$

がなりたつ．一方(7)に D1, D3 を適用すると

$$\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\neg\phi\urcorner)$$

となり，これと(9)とから $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\neg\phi\urcorner)$ がえられる．したがって

$$\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\wedge\neg\phi\urcorner),$$

すなわち $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner\phi\urcorner)\supset\overline{\mathrm{Pr}}(\ulcorner 1=0\urcorner)$ がえられる．ここで対偶をとってさらに(7)を用いると $\boldsymbol{T}\vdash\overline{\mathrm{Consis}(\boldsymbol{T})}\supset\phi$ が得られる．

2.4 2階の述語論理

これまで厳密な定義をあたえないまま2階および高階の述語論理について述べてきたのだが，この節では2階の述語論理の定義をあたえることにする．一般の高階の論理についてはここではふれない．

2階の述語論理の言語は，1階の述語論理の言語に可算個の n 変数の（2階の）述語変数 $P_1{}^n, P_2{}^n, \cdots, (n\geqq 0)$ をつけ加えることにより得られる．2階の論理式は1階の論理式の定義（定義 1.2）の「1階」という言葉を「2階」でおきかえ，さらにつぎの項目をつけ加えて得られる．

1′) P が任意の n 変数の述語変数，$t_1, \cdots, t_n$ が任意の項であるとき，$P(t_1, \cdots, t_n)$ は2階の論理式である．

3′) φ が2階の論理式で P が述語変数ならば，$(\forall P\varphi)$ および $(\exists P\varphi)$ もまた2階の論理式である．

述語変数に対しても，束縛されているとか自由であるといった概念が1階の変数の場合と同様に定義される．論理式 φ の中の2階の自由変数 $P_1, \cdots, P_k$ にのみ着目するとき，φ を $\varphi(P_1, \cdots, P_k)$ と書くことがある．2階の述語論理に対しても **LK** のような Gentzen 流の形式体系を定義することができる．もっとも基本的なものはつぎにあげる（2階の述語論理の）形式体系 **BC** である．**BC** の sequent は **LK** の sequent と全く同様に定義される．違うのは，**BC** では2階の論理式も許されるということだけである．**BC** の推論規則は **LK** の推論規則につぎの4つの規則を新たにつけ加えることにより得られる．

5′a) ($\forall_2$-右)

$$\frac{\Gamma\to\Theta,\ \varphi(P)}{\Gamma\to\Theta,\ \forall Q\varphi(Q)}$$

5′b) ($\forall_2$-左)

$$\frac{\varphi(R),\ \Gamma\to\Theta}{\forall Q\varphi(Q),\ \Gamma\to\Theta}$$

6′a) ($\exists_2$-右)

$$\frac{\Gamma\to\Theta,\ \varphi(R)}{\Gamma\to\Theta,\ \exists Q\varphi(Q)}$$

6′b) ($\exists_2$-左)

$$\frac{\varphi(P),\ \Gamma\to\Theta}{\exists Q\varphi(Q),\ \Gamma\to\Theta}$$

ただし ($\forall_2$-右) および ($\exists_2$-左) において述語変数 P は推論規則の下がわの sequent の中のどの論理式においても自由変数として現われてはならない．また R は任意の述語変数または述語記号である．そして P（または R）が m 変数のときには Q も m 変数の述語変数と

する.

BC における証明可能性の定義は LK の場合と全く同様におこなわれる. ところで実際に BC 上で数学的理論を展開する際には, その理論に個有な2階の述語記号を体系内で新たに導入することが必要となる. BC はそのような「述語」の存在を何も保証してくれないから, そのような場合にはつぎの内包の公理を仮定することが多い.

(10) φ $(=\varphi(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n, Q_1, \cdots, Q_k))$ を任意の論理式, またPをφに現われないようなm変数の述語変数とするとき
$\forall v_1 \cdots \forall v_n \forall Q_1 \cdots \forall Q_k \exists P \forall u_1 \cdots \forall u_m$
$(P(u_1, \cdots, u_m)$
$\equiv \varphi(u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n, Q_1, \cdots, Q_k))$.

つぎに2階の論理式に対する解釈について述べておこう. 2階の論理式の解釈を定義するには, 1階の論理式の解釈に2階の述語変数に対する解釈, すなわち2階の$\forall$および$\exists$に対する解釈をつけ加えてやればよい. その場合, つぎのように解釈をあたえるのが自然だろう. まず言語 $\boldsymbol{L}$ を一つ定め (1階の述語論理に対する) $\boldsymbol{L}$ の構造 $\mathfrak{M}=\langle M, F\rangle$ を任意に選ぶ. 1階の場合と同様に, M の各部分集合 U に対し新たに述語記号 $\bar{U}$ を導入しておく. もちろんこの場合も, $\bar{U}$ の $\mathfrak{M}$ における解釈 $\bar{U}^{\mathfrak{M}}$ としては U をとることにする. そして $\mathfrak{M}\models\varphi$ の定義につぎの 6′), 7′) をつけ加える.

6′) $\mathfrak{M}\models(\forall P\varphi(P)) \Longleftrightarrow$ どんな $U\subset M$ に対しても $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{U})$,

7′) $\mathfrak{M}\models(\exists P\varphi(P)) \Longleftrightarrow$ ある $U\subset M$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{U})$.

このように定義される2階の述語論理に対する構造を**主構造** (principal structure) とよぶ. 容易に確かめられるように, φ が BC で証明可能な論理式ならば, すべての主構造 $\mathfrak{M}$ において $\mathfrak{M}\models\varphi$ がなりたつ. しかし, つぎの補題に示されるように主構造に対する完全性定理は成立しない.

補題 2.8 すべての主構造 $\mathfrak{M}$ において $\mathfrak{M}\models\varphi$ となるが BC で証明可能でないような論理式 φ が存在する.

証明 π_0 を2階の Peano の自然数論の公理 (**A1** から **A6** および **A7′**) を $\wedge$ (かつ) で結んで得られる論理式とする. (2階の Peano の自然数論の公理は有限個であることに注意.) Gödel の第1不完全性定理よりある論理式ψが存在して BC で $\pi_0\supset\psi$ も $\pi_0\supset\neg\psi$ も証明可能ではない. ここで主構造 $\mathfrak{N}$ として $\langle N, F\rangle$ をとる. ただしNは自然数全体の集合, Fは 0, ′, +, ・に対する自然な解釈である. ところで π_0 は N を一意的に定めるから, π_0 のモデルとなるような任意の主構造 $\mathfrak{M}$ をとると $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ は同型になる. したがって $\mathfrak{N}\models\psi$ ならば ($\mathfrak{N}\models\pi_0\supset\psi$ だから) すべての主構造 $\mathfrak{M}$ に対し $\mathfrak{M}\models\pi_0\supset\psi$ となり, また $\mathfrak{N}\models\neg\psi$ ならばすべての主構造 $\mathfrak{M}$ に対し $\mathfrak{M}\models\pi_0\supset\neg\psi$ がなりたつ. したがって, 前者の場合には φ として $\pi_0\supset\psi$, 後者の場合には φ として $\pi_0\supset\neg\psi$ をとることにより補題が証明される.

この結果は, BC が体系として弱いことを意味するのではなく, BC をいくら強めても Gödel の定理が適用できる限りはやはり同様に (主構造に対する) 不完全が得られることを示しているのである. これに対し Henkin は2階の述語論理に対する構造の定義をつぎのように修正することにより, BC の完全性を証明した.

定義 2.2 $\mathfrak{M}=\langle M_1, M_2, F\rangle$がつぎの条件をみたすとき, $\mathfrak{M}$ は**一般構造** (general structure) とよばれる.

1) $\langle M_1, F\rangle$ は1階の述語論理に対する構造である.

2) M_2 は M_1 の部分集合を要素とするような空でない集合である.

$\mathfrak{M}$ が一般構造である場合の $\mathfrak{M}\models\varphi$ の定義は, 主構造の場合の定義の 6′), 7′) をそれぞれつぎのようにおきかえることにより得られる.

6″) $\mathfrak{M}\models(\forall P\varphi(P)) \Longleftrightarrow$ どんな $U\in M_2$ に対しても $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{U})$,

7″) $\mathfrak{M}\models(\exists P\varphi(P)) \Longleftrightarrow$ ある $U\in M_2$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{U})$.

明らかに, 一般構造 $\mathfrak{M}=\langle M_1, M_2, F\rangle$ において $M_2=$「M_1 の部分集合全体の集合」となるとき, $\mathfrak{M}$ は主構造となるのである.

定理 2.9 (**Henkin による, 2階の述語論理の形式体系 BC の完全性定理**) 論理式 φ が BC で証明可能となるための必要十分条件は任意の一般構造 $\mathfrak{M}$ において $\mathfrak{M}\models\varphi$ がなりたつことである.

たしかに実数論などを展開する場合には2階とか高階の述語論理を用いるのが自然なように思われる. しかしながら, これまで見てきたように1階の述語論理ではなりたつが2階ではもはやなりたたなくなってしまうような重要な性質も多い. この点をもう少し検討しておく必要があるのだが, 紙数も尽きたことなので次回にまわすことにしよう.

参 考 文 献

1) 弥永昌吉：数の体系（上），p. 204，岩波書店 (1972).
2) Rogers, H.: Theory of recursive functions and effective computability, p. 482, McGraw-Hill (1967).
3) 前原昭二：数学基礎論入門，p. 201，朝倉書店 (1977).
4) Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y., Lévy, A.: Foundations of set theory, 2nd edition, Studies in logic and the foundations of mathematics (以下 SLFM と略す), Vol. 67, p. 404, North-Holland (1973).
5) Takeuti, G.: Proof theory, SLFM, Vol. 81, p. 390, North-Holland (1975).
6) Smorynski, C.: The incompleteness theorems, Handbook of mathmatical logic, ed. by J. Barwise, SLFM, Vol. 90, pp. 821-865 (1977).
7) Paris, J., Harrington, L.: A mathematical incompleteness in Peano arithmetic, Handbook of mathematical logic, ed. by J. Barwise, SLFM, Vol. 90, pp. 1133-1142 (1977).

(昭和54年6月11日受付)