講 座

数理論理学 (3)†

小 野 寛 晰††

前回にひきつづいて数学的理論の形式化とその限界についてもう少し述べてみる.

2.5 論理と集合と

これまで1階や2階そして高階の述語論理の上で数学的理論がどのように展開されるかを述べてきた. この章の結びとして, これらの形式化の比較検討をしておきたい.

数学を形式的にとりあつかう主要な目的の一つは数学的な思考の枠組というものを明確にとらえることであろう. そのためには数学の中で暗黙のうちに使われていた概念や原理を明るみにひき出し, 数学の証明の中に現われる純粋に論理に関わる部分と純粋に数学に関わる部分とをできる限り明確に区別しなければならない. このような観点から数学の議論を分析してみると, 結局のところ数学は論理と集合概念の二つからなりたつということができよう. なぜなら数学に関わる部分というのはすべて集合論の枠組のなかで記述できるだろうから. したがって1階の述語論理とその上に展開される公理的集合論さえあれば数学の記述には十分だということになる. ここで誤解をさけるためにつぎのことを注意しておこう. あたえられた関係が整列順序であるということは2階の論理式なら表現できると**1.1**で述べたのだが, 実際それは1階の論理式では表現できないことが示される. しかしこのことと「あたえられた集合の上のある関係が整列順序である」ということが集合論の中で1階の論理式により記述されるということとは違うのである. 同様に, Abel 群が完備であることは1階の論理式では表現できないが, 「あたえられた集合が完備 Abel 群をなす」ことは集合論の枠組の中で表現できるのである. このような意味において数学の議論は1階の述語論理の上に展開される公理的集合論の中で記述できるといわれるのである. 一方このように集合と論理を明確に区別する立場からは, 集合概念の一部分を論理の中に組み込んでいるような高階の述語論理というものはあいまいで中途半端なものでしかないということになる.

ところが一方**2.1**でふれたように, 実数論を展開するのに高階の述語論理を用いるのはごく自然な考えのようにも思われる. つまり自然数全体の集合から出発してその集合の部分集合全体の集合, そしてまたその集合の部分集合全体の集合というようにつぎつぎと集合を作りだしていく. この手続きを任意有限回繰り返して得られる集合全体のクラスからなる枠組の中で実数論のほとんどの結果を記述することが可能になるのだ. 一方たとえこの枠組を更に拡げ公理的集合論で記述されるような枠組にまでもっていったところで実数論に関して新たに得られる結果は少ない. そしてまた公理的集合論は確定し難い問題をいくつもかかえているということもある. たとえば∀とか∃といった限定記号の意味について考えてみるとよい. 集合論で「すべての集合xについて」というときには, 集合全体からなる領域を想定せざるを得ないだろう. ところが集合全体の集まりというものに対して我々は確固としたイメージを持っているわけではないのだ. これに対し高階の論理の場合には限定記号の解釈は確定している. たとえば$\forall x$は「これこれの条件をみたす (具体的にいえば, ある集合の要素であるような) すべての集合 (または対象) xについて」というように解釈される. そして普通の数学の議論ではほとんどの場合このような形でのみ限定記号が現われるのであって, 本当に「すべての集合xについて」といった形の限定記号を必要とすることはまれである. つまりこれらのことからわかるように, 実際的な立場からは実数論の展開に集合論のような大きい枠組を持ちだす必要はなく高階の述語論理で十分なのである.

結局, (全く自明な結論なのだが) 形式化をおこなう目的に応じて形式体系は選ばれるということなのだ. 数学の一般的な枠組を論ずるならば集合論をとる必要があろうし, 特定の数学的理論の形式的な展開にはその理論の記述に適した体系を選べばよい. そしてその際高階の述語論理はその理論にちょうどふさわし

† Mathematical Logic (III) by Hiroakira ONO (Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University).

†† 広島大学総合科学部総合科学科

い「大きさ」の枠組をあたえてくれるかもしれない．一方高階の論理を選ぶことによって，1階の論理が持っていたような「良い」性質を利用することができなくなるかもしれない．また選ばれる形式体系としては1階とか高階の述語論理に限る必要もない．たとえば代数系をあつかうときには無限個の論理式を∧や∨で結ぶことを許すような言語が役に立つ．そのような論理——**無限論理** (infinitary logic)——は1階と2階のちょうど中間的な位置を占めている．そして無限論理は，1階の述語論理よりも表現力が豊かであるとか，2階以上の論理ではもはやなりたたないようないくつかの基本的な結果がなりたつといった利点を持つ．そのかわり無限論理に対する形式体系では無限個の前提をもつような推論規則が必要になり，したがって我々は有限的な立場というものを捨てざるを得ないということになるのである．

3. 構成的な方法と超限的な方法

数理論理学で用いられる手法は大別すると組合せ論的または構成的な手法と，集合論的または超限的な手法とからなる．超限的な方法というのは無限集合とか無限のプロセスを含むような方法のことである．つまり普通の数学で使われている方法をここでは超限的な方法とよんでいるのである．**2.2** で述べたように数理論理学のある種の問題については構成的な方法を用いざるを得ない．たとえば Peano の自然数論 **PA** の無矛盾性を証明しようとするときなどがこれに該当する．自然数全体の集合$\boldsymbol{N}$をとり関数記号をその中で自然に解釈すればそれは **PA** のモデルになる，だから **PA** は無矛盾である，と答えるのは構成的な立場からは意味がない．なぜなら，この議論は$\boldsymbol{N}$をその中に含むような（弱い）集合論の中で展開される．したがってその集合論の無矛盾性はもちろん仮定されなければならない．ところがそのような集合論は **PA** よりも強く，したがってその無矛盾性を仮定すれば明らかに **PA** の無矛盾性が導かれるのである．たしかに Gödel の定理によれば **PA** で証明できないような原理を持ってこない限りは **PA** の無矛盾性は証明できない．しかし「有限の立場」で認められるような原理を仮定し，有限的，構成的な手法により無矛盾性が証明できるならば，それは重要な意味を持つことになろう．事実，Gentzen は ε 数とよばれる順序数までの超限帰納法を用いて **PA** の無矛盾性を証明し，さらにこの帰納法がある意味で有限の立場から正当化されることを示したのであった．

このように，形式体系において証明が持つ構造を，構成的な方法により研究する分野は証明論とよばれている．これに対し，形式体系の意味づけに用いられた「モデル」の一般的性質を超限的な方法を用いて研究する分野はモデル理論とよばれている．この章ではいくつかの例について，構成的な方法と超限的な方法がどのように使われているかを述べてみることにする．

3.1 Gentzen の基本定理

Herbrand と Gentzen は Hilbert の描いたプログラムに沿い有限的な手法を用いて数理論理学におけるいくつかの重要な結果を得た．Herbrand の結果は **3.2** で述べることにして，ここでは Gentzen の結果を紹介することにより構成的な方法というものを説明していきたい．

Gentzen は1階の述語論理に対する形式体系 **LK** を定義し（**1.5** 参照），さらにつぎの定理を証明した．

定理　3.1 (LK の基本定理) $\Gamma\to\Delta$ を任意の sequent とする．もし $\Gamma\to\Delta$ が **LK** で証明可能ならば，$\Gamma\to\Delta$ は **LK** で cut を一度も用いることなしに証明可能である．

cut という推論規則は

$$\frac{\Gamma\to\Theta,\varphi\quad \varphi,\Delta\to\Lambda}{\Gamma,\Delta\to\Theta,\Lambda}$$

という形をしている．したがって Gentzen の基本定理は，証明可能な sequent に対し必ず「直接証明」が存在することを意味している．ここでは基本定理の証明の詳細に立ち入ることはできないので，そのアウトラインだけを述べるにとどめる（詳細についてはたとえば1）を見よ）．まず最初に cut に似た mix という推論規則を導入する．論理式 φ に関する mix とは

$$\frac{\Gamma\to\Theta\qquad \Delta\to\Lambda}{\Gamma,\Delta^*\to\Theta^*,\Lambda}$$

の形の推論規則である．ただし Θ および Δ は共に少なくとも一つは φ を含む．また Θ^* および Δ^* はそれぞれ Θ および Δ からすべての φ を除いて得られる論理式の列とする．つぎの図に示されるように mix は cut および cut 以外の構造に関する推論規則を組合せることにより得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\text{2b), 3b) を用いる}}}{\Delta\to\Theta^*,\varphi}\qquad \dfrac{\dfrac{\Delta\to\Lambda}{\text{2a), 3a) を用いる}}}{\varphi,\Delta^*\to\Lambda}}{\Gamma,\Delta^*\to\Theta^*,\Lambda}\text{(cut)}$$

逆に cut は mix と（cut 以外の）構造に関する推論

規則を組合せて得られる.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta,\varphi \qquad \varphi,\Delta\to\Lambda}{\Gamma,\Delta^*\to\Theta^*,\Lambda}(\varphi \text{ に関する mix})}{\text{2), 3) を用いる}}}{\Gamma,\Delta\to\Theta,\Lambda}$$

いま **LK** から cut を除き，そのかわりに mix をつけ加えて得られる体系を **LK*** とする．明らかに **LK** の基本定理はつぎの補題から導かれる．

補題 3.2 sequent $\Gamma\to\Delta$ が **LK*** で証明可能ならば，$\Gamma\to\Delta$ は **LK*** で mix を一度も用いることなしに証明可能である．

そしてこの補題を証明するには，さらにつぎの補題を証明しさえすればよい．

補題 3.3 **LK*** における証明図 $\boldsymbol{P}$ の end sequent が $\Gamma\to\Delta$ であり，さらに $\boldsymbol{P}$ の中には mix がただ一つ，一番最後の推論規則として現われているとする．すると $\Gamma\to\Delta$ は mix を一度も用いることなしに証明可能である．

この**補題 3.3** を証明するのに，Gentzen は mix をとり除く手続きを具体的にあたえたのであった．さていま $\Gamma\to\Delta$ が **LK*** で証明可能だったとしよう．mix がその証明の中で少なくとも一度は用いられているならばそのような mix のうち証明図の中で一番上にあるものを一つとり，それに対し**補題 3.3** を適用する．そうするとその mix はとり除かれることになる．この手続きをつぎつぎに繰り返していけば最後には証明図の中に現われる mix はすべてとり除かれ，したがって**補題 3.2** が示されるのである．これまでの証明をふりかえってみると結局のところ Gentzen はつぎのような強い形で基本定理を証明したことがわかる．

定理 3.4 あたえられた **LK** の証明図に対し，その証明と同じ end sequent を持ちさらに cut を一つも含まないような証明図を作り出す具体的な手続きが存在する．

このような構成的な証明に対し，超限的な方法により Gentzen の基本定理を証明することも可能である．そのためには，**LK** から cut を除いて得られる体系に対する完全性定理を示せばよい．しかしそのような超限的な方法に基づく証明は**定理 3.4** でのべた cut を含まない証明図に変換する手続きについては何の情報もあたえてくれないのである．つぎに基本定理の応用について述べておこう．

定義 3.1 論理式 ψ が論理式 φ の（一つの）**部分論理式**であるとは，ψ が φ の一部分となるような論理式になっていることをいう．正確には，つぎのように帰納的に定義される．

1) R が n 変数の述語記号，$t_1,\cdots,t_n$ が項，そして φ が $R(t_1,\cdots,t_n)$ の形であるときは，φ のみが φ の部分論理式である．
2) φ が $\neg\psi$ の形のとき，ψ の部分論理式および φ 自身が φ の部分論理式である．
3) φ が $\psi\land\theta$, $\psi\lor\theta$, $\psi\supset\theta$ のいずれかの形のとき，ψ の部分論理式，θ の部分論理式そして φ のいずれもが φ の部分論理式である．
4) φ が $\forall v\psi(v)$, $\exists v\psi(v)$ のいずれかの形のとき，$\psi(t)$ の部分論理式（ただし t は任意の項）および φ のいずれもが φ の部分論理式である．

ここでもう一度 cut 以外の **LK** の推論規則を眺めてみよう．すると各推論規則においてその上側に現われるどの論理式も，下側に現われるどれかの論理式の部分論理式になっていることがわかる．したがって**定理 3.1** よりつぎの結果が得られる．

定理 3.5 $\boldsymbol{P}$ を cut を一つも含まないような **LK** の証明図とすると，$\boldsymbol{P}$ の中に現われる任意の論理式は $\boldsymbol{P}$ の end sequent に現われる論理式の部分論理式になっている．したがって **LK** で証明可能な任意の sequent は，その sequent に現われる論理式の部分論理式だけが現われるような証明図を持つ．

この定理で述べられているような性質を持つ証明図のことを，我々ははじめに「直接証明」とよんだのである．この定理からただちにつぎの結果が導かれる．

定理 3.6 **LK** は無矛盾である．すなわち，**LK** で sequent $\to$ は証明可能ではない．

定理 3.1 に対する構成的な証明が **LK** の無矛盾性の構成的な証明をあたえることに注意しておきたい．基本定理のもう一つの応用例としてつぎの定理をあげておく．

定理 3.7 (Craig の補間定理) 論理式 $\varphi\supset\psi$ が **LK** で証明可能であるとする．φ と ψ とに共通な述語記号が存在するときには，$\varphi\supset\psi$ の補間式とよばれるある論理式 θ が存在し，θ は φ と ψ に共通な述語記号および定数記号からなりさらに $\varphi\supset\theta$ および $\theta\supset\psi$ が **LK** で証明可能になる．また φ と ψ とに共通な述語記号が一つも存在しないときには $\neg\varphi$ または ψ が **LK** で証明可能になる．

前原は Gentzen の基本定理を用いて**定理 3.7** の構成的な証明をあたえた．その証明においては $\varphi\supset\psi$ の証明図から具体的にその補間式 θ を求める手続きがあ

たえられる（1）参照）．一方，**定理 3.7** のモデル論的な証明も存在する．その証明では $\varphi\supset\phi$ の補間式が存在しないと仮定して $\varphi\land\neg\phi$ のモデルを作るのである．ところで $(\neg(\varphi\supset\phi)\equiv(\varphi\land\neg\phi))$ はつねに正しい論理式である．したがって $\varphi\supset\phi$ のなりたたないようなモデルが存在することになり，$\varphi\supset\phi$ は **LK** で証明可能でないことになる．このような証明では補間式 θ の具体的な形はわからないだろう．

一般に構成的な方法による証明は多くの場合複雑なステップからなる綿密な議論を要するが，そのかわり証明の構造についての多くの情報を提供してくれる．そして**定理 3.4** や **3.7** に見たように，超限的な方法による単なる存在証明を構成的な意味での存在証明にまで強めることを可能にしてくれるのである．

3.2 Herbrand の定理

この節では Herbrand の定理を紹介する．Herbrand の定理は定理の機械証明をおこなう際のもっとも基本的な結果として知られている．しかしながら普通は超限的な方法を用いた Herbrand の定理の証明のみが知られていて，Herbrand のもともとの論文の内容についてはあまり知られていないように思われる．その論文の中で Herbrand は彼の結果を完全に構成的な方法により証明しているのである．彼が得た結果は，普通 Herbrand の定理として知られているものよりももっと強く，実質的に前節で述べた Gentzen の結果の先きがけをなすものである．また彼の論文を読んでみると，Gödel により証明された完全性定理の発見の一歩手前のところまで来ていたことがわかる．そして彼がその最後の一歩を踏み出さなかったのは彼が有限の立場を厳しく守ろうとしたからであった．（完全性定理の証明には超限的な方法が必要である．）一方，定理の機械証明のために Herbrand の定理を利用する立場からは定理そのものの内容が重要なのであって定理がどのように証明されるかは特に問題にされないようだ．Herbrand の定理の有限の立場からの証明は長くなるのでここで述べることはできない．興味のある読者は 2) を参照されたい．

Herbrand のアイデアはおおよそつぎのようなものである．よく知られているように，命題論理の任意の論理式がつねに正しい（トートロジー）か否かを決定する手続きが存在する．そこであたえられた 1 階の論理式を命題論理の論理式へ変換する手続きをあたえ，それを利用してあたえられた 1 階の論理式がつねに正しい（すなわち，**LK** で証明可能）かどうかの判定をおこなおうとするのである．より正確にいえば 1 階の任意の論理式 φ に対し，限定記号を含まない 1 階の論理式の列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p, \cdots$ をあたえる手続きがあって，つぎの 1) と 2) が同値になる．

1) φ は **LK** で証明可能である．
2) ある自然数 p に対し，φ_p を命題論理の論理式とみるとトートロジーになる．

Herbrand は 1) から 2) を導くにあたり，つぎのような原始帰納的関数 f が存在することを示した．

φ の証明図 $\boldsymbol{P}$ があたえられたとき，$f(\ulcorner\boldsymbol{P}\urcorner)=p$ ならば φ_p はトートロジーになる．

ところでこのような自然数 p を一定の自然数でおさえることはできない．なぜなら，もしそうでないとすると上の命題とトートロジーか否かを判定する手続きが存在するということから，1 階の任意の論理式が **LK** で証明可能であるか否かを判定する手続きが存在することになる．これはつぎの定理と矛盾するのである．

定理 3.8 (Church) 任意にあたえられた 1 階の論理式が **LK** で証明可能か否かを判定するアルゴリズムは存在しない．

Herbrand の証明では，任意の論理式から直接に限定記号を含まない論理式の列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \cdots$ をあたえている．しかしここではまず φ に対しある標準形 φ^* を定め，そのあとで φ^* から限定記号を含まない論理式を作りだすことにする．

補題 3.9 つぎの各論理式は **LK** で証明可能である．ただし，以下で変数 u は論理式 φ において自由変数としては現われないものとする．

1a) $\forall u\phi(u)\equiv\forall v\phi(v)$ 1b) $\exists u\phi(u)\equiv\exists v\phi(v)$

ただし 1a) および 1b) で，$\phi(v)$ は $\phi(u)$ の中の u をすべて v でおきかえて得られる論理式でありさらには v は $\phi(u)$ の中には現われないものとする．

2a) $\varphi\land\forall u\phi(u)\equiv\forall u(\varphi\land\phi(u))$
2b) $\varphi\land\exists u\phi(u)\equiv\exists u(\varphi\lor\phi(u))$
3a) $\varphi\lor\forall u\phi(u)\equiv\forall u(\varphi\lor\phi(u))$
3b) $\varphi\land\exists u\phi(u)\equiv\exists u(\varphi\land\phi(u))$
4a) $\varphi\supset\forall u\phi(u)\equiv\forall u(\varphi\supset\phi(u))$
4b) $\varphi\supset\exists u\phi(u)\equiv\exists u(\varphi\supset\phi(u))$
5a) $\forall u\phi(u)\supset\varphi\equiv\exists u(\phi(u)\supset\varphi)$
5b) $\exists u\phi(u)\supset\varphi\equiv\forall u(\phi(u)\supset\varphi)$
6a) $\neg\forall u\phi(u)\equiv\exists u\neg\phi(u)$
6b) $\neg\exists u\phi(u)\equiv\forall u\neg\phi(u)$.

$Q_1, \cdots, Q_n (n\geqq 0)$ をそれぞれ $\forall$ と $\exists$ のいずれかとし，

ψを限定記号を一つも含まないような論理式とする．そのとき $Q_1u_1\cdots Q_nu_n\psi$ の形の論理式を**冠頭式** (prenex formula) とよぶ．補題 3.9 を用いるとつぎの定理が証明される．

定理 3.10 任意の論理式φに対しある冠頭式ψが存在して，$\varphi\equiv\psi$ が LK で証明可能になる．

証明はφの中の限定記号を補題 3.9 を用いることにより前に出してやればよい．その際，補題のuとφに関する条件がみたされなくなることが生ずるが，そのときには 1a) または 1b) を用いてあらかじめ変数のおきかえをおこなえばよい．

定理 3.10 がなりたつような冠頭式ψは必ずしもφから一意的には定まらないが，このような論理式ψのことをφの**冠頭標準形** (prenex normal form) という．つぎに冠頭式ψがとくに $\exists u_1\cdots\exists u_n\theta$ $(n\geqq 0)$ の形（ただしθは限定記号を一つも含まない論理式）であるとき，ψは **∃-冠頭式**であるという．いまφを閉じた（すなわち，自由変数を含まないような）論理式とする．そのとき ∃-冠頭式$\tilde{\varphi}$をつぎのようにして作る．まずφが ∃-冠頭式ならばφを$\tilde{\varphi}$とする．φが ∃-冠頭式でなければφは $\exists u_1\cdots\exists u_m\forall v\psi(u_1,\cdots,u_m,v)$ $(m\geqq 0)$ の形をしている．そこで新たにm変数の関数記号fを導入し，φ'を $\exists u_1\cdots\exists u_m\psi(u_1,\cdots,u_m,f(u_1,\cdots,u_m))$ とする．($m=0$ のときにはfのかわりに新しい定数記号cを導入する．) φ'が ∃-冠頭式ならばφ'を$\tilde{\varphi}$とする．そうでなければ上の手続きを繰り返す．このようにして最終的に ∃-冠頭式$\tilde{\varphi}$が得られる．このようにして得られた$\tilde{\varphi}$は一般にはもとの言語$\boldsymbol{L}$の論理式ではない．$\tilde{\varphi}$を構成する際に新たに関数記号や定数記号が導入されているからである．

定理 3.11 φを閉じた任意の論理式とする．φが LK で証明可能となるための必要十分条件は$\tilde{\varphi}$が LK で証明可能となることである．

証明．簡単のためにたとえばφが $\forall x\exists y\forall z\psi(x,y,z)$ の形であったとしよう．ただし $\psi(x,y,z)$ は限定記号を一つも含まないものとする．すると$\tilde{\varphi}$は $\exists y\psi(c,y,f(y))$ の形になる．ところで $\varphi\supset\tilde{\varphi}$ が LK で証明可能になることは容易に示される．したがってφが LK で証明可能ならば$\tilde{\varphi}$も LK で証明可能になる．逆にφが LK で証明可能でないと仮定する．すると完全性定理より言語 L のある構造 $\mathfrak{M}=\langle M,F\rangle$ が存在して $\mathfrak{M}\nvDash\varphi$ がなりたたない．つまり $\mathfrak{M}\vDash\neg\varphi$. したがって

$$\mathfrak{M}\vDash\exists x\forall y\exists z\neg\psi(x,y,z)$$

がなりたつ．するとある $a\in M$ が存在して

$$\mathfrak{M}\vDash\forall y\exists z\neg\psi(\bar{a},y,z)$$

がなりたつ．さらに任意の $b\in M$ に対しある $e_b\in M$ が存在して $\mathfrak{M}\vDash\neg\psi(\bar{a},\bar{b},\bar{e}_b)$ がなりたつ．ここで$\mathfrak{M}$の解釈を拡張して，$c^{\mathfrak{M}}=a$, $f^{\mathfrak{M}}(b)=e_b$ $(b\in M)$ と定める（e_bはbから一意的には決まらないかもしれないが，各 $b\in M$ に対し $\mathfrak{M}\vDash\neg\psi(\bar{a},\bar{b},\bar{e}_b)$ がなりたつようなe_bを一つ選んでおくのである）．すると $\mathfrak{M}\vDash\forall y\neg\psi(c,y,f(y))$ となるから，$\mathfrak{M}$で $\exists y\psi(c,y,f(y))$，すなわち$\tilde{\varphi}$はなりたたないことになる．ゆえに$\tilde{\varphi}$は LK で証明可能でない．φが一般の形の論理式のときも全く同様に証明される．

さて，φを任意の論理式，φ^*をその閉包（1.3参照）とする．すると明らかに，φが LK で証明可能となるための必要十分条件はφ^*が LK で証明可能になることである．つぎにφ^*の冠頭標準形ψを作りさらにψから ∃-冠頭式$\tilde{\psi}$を作る．φからこのようにして得られる ∃-冠頭式$\tilde{\psi}$のことをφの **Skolem 標準形**という．定理 3.10 と 3.11 よりつぎの系が得られる．

系 3.12 任意の論理式φに対し，φが LK で証明可能となるための必要十分条件はφの Skolem 標準形が LK で証明可能となることである．

あたえられた論理式からその Skolem 標準形は機械的に求められる．したがって系 3.12 より我々の問題はあたえられた ∃-冠頭式が LK で証明可能となるか否かを判定する（部分的な）アルゴリズムを見い出す問題に帰着される．

変数を一つも含まないような言語$\boldsymbol{L}$上の項全体の集合をT_Lと書く．ただし$\boldsymbol{L}$が定数記号を一つも含まないときにはT_Lは空になってしまうから，このような場合にはあらかじめ定数記号を一つつけ加えておくことにする．このT_Lのことを$\boldsymbol{L}$上の **Herbrand 領域**という．言語$\boldsymbol{L}$の構造$\mathfrak{M}$が**カノニカル**であるとは，$\mathfrak{M}$の対象領域がT_Lであり，さらに

1) cが L の任意の定数記号のとき，$c^{\mathfrak{M}}=c$
2) fが L の任意のn変数関数記号のとき，任意の $t_1,\cdots,t_n\in T_L$ に対し

$$f^{\mathfrak{M}}(t_1,\cdots,t_n)=f(t_1,\cdots,t_n)\quad(\in T_L)$$

とする．カノニカルな構造においては述語記号の解釈を除いては解釈が確定していることを注意しておこう．

補題 3.13 Φを限定記号を含まないような閉じた論理式のある集合とする．Φのモデルが存在するならばΦのカノニカルなモデルも存在する．

証明 Φのモデルを$\mathfrak{N}$とする．そのときカノニカルな構造$\mathfrak{M}$をつぎのように定義する．（述語記号の解釈のみを定めればよい．）Rを任意のn変数の述語記号とするとき

$$R^{\mathfrak{M}}=\{(t_1,\cdots,t_n)\in(T_L)^n \mid \mathfrak{N}\models R(t_1,\cdots,t_n)\}.$$

すると帰納法により限定記号を含まないような任意の閉じた論理式ϕに対し，$\mathfrak{M}\models\phi\Leftrightarrow\mathfrak{N}\models\phi$ のなりたつことが示される．したがって$\mathfrak{M}$もΦのモデルになる．

この補題からただちにつぎの結果が得られる．

補題 3.14 φを限定記号を一つも含まないような閉じた論理式とする．φがつねに正しいための必要十分条件はφが任意のカノニカルな構造で正しいことである．

定理 3.15 (Herbrand) $\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$ を任意の閉じた$\exists$-冠頭式とする．ただし $\phi(u_1,\cdots,u_n)$ は限定記号を含んでいないとする．そのとき $\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$ が **LK** で証明可能となるための必要十分条件は，ある自然数mと$T_L{}^*$のある要素 $t_{i1},\cdots,t_{in}(i=1,\cdots,m)$ が存在して

（1） $\phi(t_{11},\cdots,t_{1n})\vee\cdots\vee\phi(t_{m1},\cdots,t_{mn})$

が任意のカノニカルな構造で正しいことである．ただし L^* は論理式 $\phi(u_1,\cdots,u_n)$ に現われる関数記号と定数記号からなる言語とする．

証明 （1）が任意のカノニカルな構造で正しいと仮定する．すると**補題3.14**より（1）は **LK** で証明可能になる．ところで $i=1,\cdots,m$ に対し

$$\phi(t_{i1},\cdots,t_{in})\rightarrow\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$$

は **LK** で証明可能だから，結局 $\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$ が **LK** で証明可能になる．逆にどんなmおよび$T_L{}^*$のどんな要素 $t_{i1},\cdots,t_{in}(i=1,\cdots,m)$ に対してもあるカノニカルな構造で（1）がなりたたないと仮定しよう．すると集合 $\{\neg\phi(t_{11},\cdots t_{1n}),\cdots,\neg\phi(t_{m1},\cdots,t_{mn})\}$ はモデルを持つことになる．いま集合Φを

$$\Phi=\{\neg\phi(t_1,\cdots,t_n)\mid t_1,\cdots,t_n\in T_L{}^*\}$$

により定めると，上に述べたことからΦの任意の有限部分集合はモデルを持っている．したがってコンパクト性定理（**定理 1.6**）よりΦ自身もモデルを持つ．**補題3.13**を用いれば，さらにΦのカノニカルなモデル$\mathfrak{M}$も存在する．するとそのような構造$\mathfrak{M}$では $\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$ はなりたたないことになる．したがって $\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n)$ は **LK** で証明可能でない．

ところで限定記号を含まないような閉じた論理式が任意のカノニカルなモデルで正しいか否かの判定は，命題論理の論理式がトートロジーになるか否かの判定と全く同様におこなうことができる．しかし上の定理が主張しているのは，もし $t_{ij}(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ を「うまく見つける」ことができれば（1）が任意のカノニカルな構造で正しいというのである．したがってこのような t_{ij} を見つける方法をあたえる必要がある．このためにはたとえばつぎのような方法が考えられる．まず $T_L{}^*$ の各要素tに対しその高さ$h(t)$をつぎのように定める．tが定数記号のときは $h(t)=1$，tが $f(t_1,\cdots,t_n)$ の形のときは $h(t)=\max\ \{h(t_1),\cdots,h(t_n)\}+1$ とする．そして $H_i=\{t\in T_L{}^*\mid h(t)\leqq i\}\ (i\geqq 1)$ および

$$\Phi_i=\{\phi(t_1,\cdots,t_n)\mid t_1,\cdots,t_n\in H_i\}$$

とする．L^*は有限だから H_i および Φ_i も有限集合である．そこで Φ_i の中のすべての論理式を$\vee$で結んで得られる論理式をφ_iとする．**定理3.15**から容易につぎの結果が導かれる．

系 3.16 閉じた$\exists$-冠頭式 $\varphi(=\exists u_1\cdots\exists u_n\phi(u_1,\cdots,u_n))$ が **LK** で証明可能となるための必要十分条件はある自然数 p が存在して（φから上のようにして定義された）論理式 φ_p が任意のカノニカルな構造で正しいことである．

したがって任意に閉じた$\exists$-冠頭式φがあたえられたとき，それが **LK** で証明可能か否かを判定するには上のように $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ を順次作り，それが任意のカノニカルな構造で正しいかどうかを調べればよい．もちろんφが証明可能であればこの手続きによりいつかは「φが証明可能である」ことがわかる．しかしφが証明可能でないときにはこの手続きによる計算は無限に続く．この意味でここに述べた手続きは「部分的な」アルゴリズムなのである．ここで述べた手続きは能率的であるとはいえないので，計算機を用いて定理の証明をおこなうにはこの点を改良して，できるだけ能率よく**定理3.14**にある（1）の論理式を見い出すような手続きをあたえなければならない．そのような手続きの一つがJ. A. Robinsonによりあたえられた **resolution principle** であり，現在の定理の機械証明の多くはこのresolution principleをさらに改良することによりおこなわれているのである（3）参照）．なお定理の機械証明に関する多くの文献では，論理式φがトートロジーであることを示すかわりに$\neg\varphi$が矛盾を含むことを示している．そのために**定理 3.15**に至る命題の多くが双対な形で表現されていることに注意してほしい．

3.3 モデル理論から

モデル理論においてはもっぱら超限的な方法が用いられている．この節ではモデル理論が代数学にうまく適用される例をあげることにする．そして最後のところで構成的な証明方法についてもふれる．ここでは体の理論をとりあげるので，体についてのいくつかの基礎的な知識を仮定する．（たとえば 5) 参照.）

言語 $\boldsymbol{L}$ の二つの構造 $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ が**初等的に同値** (elementarily equivalent) であるとは，$\boldsymbol{L}$ の任意の閉じた論理式 φ に対し $\mathfrak{A}\models\varphi\Leftrightarrow\mathfrak{B}\models\varphi$ がなりたつことをいう．T を言語 $\boldsymbol{L}$ の閉じた論理式のある集合とするとき，T が**完全**であるとは $\boldsymbol{L}$ のどんな閉じた論理式 φ に対しても φ か $\neg\varphi$ のいずれか一方が T で証明可能になることをいう．明らかに T が完全ならば T は無矛盾である．また T が完全となるための必要十分条件は T の任意のモデルが初等的に同値になることである．任意にあたえられた閉じた論理式が T に属すか否かを判定する手続きが存在するとき，T は**帰納的に公理化可能**であるといわれる．さらに任意にあたえられた閉じた論理式が T で証明可能か否かを判定する手続きが存在するとき T は**決定可能**であるといわれる．

定理 3.17　T が帰納的に公理化可能でありさらに完全であるならば，T は決定可能である．

証明　まず T に属す論理式を一列に並べておく．その列を用いて，T から証明できる論理式全体をつぎつぎに生成する手続きが作られる．φ を任意の閉じた論理式とすると，T は完全だから φ か $\neg\varphi$ のいずれかが T で証明可能になる．したがって上の手続きでいつかは φ または $\neg\varphi$ が生成されるはずである．ゆえに T は決定可能となる．

体の理論を記述するのに用いられる言語 $\boldsymbol{L}_0$ は定数記号 0, 1, 関数記号 $+$, $\cdot$ および等号からなる．体の公理系は有限個の閉じた論理式からなる．代数的閉体の公理系 **ACF** は体の公理およびつぎの可算個の論理式 $\sigma_n (n=1,2,\cdots)$ からなる．

$$\sigma_n:\ \forall y_0\cdots\forall y_{n-1}\exists x(y_0+y_1x+\cdots+y_{n-1}x^{n-1}+x^n=0).$$

$\sigma_n (n=1,2,\cdots)$ は，任意の1次以上の多項式は少なくとも一つの根を持つことを意味している．ところで **ACF** は完全ではない．なぜならいろいろな標数を持つ代数的閉体が存在するからである．事実，標数が p ($p\neq 0$ で p は素数) であることはつぎのように $\boldsymbol{L}_0$ の論理式 γ_p で表現される．まず自然数 n に対し $n\circ 1$ を $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}$ の省略形とする．すると γ_p は

$$\gamma_p:\ \neg(2\circ 1=0)\wedge\cdots\wedge\neg((p-1)\circ 1=0)\wedge(p\circ 1=0)$$

と表わされる．また標数が 0 であることは無限個の論理式の集合 $K=\{\neg(n\circ 1=0)\mid n\geq 2\}$ により表現される．よく知られているように標数 0 の任意の体は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ と同型な部分体を持つ．標数 0 の代数的閉体の公理系 $\mathbf{ACF}_0$ は **ACF** と K の和集合からなる．標数 0 の代数的閉体の代表的な例は複素数体 $\boldsymbol{C}$ である．（代数学の基本定理より，複素係数の任意の多項式は複素根を必ず持つということを思い出してほしい.）$\mathbf{ACF}_0$ は明らかに帰納的に公理化可能である．以下で，$\mathbf{ACF}_0$ が完全であることを示そう．代数的閉体に関する Steinitz の定理を用いると，任意の非可算濃度 κ に対し濃度 κ の $\mathbf{ACF}_0$ のモデルは（同型を除けば）ただ一つ存在することが示される．ところで Löwenheim-Skolem の定理（**定理 1.7**）を用いるとつぎの結果が得られる．

定理 3.18　閉じた論理式の可算集合 T が有限モデルを持たず，さらにある無限濃度 λ に対して濃度 λ の T のモデルはただ一つだけ存在すると仮定する．すると T は完全である．

証明　T が完全でないと仮定すると，ある閉じた論理式 φ が存在して，φ も $\neg\varphi$ も T で証明可能でない．したがって $T_1=T\cup\{\varphi\}$ および $T_2=T\cup\{\neg\varphi\}$ のモデルが存在する．T は有限モデルを持たないから T_1 および T_2 のモデルはともに無限である．T は可算集合だから T_1 および T_2 も可算であり，したがって Löwenheim-Skolem の定理よりその濃度が λ であるような T_1 のモデル $\mathfrak{A}_1$ と T_2 のモデル $\mathfrak{A}_2$ が存在する．ところが仮定から $\mathfrak{A}_1$ と $\mathfrak{A}_2$ は同型となる．したがって $\mathfrak{A}_1\models\varphi$ かつ $\mathfrak{A}_2\models\neg\varphi$ とはなりえない．これは矛盾である．

定理 3.18 において，T として $\mathbf{ACF}_0$ をとればつぎの結果が得られる．

定理 3.19　標数 0 の代数的閉体の公理系 $\mathbf{ACF}_0$ は完全であり，したがって決定可能である．

系 3.20　任意の二つの標数 0 の代数的閉体は初等的に同値である．

この系はつぎのことを意味している．たとえば複素解析を用いて複素数体についての定理が得られたとする．もしその定理が $\boldsymbol{L}_0$ の論理式により表わせるならばその定理は標数 0 の任意の代数的閉体においてもなりたつのである．

$\mathbf{ACF}_0$ と同様に，任意の標数 p (p は素数) を持つ代数的閉体の公理系が完全でありしたがって決定可能

であることが証明される．このほか実閉体や有限体の公理系も決定可能であることが知られている．ところで上で述べた証明可能か否かを判定する手続き（**定理 3.17**）は実際的な立場からは全く役に立たない．この判定の手続きを具体的にあたえるためには，**限定記号の除去**とよばれる構成的な方法が用いられる．

定理 3.21 Tを代数的閉体，実閉体，有限体の公理系のいずれかとする．Tの任意の閉じた論理式φに対し，限定記号を一つも含まないような閉じた論理式 φ' が存在して $\varphi\equiv\varphi'$ がTで証明可能になる．しかも φ から φ' を構成する具体的な手続きが存在する．

ところで限定記号を一つも含まない論理式 φ' が証明可能か否かは容易に判定することができる．したがって定理 **3.21** によりTにおける証明可能性を判定する構成的な手続きが求められたことになるのである．

参考文献

1) 前原昭二：数理論理学，p. 236，培風館 (1973).
2) Herbrand, J.: Recherches sur la théorie de la démonstration (1930)（の5章の訳と解説），From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic 1879～1931, ed. by J. van Heijenoort, pp. 525-581, Harvard Univ. Press (1967).
3) Chang, C., and Lee, R. C.: Symbolic logic and mechanical theorem proving, p. 331, Academic Press (1973).
4) Chang, C. C., and Keisler, H. J.: Model theory, p. 554, North-Holland (1973).
5) 弥永昌吉，小平邦彦：現代数学概説 I, p. 602, 岩波書店 (1961).

（昭和54年7月4日受付）