

拡散モデルとジャンプ拡散モデルを用いた 日経 225 オプション市場の価格形成に関する検証

小林 寛 司^{†1} 宮崎 浩 一^{†1} 田中 健 太 郎^{†1}

本研究では、まず、日経 225 オプション市場の価格形成、具体的にはオプションのスマイルやスキューの傾きが、オプション満期の長さや株式市場の環境によってどのような影響を受けるかについて確認する。そのうえで、価格形成と整合的な株価モデルの候補としてジャンプ拡散モデルを採り上げ BS モデルと対比させて価格形成と株価モデルとの整合性を検証する。検証に際しては、オプションモデル価格と市場価格との誤差の分布を用いて推定誤差がビッド・アスク内に収まる確率も導出する。検証結果からは、ジャンプ拡散モデルが日経 225 オプション市場の価格形成とおおむね整合的な株価モデルであり、市場の混乱期にはジャンプ成分の重要性が高まることが確認された。

An Empirical Analysis on Price Formation in NIKKEI225 Options Market Using Diffusion and Jump-diffusion Models

HIROSHI KOBAYASHI,^{†1} KOICHI MIYAZAKI^{†1}
and KENTARO TANAKA^{†1}

This research first of all empirically examines the price formation in NIKKEI225 options market, in more detail how the slope of options' smile and skew depends on the options' maturity and the underlying equity market condition. Second, we discuss whether the jump-diffusion model is able to rationalize the price formation comparing with the case of BS model. For the discussion, we derive the probability that the estimation error falls on the bid-offer spread of options trades using the estimation error distribution. The empirical results tell us that the jump-diffusion model is in general rationalizes the price formation in NIKKEI225 options market and the role of the jump part becomes essential in the turbulent market condition.

1. はじめに

ヨーロッパ・オプションとは、所定の期日（満期日）に、ある資産（以下株式を想定）をあらかじめ決められた価格（権利行使価格）で買う（コールオプション）、または売る（プットオプション）ことができる権利である。オプション評価モデルで最も著名なモデルは、Black-Scholes モデル²⁾（以下 BS モデル）である。BS モデルでは、株価リターンの従う確率過程としてウイナー過程を採用しており、この仮定の下ではオプションの満期までの株価リターンが従う確率分布は、満期までの日数にかかわらず正規分布である。しかし、現実には、オプション満期までの株価リターンの分布が正規分布よりも裾の厚い分布（図 1 を参照）であることが多く、現実のオプション市場価格は、正規分布を仮定した BS モデルの価格から乖離する。

この裾の厚い分布を用いて満期におけるペイオフ（コール（またはプット）オプションならば、満期における株価が権利行使価格以上（以下）となる金額）の期待値を現時点まで割り引いて投資家が想定する現実のオプション価格を求め、得られたオプション価格が BS モデル（株価リターンに正規分布を仮定）のオプション価格と一致するように正規分布の標準偏差を求めたものがインプライド・ボラティリティ（以下 IV）である。権利行使価格が現在の株価から乖離した水準に設定されるほど、株価リターンの分布の裾にあたる確率は裾の厚い分布と正規分布とでは相対的に大きく異なる。裾が厚い分布であれば、オプション価格は正規分布の場合よりも大きく評価されるため、両者を一致させるには正規分布の標準偏差を大きくとる必要がある。よって、現実の株価リターンの分布の裾が厚い場合には、図 2 のように、オプションの権利行使価格が現在の株価から乖離するに従って IV は大きくなる。このような現象は、ボラティリティのスマイルと呼ばれる。分布の片側だけの裾が厚い場合には、図 2 の片側においてのみ IV が大きくなり、スキューと呼ばれる。

オプション満期を固定したときに、満期までの株価リターンの分布と IV との関係について説明したが、オプション市場では満期の短いものから長いものまで取引されている。よって、上記の関係はオプションの満期ごとに得られる。満期まで N 日間であるときに株価リターンを表す確率変数 X は、 N 個の互いに独立で同一な 1 日の株価リターン X_i の和 $X = \sum_{i=1}^N X_i$ として表される。株価リターン X_i が中心極限定理の働くような分布であれ

^{†1} 電気通信大学システム工学科

Department of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

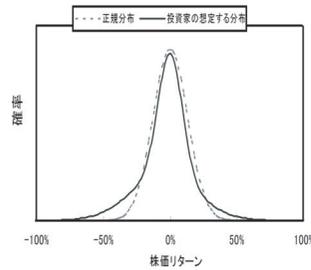


図 1 オプション満期までの株価リターンの分布
Fig. 1 Distribution of equity return in maturity.

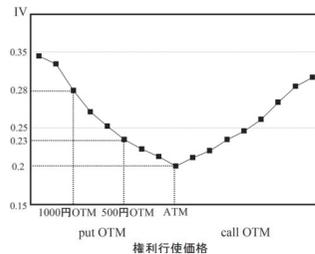


図 2 インプライドボラティリティ (IV) の模式図
Fig. 2 Illustration of implied volatility.

ば、満期までの日数 N が長くなれば、満期までの株価リターンを表す確率変数 X は正規分布に近づくため、IV のスマイルは緩やかになるはずである。

米国の株式オプション市場において満期ごとに IV の形状を調べた研究に Carr ら (2003b)⁴⁾ があり、米国の株式オプション市場では満期が長くなるに従ってスマイルが緩やかになるような現象は見られず、米国株式市場を対象としたオプション評価モデルにおいては株式リターンに中心極限定理が働かない確率分布である無限分解可能分布を採用することの有用性を指摘し、特に、有限モーメント対数安定分布を採用することを提案している。

本研究の目的は、主に、次の 2 点である。第 1 に、日本の株式オプション市場価格データを採用してオプション満期と IV のスマイルとの関係を調べ、日本の株式オプション市場における価格形成が中心極限定理の働くようなものであるかどうかを検証することである。検証結果を先回りして述べると、日本の株式オプション市場は、中心極限定理が相応に働く市場である。第 2 に、中心極限定理が相応に働くような日本の株式オプション市場におけ

る価格形成と整合的な株価過程のモデル化という観点から、裾が厚い株価分布を導くことが可能であり、かつ、中心極限定理が働くジャンプ拡散モデル (Merton (1976)⁵⁾, Amin (1993)¹⁾) を採用することの意義 (有用性) がどの程度であるかについて把握することである。そのため、株価過程としてジャンプ拡散モデルと BS モデルを採用したオプションモデル価格と現実のオプション市場価格との近さを判断基準として検証する。両モデルを対比させる理由は、ジャンプ拡散モデルに含まれるジャンプ成分は中心極限定理が働けば消散し、オプション満期が長くなるに従ってジャンプ拡散モデルが BS モデルに近づくと考えられるからである。この検証の萌芽的なアイデアは、佐々木ら (2006)⁶⁾ に見られるが、そこでは数値実験により上記の中心極限定理の作用を確認しただけであり、本研究は現実のオプション市場価格データを採用した本格的な実証分析を行うものである。従来、株式オプション市場が織り込む株価プロセス (および株価プロセスが生成する満期までの株価分布) を検証するような研究 (たとえば、Carr ら (2003a)³⁾, 野村ら (2005)⁷⁾) においては、オプションモデル価格と現実のオプション市場価格との近さをモデルの選択基準としているものの、推定誤差に関する分布までは考慮してこなかった。本研究では、現実のオプション市場価格に内在する株価リターンの分布を推定する際に生じる推定誤差の分布も利用した検証を行う。

本論文の構成は、以下のとおりである。次章では、オプション満期と IV のスマイルとの関係を調べ、BS モデル (拡散モデル) とジャンプ拡散モデルを導入する。3 章では、分析対象と分析手法について述べる。4 章では、実証分析を行う。最終章では、まとめと結語を付す。

2. オプション満期と IV のスマイルとの関係および株価モデルの導入

2.1 本研究の背景 (オプション満期と IV のスマイルとの関係)

米国の株式オプション市場においては、オプション満期が長くなっても IV のスマイルが緩やかにはならないことを先行研究では指摘している。ここでは、日本の株式オプション市場におけるオプション満期が IV のスマイルに与える影響を確認する。分析対象となるオプションは日経 225 オプションであり、満期が 1 カ月、2 カ月、3 カ月、権利行使価格がアットザマネー (以下 ATM), 500 円アウトオブザマネー (以下 OTM), 1,000 円 OTM のものとする。スマイルの形状を把握するために、ATM オプションの IV と 500 円 OTM プットオプションの IV との差 (図 2 では、 $0.23 - 0.2 = 0.03$) および ATM オプションの IV と 1,000 円 OTM プットオプションの IV との差 (図 2 では、 $0.28 - 0.2 = 0.08$) を、それぞれ指標 1, 指標 2 として採用する。指標 1, 2 を日々の IV から求めて月ごとに平均値を

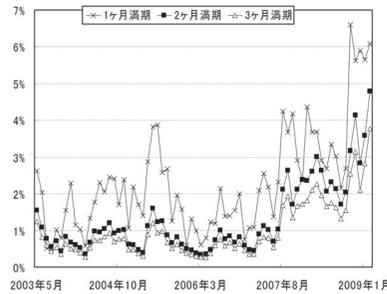


図 3 指標 1 の推移
Fig. 3 History of indicator 1.

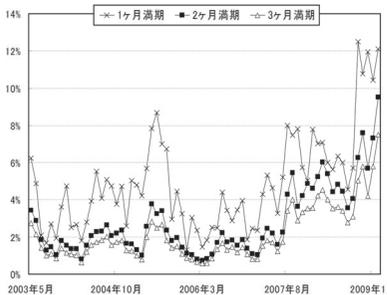


図 4 指標 2 の推移
Fig. 4 History of indicator 2.

とったものを、それぞれ、図 3、図 4 に示した。これらの図から、指標 1 と指標 2 に共通して、次の 3 点が読み取れる。第 1 に、指標 1、2 は 2007 年 8 月以降に上昇傾向を示す。第 2 に、2007 年 8 月ごろまでは、指標 1、2 とともに、満期 2 カ月の指標は満期 1 カ月の指標よりも相当小さくなるが、満期 3 カ月の指標は満期 2 カ月の指標からそれほど縮小しない。第 3 に、2007 年 8 月以降では、指標 1、2 とともに、満期 2 カ月の指標は満期 1 カ月の指標よりも小さくなり、また、満期 3 カ月の指標も満期 2 カ月の指標からある程度まで縮小する。これらの分析結果に対応して、以下の 3 点が想定される。第 1 に、2007 年 8 月以降の時期は米国発のサブプライム問題が顕在化しはじめた時期であり、株式市場が急速に下落するような値動きの激しい時期であったため、株価リターンの分布の裾が正規分布との対比で厚くなり、これに対応してスマイルの形状が険しくなったことが背景として考えられる。第 2

に、株式市場が比較的安定している時期においては、日次の株価リターンの分布の裾がそれほど厚くないと考えられ、満期が 1 カ月から 2 カ月に伸びるだけで、中心極限定理が強く働き、日次の株価リターンの分布を 2 カ月分加えた 2 カ月の株価リターンの分布はかなり正規分布に近い分布であることが分かる。第 3 に、株式市場の値動きが激しい時期では、日次の株価リターンの分布の裾が相当厚いことが想定され、満期が 1 カ月から 2 カ月に伸びる場合だけでなく、満期が 2 カ月から 3 カ月に伸びる場合でも中心極限定理が働くことが確認できることから、株価リターンの分布が正規分布に近づくためには相当期間にわたって日次の株価リターンの分布を加えなければならないことが分かる。

2.2 本研究で採用する株価モデル

前節において確認したように、日本の株式オプション市場は米国とは異なり、オプション満期が長くなるに従って、IV のスマイルが緩やかになる市場である。言い換えると、先に述べたように、株価リターンの分布において中心極限定理が成立するような市場である。このような市場における株価モデルとして、本研究ではジャンプ拡散モデル（以降、MJD モデルと呼ぶ）を採用する。その理由としては、2007 年 8 月以降のサブプライム問題が顕在化しはじめた時期に株式市場がジャンプダウンするような値動きが見られたことと、拡散項を内包しているため BS モデルをネストしており、モデルのジャンプ成分がない場合には BS モデルと同じであるから、モデルのジャンプ部分が株価分布の裾の厚さに与える影響、言い換えると、IV のスマイルに与える影響を明確に把握することができるからである。以下に、BS モデルと MJD モデルを手短かにまとめておく。

BS モデル

BS モデルは、Black ら (1973)²⁾ が提案したオプション評価モデルである。BS モデルでは、リスク中立測度の下で原資産過程が式 (1) に従うと仮定している。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (1)$$

ここで、 S_t は t 時点における株価、 r は無リスク金利、 σ は株価リターンのボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$ はリスク中立測度の下での標準ブラウン運動を表す。

BS モデルにおけるオプション評価式は以下のように表される。

$$C(K, \theta, r, T) = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (2)$$

$$P(K, \theta, r, T) = -S_0 \Phi(-d_1) + Ke^{-rT} \Phi(-d_2) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (5)$$

$C(K, \theta, r, T)$, $P(K, \theta, r, T)$ はそれぞれコールオプション価格, プットオプション価格を表す. S_0 は初期時点の株価, T は満期までの残存期間, K は権利行使価格, パラメータセット θ は $\{\sigma\}$, $\Phi(\bullet)$ は標準正規分布の累積密度関数を表す.

先に述べたとおり BS モデルは, 式 (1) から分かるように, ボラティリティ σ が定数で表現されるため, オプションのボラティリティスマイルやスキューをうまくとらえることができない.

MJD モデル

MJD モデルは, Merton (1976)⁵⁾ が提案したオプション評価モデルであり, ジャンプ成分と拡散成分を複合した原資産過程が式 (6) のように表現されるモデルである.

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda\beta)dt + \sigma d\tilde{W}_t + (Y - 1)d\tilde{N}_t \quad (6)$$

ここで, $d\tilde{N}_t$ はリスク中立測度の下でのポアソン過程 (インテンシティ λ), β はジャンプ幅率の期待値, σ は拡散項のボラティリティ, Y はジャンプ幅率を表す確率変数である. ジャンプ幅率の確率変数 Y の対数をとったものが平均 μ_J , 分散 σ_J^2 の正規分布に従うと仮定する.

MJD モデルにおけるオプション評価式は以下ようになる.

$$C(K, \theta, r, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T} (\lambda'T)^n}{n!} [S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-r_n T} \Phi(d_2)] \quad (7)$$

$$P(K, \theta, r, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'T} (\lambda'T)^n}{n!} [-S_0 \Phi(-d_1) + Ke^{-r_n T} \Phi(-d_2)] \quad (8)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{T}} [\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma_n^2/2)T] \quad (9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_n \sqrt{T} \quad (10)$$

$$r_n = r - \lambda\beta + n \ln(1 + \beta)/T \quad (11)$$

$$\lambda' = \lambda(1 + \beta) \quad (12)$$

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_J^2/T \quad (13)$$

ここで, σ_J はジャンプ幅率のボラティリティ, パラメータセット θ は $\{\lambda, \beta, \sigma, \sigma_J\}$ であり, n はジャンプ回数を表す. MJD モデルは, 拡散成分とジャンプ成分を複合した形で表され

るため, BS モデルでは表現できない分布の高次モーメントを表現することが可能になり, ボラティリティスマイルやスキューといった現象をうまく表現できる.

3. 株式オプション市場の価格形成と整合的な株価モデル

3.1 分析対象

分析対象は, 次の 4 つである.

(分析対象 1)

各満期に関するクロスセクショナル (異なる権利行使価格) なオプションの市場価格データからジャンプ拡散モデルのパラメータを推定し, 各パラメータがとる値の推移について分析する.

(分析対象 2)

拡散モデルとジャンプ拡散モデルに基づくオプションモデル価格がオプション市場価格との程度まで整合的かについて分析する.

(分析対象 3)

オプション価格の推定誤差に関する分布が, オプションの満期や権利行使価格に応じて BS モデルと MJD モデルではどのように異なるかについて分析する. 加えて, 株価リターンに関して, 中心極限定理が働くことを確認する.

(分析対象 4)

オプション価格の推定誤差に関する分布に基づいて株価モデルが適正である確率を導出し, 株価モデルとして BS モデルと MJD モデルを採用することの是非について分析する.

3.2 分析手法

前節で示した分析対象に取り組むための分析手法を以下に示す.

(分析手法 1)

モデルのパラメータ θ は, 最小二乗法によって推定する. 具体的には, オプション満期を定めたとえ, 式 (14) で与えられるような様々な権利行使価格に関するオプションの市場価格とモデル価格との二乗誤差和を最小にするように, パラメータセットを推定する.

$$\underset{\theta}{\text{Min}} \frac{1}{L+M} \left[\sum_{i=1}^L (C_{\text{market}}(K_i, T) - C(K_i, \theta, r, T))^2 + \sum_{i=1}^M (P_{\text{market}}(K_i, T) - P(K_i, \theta, r, T))^2 \right] \quad (14)$$

ここで, K_i は権利行使価格を表しており, $i=1$ を ATM オプションの権利行使価格とし, i が大きくなるに従ってアウト幅が大きくなるような OTM オプションの権利行使価格を示

す。 C_{market} , P_{market} はコールオプション、プットオプションの市場価格、 L , M は推定に用いるコールオプションとプットオプションの個数を表している。この推定を日次で行い、オプションの満期ごとに推定されたパラメータが日次で得られることになる。

(分析手法 2)

拡散モデルとジャンプ拡散モデルに基づくオプションモデル価格とオプション市場価格との整合性を(分析手法 1)に関連する回帰分析の決定係数の推移を時系列的に求めて分析する。コールオプションとプットオプションをひとまとめにオプションとしてその市場価格を O_{market} , 対応するオプションモデル価格を $O(K_i, \theta, r, T)$ と記して、式 (15) に示す切片 0, 傾き 1 とした回帰モデルを想定する。

$$O_{market}(K_i, T) = 1 \cdot O(K_i, \theta, r, T) + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, L + M) \quad (15)$$

ここで、 ε_i は、権利行使価格 K_i に関するオプションの市場価格とモデル価格との乖離を表す誤差項である。(分析手法 1) では、この回帰モデルの二乗誤差和が最小となるように株価モデルのパラメータ θ を推定した。ここでは、推定されたパラメータ値に基づくオプションモデル価格と対応するオプション市場価格から式 (16) に基づく回帰モデルの決定係数 (R^2) を日次で導出する。株価モデルとして拡散モデルとジャンプ拡散モデルを用いた場合に得られる決定係数を時系列的に比較することで、オプション市場の価格形成と株価モデルとの整合性を検討する。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{L+N} (O_{market}(K_i, T) - O(K_i, \theta, r, T))^2}{\sum_{i=1}^{L+N} (O_{market}(K_i, T) - \bar{O}_{market})^2} \quad (16)$$

ここで、 \bar{O}_{market} はオプション市場価格の平均値を表す。

(分析手法 3)

満期が 1 カ月、2 カ月、3 カ月、権利行使価格が ATM, 500 円 OTM, 1,000 円 OTM のプットオプションに焦点を当てて、オプション価格の推定誤差に関する分布を構築する。満期が 1 カ月のケースを例として採り上げ説明する。このとき、モデルのパラメータは、式 (14) における T を 1 カ月として最小化することによって推定されている。このようにして推定されたパラメータの下で、ATM, 500 円 OTM, 1,000 円 OTM のプットオプションに関するオプション価格の推定誤差は、これらの権利行使価格に対応する K_i を用いた $P_{market}(K_i, 1month) - P(K_i, \theta, r, 1month)$ で与えられる。(分析手法 1) において述べたように、パラメータ推定は日次で行っているから、日次でこの推定誤差が得られるため、これらを利用して推定誤差の分布を構築する。構築された推定誤差分布が、オプションの満期

や権利行使価格に応じてどのような特徴を持つかについて分析する。特に、オプション満期が長くなるに従って、推定誤差分布の形状がどのように変化するかに着目して、中心極限定理が働くかどうかについても検討する。また、株式市場の環境によって推定誤差分布が受ける影響についても分析するため、推定誤差を株式市場が安定していた 2007 年 8 月以前の期間から得られるものと株式市場がサブプライム問題の影響で混乱していた 2007 年 8 月以降の時期から得られるものに分けて推定誤差分布を構築する。

(注 1)

市場で取引されているオプションの満期はあらかじめ定められている。よって、オプションの残存期間(満期までの期間)は、時間の経過とともに日々短くなり、つねに厳密に 1 カ月、2 カ月、3 カ月といった期間にはならない。推定誤差におけるこのような影響を取り除くため、推定誤差を当該日におけるオプションの残存期間 (\sqrt{T}) で除することで、単位時間あたりの推定誤差を算出する。(分析手法 3) における誤差分布に基づく分析は、この単位時間あたりの推定誤差に基づく誤差分布を利用する。

(分析手法 4)

ここでは、月次で得られる推定誤差分布(20 営業日分の日次の推定誤差から(分析手法 3)で述べた手法によって構築する)から、BS モデルや MJD モデルが株価モデルとして適切であると考えられる確率を導出し、この確率に基づいて株価モデルとして BS モデルと MJD モデルを採用することの是非について分析する。ここでは、株価モデルが適切である確率を、推定誤差分布がオプション取引における買値(ビッド)と売値(アスク)の差額(ビッドアスク・スプレッド)内に収まる確率と定義する。(分析手法 1)で利用したコールオプションやプットオプションの市場価格 C_{market} , P_{market} は、オプションを市場で取引する際の買値(ビッド)と売値(アスク)のどちらかで取引が成立した価格であるから、どちらの価格で成立したかによって市場価格が異なるため、市場価格はビッドアスク・スプレッド程度の範囲でとらえておく必要がある。このため、先の推定誤差がビッドアスク・スプレッド内に収まるモデルであれば、多少推定誤差があるからといってそのモデルを不適切なものを見なすことはできない。このような理由から、モデルの誤差分布がビッドアスク・スプレッド内に収まる確率をモデルの適切性を判断するための指標として導入した。もちろん、この確率が 1 に近ければ適切なモデル、0 に近ければ不適切なモデルと判断することができる。この確率は、推定誤差分布の期待値が 0 に近くてバイアスが少なく(図 5 参照)、分散が小さい(図 6 参照)場合に、大きくなるため、統計的推定の立場からも意味のある指標と考えられる。

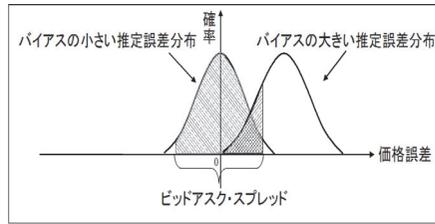


図 5 バイアスのある推定誤差分布とビッドアスク・スプレッドの様式図
Fig. 5 Estimation-error distributions with and without bias.

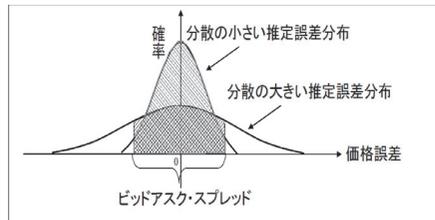


図 6 分散に違いのある推定誤差分布とビッドアスク・スプレッドの様式図
Fig. 6 Estimation-error distributions with two kinds of variance sizes.

(注 2)

過去のオプション取引におけるビッドアスク・スプレッドのデータを入手することは困難であるため、(分析手法 4)を行う際には工夫を要する。日経 225 オプションは、価格が 1 円から 19 円の範囲であれば 1 円単位 (ビッドアスク・スプレッドは 2 円と想定される) で取引され、20 円以上であれば 5 円単位 (ビッドアスク・スプレッドは 10 円と想定される) で取引される。このため、ビッドアスク・スプレッドは、通常、オプション価格の大きさに応じて異なるものと考えることができる。よって、本研究では、まず、データとして利用するオプションを市場価格が 20 円未満のもの、20 円以上のものに分けてそれぞれの平均値を求めた。次に、市場価格が 20 円未満のオプションに対しては 2 円をオプション市場価格が 20 円未満となるものの平均値で除した値、市場価格が 20 円以上のオプションに対しては 10 円をオプション市場価格が 20 円以上となるものの平均値で除した値を、それぞれビッドアスク・スプレッド係数として導出し、この係数をオプション市場価格に乗じた値を当該オプションのビッドアスク・スプレッドとして採用した。

4. 実証分析

4.1 データと分析設定

分析に用いるオプションデータは、大阪証券取引所で取引された 2003 年 5 月 1 日から 2009 年 2 月 27 日における満期が 1 カ月、2 カ月、3 カ月の日経 225 コールオプションとプットオプションである。株価データは、日経 225index の終値を用いる。

データ期間には、サブプライム問題発生以前の市場が比較的安定していた 2003 年 5 月から 2007 年 7 月までの期間 (安定期と呼ぶ) とサブプライム問題の影響が株式市場に顕在化して市場が混乱していた 2007 年 8 月から 2009 年 2 月までの期間 (混乱期と呼ぶ) の 2 つの期間が含まれる。

分析対象となるオプションは、各残存期間における、原資産価格から乖離幅 50 円未満の ATM プットオプション、乖離幅 450 円 ~ 500 円の OTM プットオプション (以下 OTM500)、乖離幅 950 円 ~ 1,000 円の OTM プットオプション (以下 OTM1000) の 3 つである。しかしながら、実際のオプション市場においては、権利行使価格が 500 円刻みでしか存在しないため、本研究では市場で観測可能なオプションの IV をスプライン補間し、オプション価格を求めた。なお、実証分析期間内の多くで、金利はほぼ 0%であったため、本研究では、無リスク金利を 0%とした。また、株価モデルのパラメータを推定する際に用いたオプションは、50 円刻みの権利行使価格に対応するオプションであり、 $L = M = 40$ 個を用いた。これらのオプション価格は、先のスプライン補間を用いて各権利行使価格に対応する IV を導出のうえ求めたものを利用した。

4.2 分析結果とその考察

(分析対象 1)

ジャンプ拡散モデルに関するパラメータは、ジャンプの頻度を表すインテンシティ λ 、ジャンプ幅率の期待値 β 、ジャンプ幅率の標準偏差 σ_J および拡散成分の大きさを表す拡散係数 σ の 4 つである。これら 4 つのパラメータの月次 (各月において日々のパラメータ推定値の平均をとったもの) の推移を、それぞれ、図 7、図 8、図 9、図 10 に示した。単位時間あたりのパラメータ値にそろえるため、ジャンプ幅率の標準偏差に関しては、 σ_J/\sqrt{T} の推移を掲載した。

まず、株価リターンを表す確率変数に中心極限定理が働く観点から分析結果を考察しよう。オプション価格は満期における株価分布に基づいてペイオフの期待値を評価したものであるから、満期 1 カ月、満期 2 カ月、満期 3 カ月のオプションであれば、それぞれ、満期ま

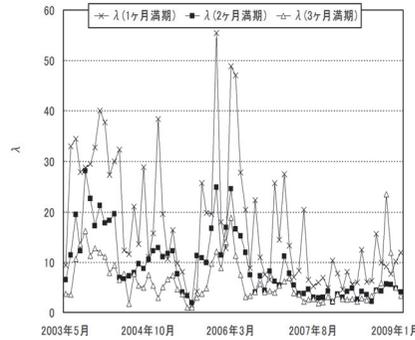


図 7 各満期における λ の値
Fig. 7 λ value in each maturity.

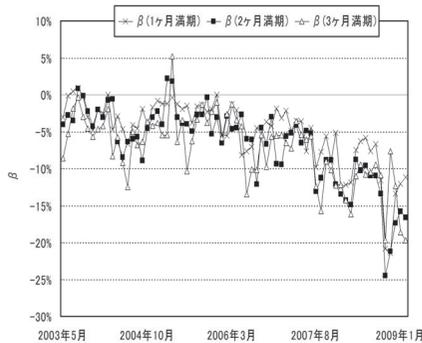


図 8 各満期における β の値
Fig. 8 β value in each maturity.

での営業日数 N を 20 営業日, 40 営業日, 60 営業日とした株価リターン $X(N)$ の分布を用いて評価される. この株価リターン $X(N)$ の分布を生成するジャンプ拡散モデルのパラメータがいずれも営業日数 N に依存しないのであれば, 単位時間あたりのジャンプ成分が満期までの期間が長くなっても減少しない. 図 7, 図 8, 図 9 のジャンプ成分に関するパラメータを見ると, ジャンプ幅率の期待値や標準偏差はオプション満期までの期間に依存しないが, ジャンプの頻度を表すインテンシティは満期までの期間が長くなると単位時間あたりで見た場合に低下する. この分析結果を考察するため, 連続モデルであるジャンプ拡散モデ

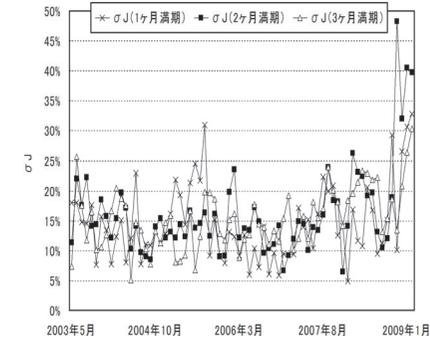


図 9 各満期における σ_J の値
Fig. 9 σ_J value in each maturity.



図 10 各満期における σ の値
Fig. 10 σ value in each maturity.

ルが生成するオプション価格に内在する株価リターンの分布を単純化して単位時間 (1 日) あたりの株価リターンの分布の離散和として考えることにする. 満期まで N 日間であるときに株価リターンを表す確率変数 $X(N)$ は, N 個の互いに独立で同一な 1 日の株価リターン X_i の和 $X(N) = \sum_{i=1}^N X_i$ として表現される. 株価リターンを表す確率変数 $X(N)$ が中心極限定理の働くような分布であれば, 満期までの日数 N が長くなれば正規分布に近づくため, ジャンプに関する単位時間あたりのパラメータが $X(N)$ の分布に与える影響は日数 N とともに小さくなる. よって, 株価リターンを表す確率変数は, 満期までの期間が長

くなるに従って単位時間あたりのジャンプの頻度が低下するような形で中心極限定理が働いて正規分布に近づき、満期が長くなるに従ってスマイルの形状が緩やかになったと考えられる。

次に、株式市場の環境に関する観点から分析結果を考察する。拡散成分であるボラティリティ σ の大きさに注目すると、図 10 から安定期においては満期までの期間によらず 10% から 20% 程度の範囲内で推移しているが、混乱期にはいずれの満期のオプションに関してもボラティリティは上昇することが分かる。しかし、その程度は満期までの期間によって多少異なり、満期の短い 1 カ月オプションのボラティリティは 40% を超える水準まで上昇するが、満期の長い 3 カ月オプションのボラティリティは最大で 30% 程度である。

ジャンプの頻度を表すインテンシティは、図 7 によると 2003 年 5 月から 2007 年 7 月までの安定期の方が、2007 年 8 月から 2009 年 2 月までの混乱期よりも概して大きく意外に感じられる。しかし、ジャンプ幅率の期待値は、図 8 から、安定期には 0% から -10% の範囲で推移しているが、混乱期には -20% 以下になることがある。また、ジャンプ幅率の標準偏差も、図 9 から、安定期よりも、混乱期の方が概して高くなることを確認できる。この分析結果から、安定期には株価にジャンプがしばしば見られるもののジャンプの幅は限定的であり株価へのインパクトは小さい。これに対して、市場の混乱期には株価がジャンプする頻度こそ少ないがジャンプが発生したときには大幅に価格が下落し、また、その下落幅もその時々で大きく異なるため、ジャンプは株価に大きなインパクトを与える。

このようなジャンプ拡散モデルのパラメータの推移から、オプション市場価格に内在する株価リターンの分布は、安定期には分散は一定の範囲内で推移し下方歪度もそれほど大きくないが、市場の混乱期には分散の急拡大とともに下方歪度がきわめて大きくなることが読み取れる。

(分析対象 2)

満期 1 カ月、満期 2 カ月、満期 3 カ月のオプションに関して、式 (16) に基づく決定係数の推移を、それぞれ、図 11、図 12、図 13 に示した。株価モデルとしてジャンプ拡散モデルを採用した場合には、いずれの残存期間のオプションに関しても、株式市場の環境にかかわらず決定係数は 1 に近く回帰モデルの説明力はきわめて高い。これは、ジャンプ拡散モデルがオプション市場の価格形成と整合的なモデルであることを示唆している。これに対して、BS モデルを採用した場合には、いずれの残存期間のオプションに関しても、市場の安定期には決定係数が 0.95 以上であるが、混乱期には決定係数は急低下する。このため、BS モデルは、市場の安定期には、オプション市場の価格形成とおおむね整合的なモデルである

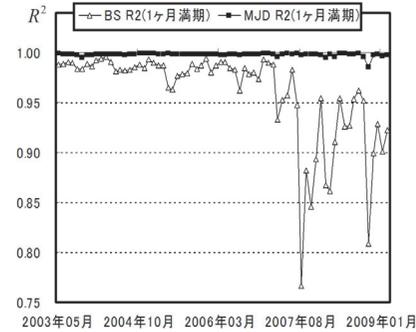


図 11 R^2 の推移 (1 カ月満期)

Fig. 11 History of R square (1-month maturity).

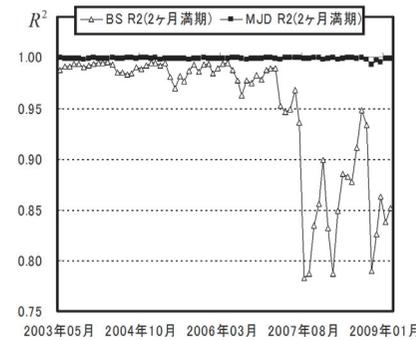


図 12 R^2 の推移 (2 カ月満期)

Fig. 12 History of R square (2-month maturity).

と見なせるものの、市場の混乱期にはオプション市場の価格形成と齟齬が生じることが分かる。

これらの分析結果を 2.1 節で確認した IV のスマイルと関連付けるなら、オプション市場において IV のスマイルがそれほど大きくないような価格形成が見られる市場の安定期には、拡散成分のみを含む BS モデルでも価格形成とおおむね整合的なモデルとなりうる。しかし、IV のスマイルが険しいような価格形成が見られる市場の混乱期には、ジャンプ成分を株価モデルに組み込んだジャンプ拡散モデルがオプション市場の価格形成を説明する株価モ

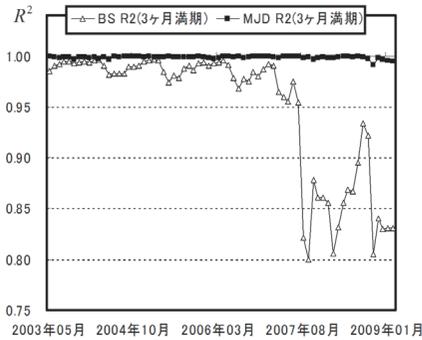


図 13 R^2 の推移 (3 カ月満期)
Fig. 13 History of R square (3-month maturity).

デルとして欠かせないことが分かる。

(分析対象 3)

BS モデルと MJD モデルに関する推定誤差分布を考察する。図 14, 図 15 には、それぞれ安定期と混乱期における各オプションの単位時間あたりの推定誤差分布を示した。

まず、図 14 の安定期について、推定誤差分布を、バイアス (期待値の 0 からの乖離度) と分散の大きさの観点から考察しよう。図 14 から、BS モデルでは推定誤差分布のバイアスも分散もともに大きいものに対して、MJD モデルではいずれのオプションに関してもバイアスと分散はともに小さいことが分かる。BS モデルに焦点を当てて、バイアスと分散について詳細に検討する。

BS モデルの推定誤差のバイアスを見ると、ATM オプションでは、推定誤差分布は負の小さなバイアスを持つものに対して、OTM では正の大きなバイアスを持つことが読み取れる。分析手法 3 で述べたように、ここでの推定誤差は、オプション市場価格からオプションモデル価格を引いたものである。よって、BS モデルを用いたオプションモデル価格をクロスセクショナルなオプション市場価格から推定すると、ATM オプションのモデル価格は市場価格よりも大きく、OTM オプションのモデル価格は市場価格よりも小さくなるバイアスが生じることが分かる。これは、1 章において述べたように、オプション市場が織り込むオプション満期までの株価リターンの分布の裾が厚い場合、OTM オプションにおいて市場価格に BS モデル価格 (正規分布を仮定) を近づけるためには、正規分布の標準偏差を大きくとる必要がある。しかし、その標準偏差を大きくしすぎると ATM オプションのモデル価格を

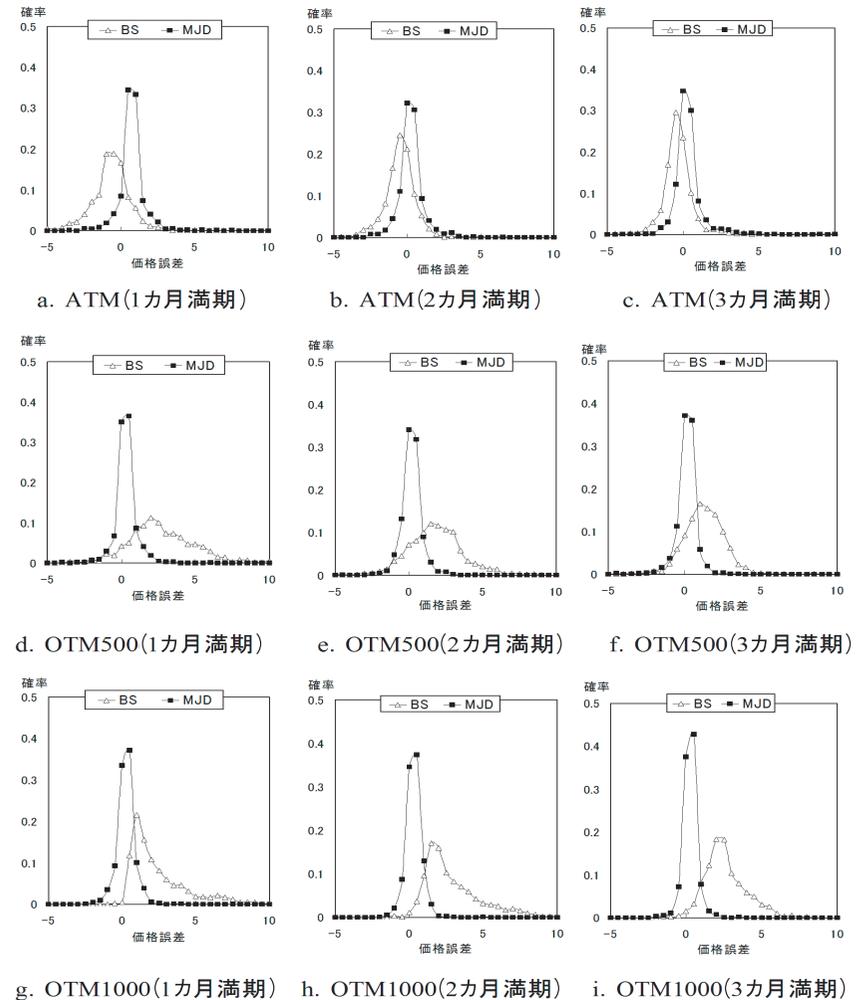


図 14 安定期における MJD モデルと BS モデルの推定誤差分布
Fig. 14 Estimation-error distributions of BS model and MJD model in a stable period.

41 拡散モデルとジャンプ拡散モデルを用いた日経 225 オプション市場の価格形成に関する検証

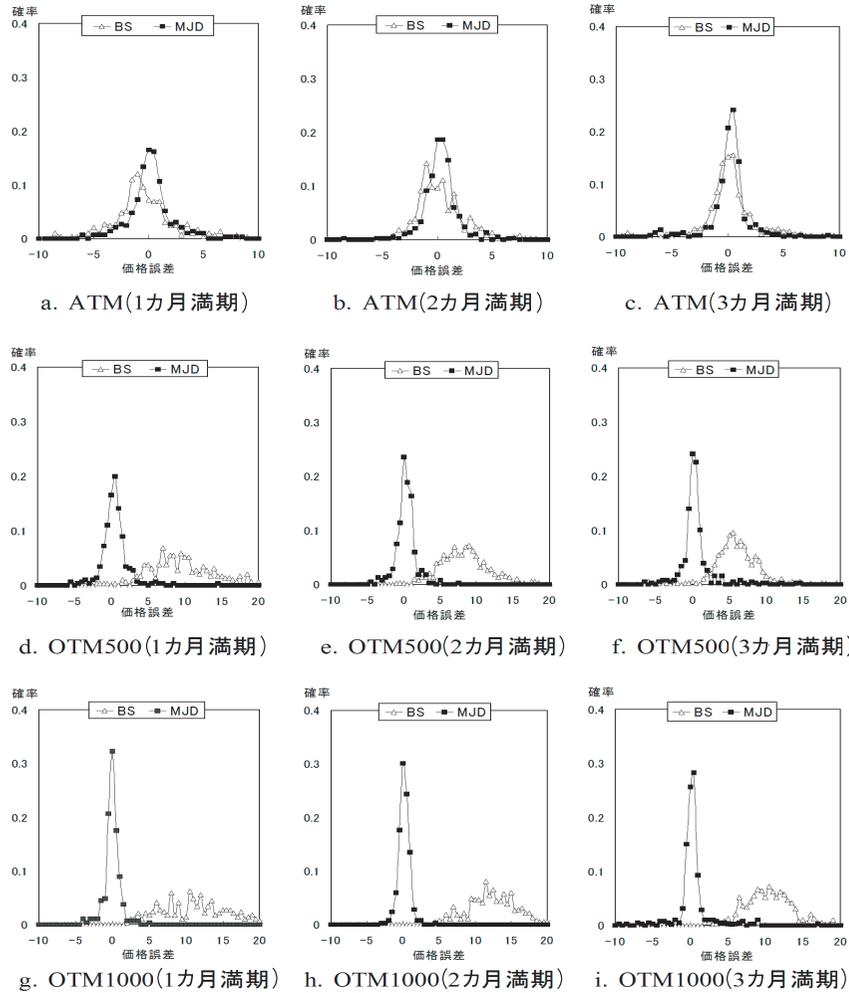


図 15 混乱期における MJD モデルと BS モデルの推定誤差分布

Fig. 15 Estimation-error distributions of BS model and MJD model in a turbulent period.

市場価格よりも大きく推定することになる．最小二乗法（式 (14) の最小化）を用いたパラメータ推定において，このようなトレードオフが働き，バイアスが生じたものと考えられる．

次に，BS モデルの推定誤差分布の分散を見ると，オプション満期が長くなるに従って分散が小さくなっていくこと，また，その傾向は ATM オプションの方が強いことが分かる．これは，満期が短い場合には株式市場の環境によって，オプション市場が織り込む満期までの株価リターンの分布として正規分布に比較的近いものから極端に離れるものまで様々に現れるが，満期が長くなるに従って中心極限定理が働き，極端に正規分布から乖離するような分布がオプション市場価格に織り込まれる頻度は少なくなることが考えられる．

混乱期における推定誤差分布に関しても，図 15 を見ると，安定期において考察したことがおおむね平行にあてはまる．市場の混乱期には，オプション市場が織り込む満期までの株価リターンの分布は分散の大きなものであり，オプション市場価格は安定期における価格よりも概して大きくなるため，総じて推定誤差も大きなものとなる（図 15 の OTM オプションの横軸のスケールを参照）．また，市場の混乱期には特に満期が短い場合に，オプション市場が織り込む株価リターンの分布は正規分布から極端に離れるため，MJD モデルを採用した場合でも推定誤差分布の分散はそれほど小さくはない．しかし，満期が長くなると中心極限定理が働いて株価リターンの分布の裾の厚さが緩和されるため，推定誤差分布の分散は縮小する．

上記の考察から，分析対象 1, 2 に基づいて予想されるオプション市場の価格形成と整合的な株価モデルに関するいくつかの結果が定量的に確認された．株価リターンの分布の裾の形状が OTM オプションに比べて相対的に価格に大きな影響を与えない ATM オプション，なかでも株価リターンの分布に中心極限定理が働くような満期が長いオプションでは，BS モデルを用いて株価過程を表現しても大きな不具合は生じない．しかし，株価リターン分布の裾の形状がオプション評価に大きな影響を与える OTM オプション，なかでも株価リターンの分布に中心極限定理が働く時間の少ない満期が短いオプションでは，BS モデルを採用したオプション評価モデルはオプション市場価格から大きく乖離することになる．これに対して，MJD モデルでは，株式市場の混乱期において多少推定誤差分布の分散が大きくなるものの，いずれのオプションに関してもバイアスは少なくオプション評価モデルとして許容されるものと考えられる．

（分析対象 4）

BS モデルと MJD モデルの推定誤差分布がビッドアスク・スプレッドに収まる確率（適正確率と呼ぶ）を時系列的に図 16 に示した．

42 拡散モデルとジャンプ拡散モデルを用いた日経 225 オプション市場の価格形成に関する検証

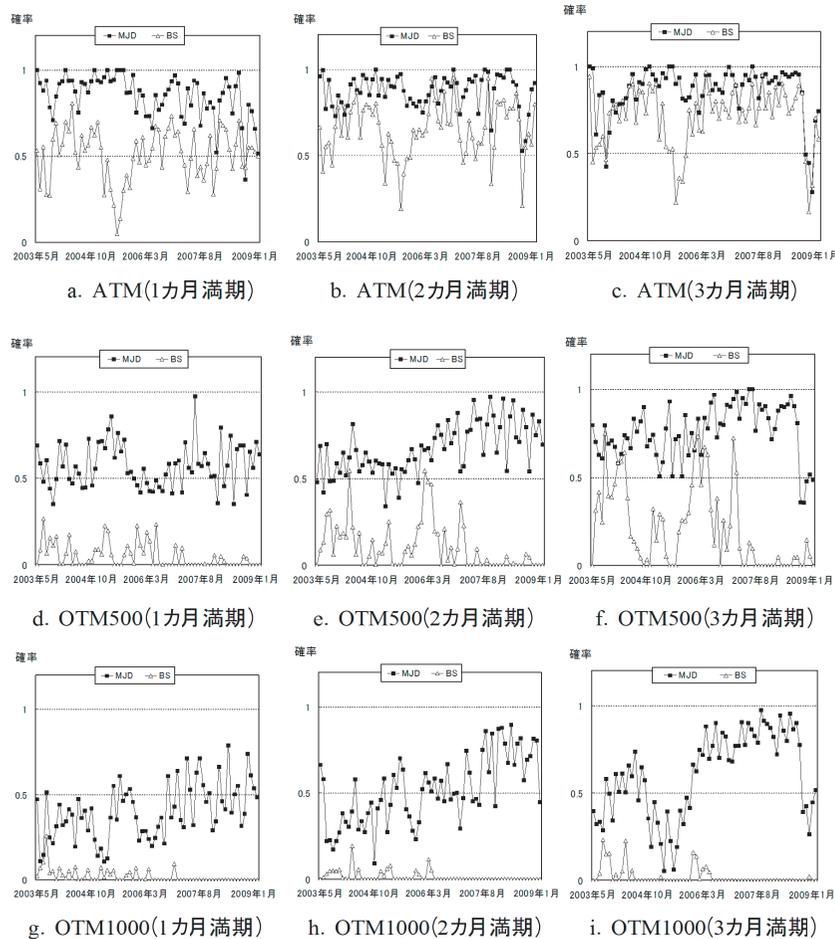


図 16 BS モデルと MJD モデルの推定誤差分布がビッドアスク・スプレッドに収まる確率
 Fig. 16 The probability of estimation-error distributions of BS model and MJD model fall on bid-offer spreads.

いずれのオプションに関しても、MJD モデルの方が BS モデルよりも適正確率は高く、オプション評価モデルとして相応しいモデルであることが分かる。ここでも確認しておきたいのは、ATM オプションであれば、MJD モデルの適正確率と BS モデルの適正確率にそれほど大きな差がないこと、また、ATM や OTM500 オプションであれば、満期が長くなるに従って BS モデルの適正確率が上昇することである。これらの結果は、(分析対象 3) の推定誤差分布において考察したことと整合的である。OTM1000 オプションになると、BS モデルの適正確率はきわめて低く、株式市場の混乱期にはいずれの満期のオプションに関しても 0% である。このことから、権利行使価格が現在の株価から 1,000 円以上離れるような OTM オプションでは、株価リターンの分布に正規分布を仮定した BS モデルを利用するわけにはいかないことが分かる。また、OTM1000 オプションでは、満期が 1 カ月の場合、MJD モデルを採用した場合でも適正確率が 50% を下回る時期が長く、株価リターンにジャンプ成分を組み込むだけのモデル化では不十分であることを示唆する結果となった。興味深いのは、OTM1000 オプションに関して見ると、MJD モデルの適正確率は株式市場の混乱期の方が安定期よりも高いことである。これは、先に述べたように混乱期の方が安定期よりもオプション価格が大きくなるため、ビッドアスク・スプレッドの幅も大きくなることによる。(分析対象 4) の結果は、ビッドアスク・スプレッドとして、どのようなものを想定するか大きく依存するため、今後、オプションの取引データの蓄積を待って、より現実的で精緻な実証分析が必要な分野と考えられる。

5. まとめと結語

本研究では、まず、日経 225 オプション市場の価格形成、具体的にはオプションのスマイルやスキューの傾きが、オプション満期の長さや株式市場の環境によってどのような影響を受けるかについて確認した。そのうえで、価格形成と整合的な株価モデルの候補として裾が厚い株価分布を導くことが可能であり、かつ、中心極限定理が働くようなジャンプ拡散モデルを採り上げ BS モデルと対比させて価格形成と株価モデルとの整合性を検証した。

ジャンプ拡散モデルのパラメータ値の推移を確認したところ、市場の混乱期にはジャンプ成分、特にジャンプの大きさに関するパラメータがオプション市場の価格形成に大きな役割を果たすことが分かった。ジャンプ拡散モデルのパラメータ推定に関する回帰モデルの決定係数の推移からも、市場の混乱期においては拡散成分に加えてジャンプ成分のある株価モデルがオプション市場の価格形成と整合的となることが確認された。

オプションの市場価格とモデル価格との推定誤差に関する分布をオプションの種類ごとに

調べたところ、満期が短く権利行使価格が現在の株価から大きく離れた OTM オプションにおいて、BS モデルは MJD モデルに比べて、推定誤差分布のバイアスや分散が特に大きくなることを数量的に把握することができた。推定誤差分布の分散は、株価リターンに中心極限定理が働くことを受けて、オプション満期が長くなるに従って縮小することも確認された。推定誤差分布に基づくモデルの適正確率を導出したところ、BS モデルでは ATM で満期の長いオプションを除いては、オプション市場の価格形成と整合的な株価モデルとはいい難いのに対し、MJD モデルはおしなべて、日経 225 オプション市場における価格形成と整合的な株価モデルであることが分かった。

参 考 文 献

- 1) Amin, K.I.: Jump diffusion option valuation in discrete time, *Journal of Finance*, Vol.48, pp.1833–1863 (1993).
- 2) Black, F. and Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637–654 (1973).
- 3) Carr, P. and Wu, L.: What type of process underlies options? A simple robust test, *Journal of Finance*, Vol.58, pp.2581–2610 (2003a).
- 4) Carr, P. and Wu, L.: Finite moment log stable process and option pricing, *Journal of Finance*, Vol.58, pp.753–777 (2003b).
- 5) Merton, R.C.: Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, Vol.3, pp.125–144 (1976).
- 6) 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: Edgeworth 展開に基づくオプション評価—原資産収益率が Merton の Jump-Diffusion モデルに従う場合, *応用統計学*, Vol.35, No.2, pp.113–128 (2006).
- 7) 野村哲史, 宮崎浩一: 日経 225 オプションの織り込む株価過程の連続成分とジャンプ成分, *現代ファイナンス*, Vol.18, pp.47–67 (2005).
- 8) 宮崎浩一: オプション市場分析への招待, 朝倉書店 (2009).

(平成 21 年 11 月 16 日受付)

(平成 21 年 12 月 26 日再受付)

(平成 22 年 1 月 6 日採録)



小林 寛司

昭和 62 年生。平成 18 年電気通信大学システム工学科入学，現在に至る。



宮崎 浩一

昭和 42 年生。平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了。博士（経営学）。電気通信大学システム工学科専任講師等を経て、平成 19 年度から電気通信大学システム工学科准教授，現在に至る。日本オペレーションズ・リサーチ学会，JAFEE，日本応用数理学会，応用統計学会等各会員。



田中健太郎

昭和 61 年生。平成 21 年電気通信大学システム工学科卒業。同年電気通信大学大学院システム工学専攻修士課程入学，現在に至る。