講 座

数理論理学 (4)†

小 野 寛 晰††

4. 形式化への道

これまではもっぱら数学を形式的にとり扱う際に生ずる問題についてのみ述べてきた．そこでこの章では数理論理学が数学以外の分野で果している役割について述べることにしよう．例として言語学における数理論理学的な方法および計算機科学，特にプログラム理論での形式化の問題にふれることにする．

(I) 言語と論理

4.1 自然言語における論理

数学の枠組は論理と集合からなると前に述べた．論理が数学の枠組の一端を担っているということは論理が我々の思考において重要な位置を占めていることの一つの端的な表われといってよい．たしかに Wittgenstein のいうように我々は「論理的でないような世界についてはそれがどのようなものであるかを語ることさえできない」のだろう．これ程にまで我々は日常の生活において意識的または無意識のうちに深く論理とかかわっているのだ．ところで我々の思考にしろその思考の伝達としての我々の日常会話にしろそれは殆んどの場合言葉を媒介しておこなわれているのだから，言葉の働きのうちにも論理性がさまざまな形で投映されているに違いない．したがって自然言語が持つ論理的構造は言語学的な意味での構文論や意味論と密接な関係を持っているのだろう．それではいったい数理論理学的な方法はどこまで自然言語の論理的構造の解明，ひいては言語の構文論や意味論の研究に役立ち得るのだろうか．この問いに対して我々は今のところはっきりとした答を出すことはできない．ここでは，これまでにこの方向からおこなわれたいくつかの試みについて述べていくことにする．

いま φ を自然言語で書かれた一つの文であるとしよう．日常会話で，文 φ の正しさをその強弱をこめて表現する場合つぎのようないく通りかの表わし方が考えられる．

(1) φ である．

(2) φ は必然である (It is necessary that φ).

(3) φ は可能である (It is possible that φ).

たとえば φ を $\psi \vee \neg\psi$ のように表わされる文であるとすれば，たしかに φ は必然であるといえよう．一方，φ を「日本の首都は東京である」という文とすると φ は現時点では正しいが「φ は必然である」という文は正しいとはいえない．このように文の必然性や可能性といった文の「様相」はこれまで述べてきた論理ではとりあつかうことができないだろう．つまり自然言語の論理的構造を分析する際の第一歩として文の様相について議論をしておく必要がありそうだ．実際，これは古くからの哲学上の問題の一つでもあり，古典的な論理学の基礎を築いた Aristotle は「様相論理学」の出発点をもあたえているのである．様相論理は中世の哲学者によってもさまざまな角度からの議論がおこなわれたのだが1930年代になってようやく Lewis と Langford により数学的に整理されたのである．

習慣にしたがいこれからは「φ は必然である」という文を $\Box\varphi$，「φ は可能である」という文を $\Diamond\varphi$ と表わすことにしよう．普通，$\Diamond\varphi$ と $\neg\Box\neg\varphi$ とは同じ内容を持つとみなされている．ところで $\Box$ という記号はあたえられた文 φ に対し $\Box\varphi$ という文を対応させているのだから一つの論理演算と見ることができる．しかしながらこれまでとりあつかってきた $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$, $\forall$, $\exists$ のような論理演算と $\Box$ とはつぎの点で大きく異なる．それは，$\Box\varphi$ の正しさはその部分論理式である φ の正しさにのみ依存しているのではないという点である．つまり $\Box\varphi$ の正しさを定義するには我々は φ の正しさ以外のなんらかの因子を必要とすることになる．

その問題に入る前にもう少し演算子 $\Box$ の持つ論理的

† Mathematical Logic (IV) by Hiroakira ONO (Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University).

†† 広島大学総合科学部総合科学科

性質を眺めてみよう．$\Box\theta$ を「θ は必然である」と解釈するとつぎの二つの命題はつねに正しいと考えられよう．

（4） $\Box\varphi\supset\varphi$.

（5） $\Box(\varphi\supset\psi)\supset(\Box\varphi\supset\Box\psi)$.

φ がつねに正しいならば φ は必然的になりたつだろうから，

（6） φ がつねに正しいならば $\Box\varphi$ もつねに正しいということも仮定してよいだろう．ここで「つねに正しい」という言葉を「証明可能」という言葉でおきかえることにより，つぎのような様相論理の形式体系が得られる．いま命題論理の言語を任意にとり，さらに論理演算として□をつけ加えて得られる言語を $\boldsymbol{L}_0$ とする．また論理式の定義につぎの項をつけ加える．

（7） φ が論理式ならば $\Box\varphi$ も論理式である．

形式体系 **LK** を（言語 $\boldsymbol{L}_0$ 上の）命題論理に制限した体系を $\mathbf{LK_0}$ とし，$\mathbf{LK_0}$ につぎの二つの □ に関する推論規則をつけ加えて得られる体系を様相論理 **T** という．

（□左） （□右）

$$\frac{\varphi, \Gamma\longrightarrow\Theta}{\Box\varphi, \Gamma\longrightarrow\Theta} \qquad \frac{\Gamma\longrightarrow\varphi}{\Box\Gamma\longrightarrow\Box\varphi}$$

ただし（□右）において論理式の列 Γ を $\varphi_1, \cdots, \varphi_m (m\geqq 0)$ とするとき $\Box\Gamma$ は $\Box\varphi_1, \cdots, \Box\varphi_m$ を表わすものとする．このように **T** を定義すると，**T** はちょうど上で述べた（4），（5），（6）に対応する体系になっていることがわかる．実際，（4），（5）は **T** で証明可能であり，さらに（□右）において Γ を空な列とすれば（6）に対応する推論規則

（8） φ が証明可能ならば $\Box\varphi$ も証明可能

が得られる．様相論理としては □ のとらえ方により **T** のほかにいろいろな論理が提案されている．たとえば beginning sequent として

（9） $\Box\varphi\longrightarrow\Box\Box\varphi$

を **T** につけ加えて得られる体系 **S4**，beginning sequent として

(10) $\neg\varphi\longrightarrow\Box\neg\Box\varphi$

を **T** につけ加えて得られる体系 **B**，**T** に（9）および(10)をつけ加えて得られる体系 **S5** をあげることができる．

これまでは「……は必然である」および「……は可能である」という様相に関する論理演算のみについて述べてきた．ところで Hintikka は，a をある人の名前とするとき「a は……ということを知っている（a knows that …)」とか「a は…ということを信じている（a believes that …)」といった認識的概念を表わす表現を論理演算とみなし，これらの演算の論理的性質を明らかにしようとした[2)]．そして，「ということを知っている」という言葉はその論理的性質において「は必然である」という言葉と多くの共通点を持っていることを示した．具体的にいうと $\Box\varphi$ を「a は φ ということを知っている」と解釈すれば演算□は少なくとも **T** の仮定をすべてみたしていると考えられるのである．また Prior 等は現在時制，過去時制，未来時制というような文の時制を，あたえられた文に対する一つの論理演算とみなし，それらの演算がやはり多くの点で様相概念と共通な論理的性質を持つことを示している[3)]（たとえば φ を「現在，φ である」，$\Box\varphi$ を「いつも φ であった (it has always been the case that φ)」というように解釈するのである．明らかにこの場合には（4）はなりたたない）．以上のように，文の様相概念，認識的概念，時制概念などを示す表現をそれぞれ一つの論理演算と見なすならば，それらの論理的性質には共通点が多い．そこでこれらの論理演算を総称して内包的論理演算ということにする．また内包的論理演算をあつかう論理学は内包的論理学 (intensional logic) とよばれる．これら内包的論理演算の特徴は前に述べたように，演算をほどこして得られた論理式（すなわち $\Box\varphi$ の形」の正しさはもとの論理式（すなわち φ）の正しさの単なる関数とはみなせない，いいかえれば φ の「外延」にではなく φ の「内包」によって $\Box\varphi$ の正しさが定まる，ということである．

4.2 Kripke による解釈

それでは内包的論理演算に対してはどのように解釈をあたえたらよいのだろうか．いいかえれば我々は「内包」という概念をどのように理解したらよいのだろうか．これに対する一つの解答をあたえたのが Kripke である．彼は Leibniz や Wittgenstein, Carnap 等が「可能な世界 (possible world)」あるいは「可能な事態 (possible state of affairs)」とよんでいた概念に明確な数学的表現をあたえることにより内包的論理演算に対する一つの解釈を得たのである．以下では様相命題論理に対する Kripke による解釈について述べよう．

言語 $\boldsymbol{L}_0$ を持つ様相命題論理に対する構造 $\mathfrak{M}=\langle W, R, F\rangle$ はつぎのようなものからなる．

（1） 空でない集合 W．W の各要素は「可能な世界」とよばれる．

（2） W の上の二項関係 R.

（3） 各命題変数 p および W の各要素 w に対し，$\mathbf{t}$(真) または $\mathbf{f}$(偽) を値としてあたえる関数 F. すなわち $F(p, w) \in \{\mathrm{t}, \mathrm{f}\}$.

あたえられた構造 $\mathfrak{M}$, 世界 w および論理式 φ に対し，関係 $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ をつぎに定義する．$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ は「構造 $\mathfrak{M}$ の世界 w で φ は正しい」ことを意味する．

1) φ が命題変数のとき，
$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi \Longleftrightarrow F(\varphi, w) = \mathbf{t}$,

2) $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ かつ $(\mathfrak{M}, w) \models \psi$,

3) $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ または $(\mathfrak{M}, w) \models \psi$,

4) $(\mathfrak{M}, w) \models \neg\varphi \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ ではない,

5) $(\mathfrak{M}, w) \models \varphi \supset \psi \Longleftrightarrow (\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ でないか または $(\mathfrak{M}, w) \models \psi$,

6) $(\mathfrak{M}, w) \models \Box\varphi \Longleftrightarrow wRv$ となるすべての v に対し $(\mathfrak{M}, v) \models \varphi$.

論理式 φ に対し，$(\mathfrak{M}, w) \models \varphi$ がすべての $w \in W$ に対してなりたっているとき，φ は構造 $\mathfrak{M}$ で正しいといわれる．1)から5)までの定義からわかるように，もしあたえられた論理式 φ が様相演算 $\Box$ を一つも含んでいなければ φ は普通の命題論理の場合と全く同様に解釈されるのである．

Kripke の解釈は自然言語で書かれた文に対する我我の理解をつぎのように抽象化したものと考えることができる．文 φ があたえられたとき φ の正しさはその文が書かれている (または話されている) 文脈や場面，場所，時間などに依存しているだろう．これらの文脈，場面，場所，時間などを一つ固定すると，そこでなりたつことおよびなりたたないことのすべてが決定されるだろう．そこでそれらをすべてひっくるめたものを (一つの)「可能な世界」とよぶことにする．ところで様相概念を含んでいる文の正しさは一つの可能な世界だけでは確定しない．というのは「φ が必然である」ということがなりたつには φ がどんな「場合」にもなりたつことが必要だろうから．今，可能な世界 w と v の間に関係 R がなりたつということ，すなわち wRv がなりたつということを，世界 w から眺めたとき v は実際に可能な世界の一つであることと理解することにしよう．そうして6)を眺めると，それは世界 w で「φ が必然である」ことがなりたつためには，w からみて可能な任意の世界で φ がなりたたなければならないということを主張しているのである．

さてここでもう一度数学的な議論にもどることにしよう．構造 $\mathfrak{M} = \langle W, R, F \rangle$ において R が反射的ならば $\mathbf{T}$-構造，反射的かつ推移的ならば $\mathbf{S4}$-構造，反射的かつ対称的ならば $\mathbf{B}$-構造，さらに同値関係であるとき $\mathbf{S5}$-構造ということにしよう．するとつぎの完全性定理が得られる．

定理 4.1 (Kripke) $\mathbf{L}$ を $\mathbf{T}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S5}$ のいずれかとする．$\boldsymbol{L}_0$ の任意の論理式 φ に対し，φ が形式体系 $\boldsymbol{L}$ で証明可能となるための必要十分条件は φ が任意の $\mathbf{L}$-構造で正しいことである．

定理 4.1 は，関係 R についての条件を変えることによりさまざまな様相概念の解釈があたえられるという点で興味深い．**定理 4.1** を他の内包的論理に対して拡張することも可能である．

ここで内包的論理と密接な関係をもつ，言語学および哲学上の一つの話題として Montague 文法についてふれておこう．Montague は内包的論理に対する Kripke 流の意味づけを拡張して自然言語の意味論を展開しようとした[4]．彼の理論はつぎのように展開される．まず英語の適格文を生成する規則をあたえ，つぎにこれらの適格文を内包的論理 (限定記号を含むようなある種の高階の内包的論理) の論理式に翻訳する．そして最後にこの論理式を内包的論理の中で解釈するのである．英語の適格文を生成する規則をあたえるのは構文論であり，適格文の翻訳を内包的論理の中で解釈するのが意味論であるとみなされる．Montague はこのような形で Chomsky の言語学に欠けていた構文論と意味論との結びつきを明確にしようとした．Montague の方法についてこれ以上述べることはできないが，彼の目指した方向は言語と論理との関係をもう一度新たに見直すきっかけをあたえてくれるように思われる．

(II) プログラム理論における形式化

4.3 形式化の意味

計算機科学の中でもっとも数理論理学との結びつきが強いのはプログラム理論だろう．そこでプログラム理論における形式化の問題をとりあげることにする．形式化の問題の具体的な内容としては，プログラムに表われる諸概念に対し数学的ないし形式的な表現をあたえることと，プログラムの正当性などの検証をおこなうための形式体系を作りだすことがあげられる．プログラム理論自体の話題としては並列処理や抽象的なデータ・タイプをあつかう形式体系の問題などがあげられるが，ここではあくまでも数理論理学としての立

場から見たプログラム理論の形式化の問題に話を限ることにする．以下ではプログラム理論についてのいくつかの基礎的な知識を仮定する[5),6)]．

まず始めにプログラム理論で形式的なとりあつかいをおこなう意味をふりかえってみるのも無駄ではあるまい．いうまでもなくプログラム理論で形式化をおこなう最大の理由はプログラム理論における議論の枠組を明確にするためであろう．たとえばプログラムの検証をおこなうとする際には，検証のためにどのような推論規則が必要（で十分）かという問題や，検証に用いられる命題を記述するための言語 (assertion language) とプログラミング言語との関係を明らかにするという問題がおこる．さらにこのようにして得られた推論規則の体系に裏づけをあたえるために，この体系に対する解釈をあたえる必要があろう．そしてこのような議論を厳密におこなおうとするには使われる言語を制限し体系自体も完全に形式化しておくことが必要になる．そして純粋に理論的な立場から見るならば，一般にこのようにしておこなわれる形式化は必ずしも有限的なものでなくてもさしつかえないだろう．それに対し形式体系を用いて実際にプログラムの検証を計算機におこなわせようとする場合には，そこで使われている言語および体系は有限的な性質を持つものでなければならないということになる．

しかし実用的な立場からプログラムの検証ということを考えるならば，形式化することは必ずしも本質的ではない．いったん検証のための推論規則の妥当性が厳密に形式的な立場で保証されていさえすれば，あたえられたプログラムの，問題のありそうな部分についてだけそれらの推論規則を適用しその正当性を確認するといった方法が現実的であろう．またそのような場合には assertion language も（その記述がしっかりしたものである限りは）ユーザにとってのみ意味を持つものでさしつかえない．つまり，このような場面ではここで述べたようないわば準形式的なとり扱いで十分なのである．ちょうど演算子法を用いたときに計算が機械的におこなえるのと同じような意味で，機械的に適用できるような推論規則（とその適用条件の明細）を準備しておきさえすればよいのではなかろうか．

4.4 プログラムの諸概念の表現可能性

この節ではプログラムに関するいろいろな概念を形式的に表現する問題をとりあげてみる．同時に，**1**章で述べたコンパクト性定理の一つの応用例を示す．表現可能性を論ずる場合にはまずあたえられた概念を記述するためにどのような言語を用いてよいかということを確定しておく必要がある．さもないと表現力の強い言語を持ってくればこの表現可能性の問題は自明なものになってしまうからである．この問題に対する一つのアプローチのしかたとしては，プログラムに現われる関数記号，述語記号，定数記号のいずれも定まった解釈を持たないもの（つまり，プログラム図式）とみなしそれらの記号のみを用いてあたえられたプログラムの概念の表現可能性を議論するという方法が考えられる．このように問題を設定した場合には，プログラムの諸概念の記述には可算無限個の論理式に対する$\wedge$や$\vee$を許すような論理（無限論理）の言語が適当であることが確かめられる[7)] この問題を流れ図プログラムの停止性の場合について述べることにしよう．

$\boldsymbol{S}$ を言語 $\boldsymbol{L}$ の記号を用いて作られる m 入力の流れ図プログラム図式 (flow chart schema, 5) 参照)，$\mathfrak{M}$ を $\boldsymbol{L}$ の任意の構造，M を $\mathfrak{M}$ の対象領域とする．そのとき $\boldsymbol{S}$ に現われる各記号を $\mathfrak{M}$ で解釈すると，$\boldsymbol{S}$ は M 上で定義された流れ図プログラムとみなすことができる．そこでこの流れ図プログラムを $\langle \boldsymbol{S}, \mathfrak{M}\rangle$ と表わすことにする（以下では，流れ図プログラム図式および流れ図プログラムを単にプログラム図式およびプログラムとよぶことにする）．さて $x_1, \cdots, x_m$ のみを自由変数に持つような $\boldsymbol{L}$ の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ がプログラム図式 $\boldsymbol{S}$ の**入力ごとの停止性を表現する**とは，任意の $\boldsymbol{L}$ の構造 $\mathfrak{M}$ および任意の $a_1, \cdots, a_m \in M$ に対し

(1) $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m) \Longleftrightarrow$ 入力 $(a_1, \cdots, a_m)$ に対しプログラム $\langle \boldsymbol{S}, \mathfrak{M}\rangle$ は停止する，

がなりたつこととする．

定理 4.2 1) 任意の m 入力のプログラム図式 $\boldsymbol{S}$ に対し，$\boldsymbol{S}$ の入力ごとの停止性を表現するような無限論理の（または，2階の）論理式を $\boldsymbol{S}$ から具体的に構成する手続きが存在する（7）および5））．ただし2階の論理式の場合には（1）の $\mathfrak{M}$ としては主構造 (**2.4** 節参照) をとらなければならない．

2) プログラム図式$\boldsymbol{S}$の入力ごとの停止性を表現するような1階の論理式が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{S}$ がある finite tree schema と同値になることである[8)]．ただし finite tree schema とはつぎの条件をみたすようなプログラム図式である[5)]．

a．開始命令 (start statement) はただ一つである．

b．それぞれの命令に対し，開始命令からその命令に至るただ一つの道が存在する．

c．終端の命令は停止命令 (halt statement) かループ命令 (loop statement) のいずれかである．

証明 1)の２階の論理式の場合は，inductive assertion のいわば集合論的な存在を用いて示される．ここでは1)の無限論理の論理式の場合および2)の証明のアウトラインを述べることにする．プログラム図式を数学的にとり扱いやすい形にするために，文献９）で導入された effective definitional scheme (EDS と略す）を用いる．$\boldsymbol{L}$ の n 変数の述語記号 R および $\boldsymbol{L}$ の項$t_1, \cdots, t_n$ に対し，$R(t_1, \cdots, t_n)$ または$\neg R(t_1, \cdots, t_n)$ の形の論理式を基本論理式という．基本論理式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ を有限個$\wedge$で結んで得られる論理式 $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$ $(k>0)$ においてどの σ_i も $\neg\sigma_j$ の形でないとき，この論理式を条件式とよぶことにする．以下では $x_1, \cdots, x_m$ 以外の変数を含まないような条件式のみをとり扱う．また変数 $x_1, \cdots, x_m$ を略して $\boldsymbol{x}$ のように表わすことにする．二つの条件式 $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$ と $\tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_h$ が両立しないとは，ある σ_i と τ_j が存在して一方が他方の否定の形になっていることとする．いま φ を条件式，t を $\boldsymbol{x}$ 以外の変数を含まないような項としたとき $(\varphi \to t)$ の形の表現を定義式ということにする．定義式の空でない集合 $\boldsymbol{D}$ がつぎの二つの条件をみたすとき，$\boldsymbol{D}$ は EDS であるといわれる．

1) $\boldsymbol{D}$ の中の相異なる定義式 $(\varphi \to t)$ および $(\psi \to s)$ に対し，φ と ψ は両立しない．

2) $\boldsymbol{D}$ の要素を数え上げるようなアルゴリズムが存在する（すなわち，$\boldsymbol{D}$ は recursively enumerable).

$\boldsymbol{D}$ を任意の EDS, $\mathfrak{M}$ を任意の $\boldsymbol{L}$ の構造とするとき，M^m から M への部分関数 $V_{\boldsymbol{D},\mathfrak{M}}$ をつぎのように定める．

（2） 任意の $\boldsymbol{a}=(a_1, \cdots, a_m) \in M^m$ に対し，$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{\boldsymbol{a}})$ がなりたつような定義式 $(\varphi(\boldsymbol{x}) \to t(\boldsymbol{x}))$ が $\boldsymbol{D}$ の中に存在するとき $V_{\boldsymbol{D},\mathfrak{M}}(\boldsymbol{a})=t(\bar{\boldsymbol{a}})^{\mathfrak{M}}$ とし，そうでないときには $V_{\boldsymbol{D},\mathfrak{M}}(\boldsymbol{a})$ の値は定義されない．

補題 4.3 1) 任意の m 入力のプログラム図式 $\boldsymbol{S}$ に対し，つぎの性質(*)をみたすような EDS $\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{S}$ から構成的に作りだす手続きが存在する．

(*) 任意の構造 $\mathfrak{M}$ と $\boldsymbol{a} \in M^m$ に対し，プログラム$\langle \boldsymbol{S}, \mathfrak{M} \rangle$に入力$\boldsymbol{a}$を与えたときの値と $V_{\boldsymbol{D},\mathfrak{M}}(\boldsymbol{a})$ の値とが，定義されない場合も含めて一致する．

このようにして$\boldsymbol{S}$から作られる EDS を $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})$ と表わすことにする[9]．

2) あたえられた EDS $\boldsymbol{D}$ が有限集合となるための必要十分条件はある finite tree schema $\boldsymbol{S}$ が存在して $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})$ と $\boldsymbol{D}$ とが同値になる（すなわち，任意の構造 $\mathfrak{M}$ に対し $V_{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}),\mathfrak{M}}$ と $V_{\boldsymbol{D},\mathfrak{M}}$ が等しくなる）ことである[8]．

さて**定理 4.2** の証明に入ろう．いま$\boldsymbol{S}$を任意のプログラム図式とし $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})=\{(\theta_i(\boldsymbol{x}) \to t_i) \mid i=1, 2, \cdots\}$ とする．ここで $\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \bigvee_i \theta_i(\boldsymbol{x})$ とすれば 1) の無限論理の場合が証明される．つぎに2)を証明する．まず$\boldsymbol{S}$がある finite tree schema と同値であると仮定すると**補題 4.3** より $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})$ は有限集合になる．そこで $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})=\{(\theta_i(\boldsymbol{x}) \to t_i) \mid i=1, \cdots, p\}$ とし，$\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \bigvee_{i=1}^{p} \theta_i(\boldsymbol{x})$ と定義すると，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は１階の論理式でありさらに $\boldsymbol{S}$ の入力ごとの停止性を表現していることがわかる．つぎに $\boldsymbol{S}$ がどんな finite tree schema とも同値でないと仮定すると $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})$ は無限集合になる．そこで $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})=\{(\theta_i(\boldsymbol{x}) \to t_i) \mid i=1, 2, \cdots\}$ とする．さらにある論理式 $\varphi(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{S}$ の入力ごとの停止性を表現していると仮定しよう．いま新しい定数記号 $c_1, \cdots, c_m$ を導入し，$\boldsymbol{c}=(c_1, \cdots, c_m)$ とする．ここでつぎのような論理式の集合

$$\Phi=\{\varphi(\boldsymbol{c})\} \cup \{\neg\theta_i(\boldsymbol{c}) \mid i=1, 2, \cdots\}$$

の任意の有限部分集合がモデルを持つことを示そう．Φ' を Φ の任意の有限部分集合とし，$\neg\theta_k(\boldsymbol{c})$ は Φ' に属さないと仮定する．ここで $\boldsymbol{L}$ のカノニカルな構造（3.2 節参照）のうち，とくに $\theta_k(\boldsymbol{c})$ の構成要素であるような基本論理式を真にし，それ以外の基本論理式を偽にするものを $\mathfrak{M}_k$ とする．すると EDS の条件1)より $k \neq j$ ならば $\mathfrak{M}_k \models \neg\theta_j(\boldsymbol{c})$ がなりたち，また $\mathfrak{M}_k \models \theta_k(\boldsymbol{c})$ より $\mathfrak{M}_k \models \varphi(\boldsymbol{c})$ がなりたつ．したがって $\mathfrak{M}_k \models \Phi'$ となる．さてここでコンパクト性定理（**定理 1.6**）を用いると Φ のモデルとなるような構造 $\mathfrak{N}$ が存在することになる．任意の i に対し $\mathfrak{N} \models \neg\theta_i(\boldsymbol{c})$ がなりたつから $V_{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}),\mathfrak{N}}(\boldsymbol{c}^{\mathfrak{N}})$ の値は定義されないことになり，したがって入力 $\boldsymbol{c}^{\mathfrak{N}}$ に対しプログラム$\langle \boldsymbol{S}, \mathfrak{N} \rangle$は停止しない．ところが一方 $\mathfrak{N} \models \varphi(\boldsymbol{c})$ がなりたつが，これは $\varphi(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{S}$ の入力ごとの停止性を表現していることと矛盾する．

ここではプログラムの停止性のみに話を限ったが，同様にプログラムに関する概念の多くは無限論理の論理式で表現できるが一般には１階の論理式では表現できないということが示される．

4.5 プログラムの検証の形式体系

プログラムの検証の形式体系のうち代表的なものと

しては Hoare の体系[10]をあげることができる．これらの形式体系は一般に algorithmic logic とよばれ最近ではそれらの形式的な性質がいろいろな面から研究されている．純粋に理論的な立場から考えると，表現可能性の点からも体系の強さから見ても無限の演算を含んでいるような形式体系を用いるのが適当であると思われる．事実，これらの形式体系に対してはいろいろな形で完全性定理が証明されている (たとえば 11)，12))．このような観点からは，Hoare の体系は有限的な立場からの一つの近似ともいえよう．一方，Pratt は Hoare の体系を様相論理と結びつけることにより一つの形式体系を得た[13]．たとえば Π をプログラムとしたとき $[\Pi]\varphi$ の形の表現も論理式であると考え，これを「Π の実行後に φ がなりたつ」と解釈する．そしてこの $[\Pi]$ を一つの様相演算のようにとり扱うのである．この体系に対しては様相論理におけるように Kripke 流の解釈 (**4.2** 節) をあたえることができる．

この節では Hoare の体系と無限論理との関係について述べることにしよう．まず言語 $\boldsymbol{L}$ を固定し，$\boldsymbol{L}$ 上の **while** プログラム図式 (WPS と略す) をつぎのように帰納的に定義する．

1) x が変数，t が項のとき，$x:=t$ は WPS である．

2) Π_1, Π_2 が共に WPS のとき，$\Pi_1;\Pi_2$ は WPS である．

3) φ を限定記号を一つも含まないような論理式，Π_1, Π_2 を WPS とするとき，**if** φ **then** Π_1 **else** Π_2 **fi** は WPS である．

4) φ を限定記号を一つも含まないような論理式，Π を WPS とするとき，**while** φ **do** Π **od** は WPS である．

つぎに Hoare の形式体系 **H** を導入する．**H** の論理式はつぎのように定義される．

1) 任意の1階の論理式は **H** の論理式である．

2) φ と ψ を1階の論理式，Π を WPS とすると，$\varphi\{\Pi\}\psi$ は **H** の論理式である．

形式体系 **H** はつぎの公理と推論規則からなる．

公理 1) **LK** で証明可能なすべての1階の論理式．

2) $\varphi'\{x:=t\}\varphi$ (ただし φ' は φ に現われるすべての自由な x を t でおきかえて得られる論理式である)．

推論規則 (以下で，$\Gamma\Rightarrow\sigma$ の形の表現は，Γ を仮定すれば σ が導かれることを意味する)

1) $\varphi\{\Pi_1\}\theta,\ \theta\{\Pi_2\}\psi \Longrightarrow \varphi\{\Pi_1;\Pi_2\}\psi$,

2) $\varphi\wedge\gamma\{\Pi_1\}\psi,\ \varphi\wedge\neg\gamma\{\Pi_2\}\psi$
$\Longrightarrow \varphi\{\textbf{if}\ \gamma\ \textbf{then}\ \Pi_1\ \textbf{else}\ \Pi_2\ \textbf{fi}\}\psi$,

3) $\varphi\wedge\gamma\{\Pi\}\varphi \Longrightarrow \varphi\{\textbf{while}\ \gamma\ \textbf{do}\ \Pi\ \textbf{od}\}\varphi\wedge\neg\gamma$,

4) $\varphi\supset\theta_1,\ \theta_1\{\Pi\}\theta_2,\ \theta_2\supset\psi \Longrightarrow \varphi\{\Pi\}\psi$.

いま **H** の論理式 σ が，公理から出発し推論規則を有限回適用することにより導かれるとき，σ は **H** で証明可能であるといわれ $\mathbf{H}\vdash\sigma$ と表わされる．つぎに **H** の論理式に対する解釈を定義する．まず任意の1階の論理式 ψ および任意の WPS Π に対し，無限論理の論理式 $W_\Pi(\psi)$ をつぎのように帰納的に定義する．

1) Π が $x:=t$ の形のとき，$W_\Pi(\psi)\equiv\psi'$，ただし ψ' は ψ の中に自由変数として現われるすべての x を t でおきかえて得られる論理式とする．

2) Π が $\Pi_1;\Pi_2$ の形のとき，$W_\Pi(\psi)\equiv W_{\Pi_1}(W_{\Pi_2}(\psi))$.

3) Π が **if** φ **then** Π_1 **else** Π_2 **fi** の形のとき，$W_\Pi(\psi)\equiv((\varphi\supset W_{\Pi_1}(\psi))\wedge(\neg\varphi\supset W_{\Pi_2}(\psi)))$.

4) Π が **while** φ **do** Π_1 **od** の形のとき，$W_\Pi(\psi)\equiv\bigwedge_n U_n(\psi)$，ただし $U_n(\psi)$ は，$U_0(\psi)\equiv(\neg\varphi\supset\psi)$，$U_{n+1}(\psi)\equiv(\varphi\supset W_{\Pi_1}(U_n(\psi)))$ により定義されるものとする．

任意の $\boldsymbol{L}$ の (1階の述語論理に対する) 構造 $\mathfrak{M}$ はつぎのようにして無限論理に対する構造に拡張することができる．

1) $\mathfrak{M}\models\bigwedge_i\varphi_i \Longleftrightarrow$ すべての i に対し $\mathfrak{M}\models\varphi_i$.

2) $\mathfrak{M}\models\bigvee_i\varphi_i \Longleftrightarrow$ ある i が存在して $\mathfrak{M}\models\varphi_i$.

さらに $\varphi\{\Pi\}\psi$ の形の **H** の論理式に対して

3) $\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi \Longleftrightarrow \mathfrak{M}\models\varphi\supset W_\Pi(\psi)$

と定義すれば，任意の構造は **H** に対する構造とみなすことができる．

補題 4.4 $\mathbf{H}\vdash\varphi\{\Pi\}\psi$ ならば，すべての構造 $\mathfrak{M}$ に対し $\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi$ がなりたつ．

Hoare の体系についての完全性および不完全性についてはいろいろの結果が知られているが，「完全性」という言葉が論文によりさまざまな意味で用いられていることを注意しておく．いま T を1階の論理式のある集合とする．形式体系 **H** に公理として T の各論理式をつけ加え，そのときにこの体系で $\varphi\{\Pi\}\psi$ が導かれるならば，これを $T\vdash_{\mathbf{H}}\varphi\{\Pi\}\psi$ と表わすことにする．また構造 $\mathfrak{M}$ に対し $T(\mathfrak{M})=\{\varphi\mid\mathfrak{M}\models\varphi,\ \varphi$ は1階の論理式$\}$ と定義しておく．するとつぎのようないろいろな性質—つまり，いろいろな“完全性”—が考えられる．

（1） 特定の構造 $\mathfrak{M}$ に対し，ある T が存在して，
$\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi\Longleftrightarrow T\vdash_{\mathbf{H}}\varphi\{\Pi\}\psi$.

（2） すべての構造 $\mathfrak{M}$ に対し，$\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi\Longleftrightarrow T(\mathfrak{M})\vdash_{\mathbf{H}}\varphi\{\Pi\}\psi$.

（3） すべての T のモデル $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi\Longleftrightarrow T\vdash_{\mathbf{H}}\varphi\{\Pi\}\psi$.

（4） すべての構造 $\mathfrak{M}$ に対して $\mathfrak{M}\models\varphi\{\Pi\}\psi\Longleftrightarrow \mathbf{H}\vdash\varphi\{\Pi\}\psi$.

（1）は1階の述語論理の上の多くの数学的理論に対して不完全性定理（**2.3** 節）がなりたつことから，非常に制限された $\mathfrak{M}$ および T に対してしかなりたち得ない．（2）は14)により否定的に解決されている（（4），すなわち**補題 4.4** の逆，がなりたつか否かは筆者は知らない）．

任意の WPS Π に対し $W_\Pi(\psi)$ の形の論理式はつぎの性質を持つことが，Π の構成に関する帰納法により示される．

補題 4.5 すべての WPS Π に対しつぎの 1)，2) がなりたつ．

1) $W_\Pi(\varphi\supset\psi)\supset(W_\Pi(\varphi)\supset W_\Pi(\psi))$ はつねに正しい．

2) φ がつねに正しいならば $W_\Pi(\psi)$) もつねに正しい．

ここであらたに各 WPS Π に対し論理演算 $[\Pi]$ を導入する．ただし $[\Pi]\varphi$ は内容的には $W_\Pi(\varphi)$ を意味するものとする．**補題 4.5** は $[\Pi]$ が **4.1** 節の（5）および（6）に対応する性質を持つことを意味するから，$[\Pi]$ は一種の様相演算とみなすことができる．このことが Hoare の体系と様相論理を結びつけた Pratt の考えの基礎となっているのである．

ところで $\varphi\supset W_\Pi(\psi)$ は弱い意味での正当性を表現していたのだが，強い意味での正当性（すなわち，停止性も含む正当性）を表現するにはつぎのように W_Π の定義を変更すればよい．まず W_Π の定義の1)，2)，3)にあらわれる W_Π の形の表現を $W_\Pi{}^*$ でおきかえ，さらに4)をつぎのように変更する．

4) Π が **while** φ **do** Π_1 **od** の形のとき，$W_\Pi{}^*(\psi)\equiv\bigvee_n U_n{}^*(\psi)$．ただし $U_n{}^*(\psi)$ は，$U_0{}^*(\psi)\equiv(\neg\varphi\wedge\psi)$，$U_{n+1}(\psi)\equiv(\varphi\wedge W_{\Pi_1}{}^*(U_n{}^*(\psi)))$ により定義される．

このように $W_\Pi{}^*$ を定義すると，$\varphi\supset W_\Pi{}^*(\psi)$ は強い意味での正当性を表わす式になる．実際 Π を上の形の WPS とするとき，$Y_0\equiv\neg\varphi$，$Y_{n+1}\equiv\varphi\wedge W_{\Pi_1}{}^*(Y_n)$ とすれば $\bigvee_n Y_n$ は Π の停止性を表現する論理式となり（**4.4** 節参照），さらに

$$W_\Pi{}^*(\psi)\equiv W_\Pi(\psi)\wedge\bigvee_n Y_n$$

がつねに正しいことが示される．

結び

以上で数理論理学の解説を終る．始めに述べたように一般的な概説をするつもりではなかったから，ここでふれなかった数理論理学の重要な問題も多い．帰納的関数についてはすでによく知られていると思い割愛した．ただ公理的集合論についてはもう少しふれておくべきだったかも知れない．

この解説では，数理論理学ではどのように考えるかという問に対する私なりの考えを述べたつもりである．私自身この解説を書くことによりいくつかの問題に対する自分の考えを整理することができた．反面，私の思い違いや独断も多々あるかも知れない．

この記事を書くにあたり何人かの方にいろいろな面からの助言を頂いた．御名前はここでは略させて頂くがこれらの方にこの場を借りて感謝したい．

参考文献

（I）に関するもの
1) Hughes, G. E., and Cresswell, M. J.: An introduction to modal logic, p. 388, Methuen and Co., Ltd. (1968).
2) J. ヒンティッカ（永井成男・内田種臣共訳）：認識と信念，p. 228，紀伊国屋書店（1975）.
3) Prior, A.: Past, present and future, p. 217, Oxford Univ. Press (1967).
4) Montague, R.: Formal philosophy, Ed. by R. H. Thomason, p. 369, Yale Univ. Press (1974).
(II) に関するもの
5) Z. マンナ（五十嵐滋訳）：プログラムの理論，p. 478，日本コンピュータ協会（1975）.
6) 小野寛晰：プログラムの基礎理論，p. 172，サイエンス社（1975）.
7) Engeler, E.: Algorithmic properties of structrures, Math. Systems Theory, Vol. 1, pp. 183-195 (1967).
8) Ono, H.: On the representability of the termination and the partial correctness of program schemes, J. of Tsuda College, Vol. 8, pp. 37-52 (1976).
9) Friedman, H.: Algorithmic procedures, generalized Turing algorithms, and elementary recursion theory, Logic Colloquium' 69, Ed. by R. O. Gandy and C. E. M. Yates, pp. 361-389 (1971).
10) Hoare, C. A. R.: An axiomatic basis for computer Programming, Comm. ACM, Vol. 12,

pp. 576-580, 583 (1969).
11) Kreczmar, A.: Effectivity problems of algorithmic logic, Lecture Notes in Computer Science 14, pp. 584-600 (1974).
12) Kröger, F.: LAR: A logic of algorithmic reasoning, Acta Informatica, Vol. 8, pp. 243-266 (1977).
13) Pratt, V.R.: Semantical considerations on Floyd-Hoare logic, Proc. 17th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp. 109-121 (1976).
14) Wand, M.: A new incompleteness result for Hoare's system, J. ACM, Vol. 25, pp. 168-175 (1978).

(昭和54年7月24日受付)