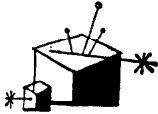


講座

最近のグラフ理論とその応用(2)[†]



大 附 辰 夫^{††}

3. グラフの代数的構造

グラフの構造を行列で、カットセットとタイセット(閉路)をベクトルで表現することによってグラフ固有の代数的性質を論ずることができる。ベクトルや行列の属する代数系としては、有向グラフならば“実数体”，無向グラフならば“mod 2の整数体*”を前提とする。本講座では有向グラフを対象とした議論を進めることとし、無向グラフに関する理論の展開は読者自身で試みられたい。

3.1 カットセットベクトルとタイセットベクトル

有向グラフ $G=(V, E)$ のカットセット Q が節点の集合 V を V_1 と V_2 に分割 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cup V_2 = V$) しているとして、 V_1 の一方 (例えば V_1) から他方 (V_2) へ向うように Q の方向を定める。そして枝 $e \in Q$ の始点 (終点) が V_1 に終点 (始点) が V_2 に属するとき、 e は Q に順(逆)方向に含まれるという。あるカットセット Q に順方向、逆方向に含まれる枝の集合をそれぞれ $\vec{Q}, \overleftarrow{Q}$ と表わすことにする。

タイセット $P=P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_s$ が互いに素な単純な閉路 $P_i; i=1, 2, \dots, s$ に分解されているとして、各々の P_i の方向を任意に定め、それを合成したものを P の方向とする。そして枝 $e \in P_i$ の向きが P_i と同(逆)方向のとき、 e は P に順(逆)方向に含まれるという。あるタイセット P に順方向、逆方向に含まれる枝の集合をそれぞれ $\vec{P}, \overleftarrow{P}$ と表わすことにする。

以下有向グラフのカットセット $Q=\vec{Q} \cup \overleftarrow{Q}$ あるいはタイセット $P=\vec{P} \cup \overleftarrow{P}$ といえは、それらを構成する枝の集合だけでなく方向も指定されているものとする。

有向グラフ $G=(V, E); E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ のカットセット Q またはタイセット P において

$$q_j \text{ または } p_j = \begin{cases} 1: e_j \in \vec{Q} \text{ または } e_j \in \vec{P} \\ -1: e_j \in \overleftarrow{Q} \text{ または } e_j \in \overleftarrow{P} \\ 0: e_j \notin Q \text{ または } e_j \notin P \end{cases} \quad (3.1)$$

で定義される行ベクトル $q=(q_1, q_2, \dots, q_m)$ または $p=(p_1, p_2, \dots, p_m)$ をそれぞれカットセットベクトルまたはタイセットベクトルという。

例えば図-20 に示すカットセット Q およびタイセット $P=P_1 \cup P_2$ のベクトル表示はそれぞれ

$$q=(1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)$$

$$p=(1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

となる。この二つのベクトル q, p の間には

$$pq^T = qp^T = \sum_{k=1}^m p_k q_k = 0 \quad (3.2)$$

という関係が成立することが確かめられる。ここで T は転置を表わすものとする。式(3.2)の関係が成立する二つのベクトルは互いに直交するといわれる。実は、次の定理に示すように、この関係は同一のグラフにおける任意のカットセットベクトルとタイセットベクトルの間に成立するのである。この関係は「閉路 P が切口(カットセット Q) を一方から他方によぎった回数だけ逆方向にもよぎるという事実から導かれる。

[定理 3.1] 同一のグラフの任意のタイセットベクトルとカットセットベクトルは互いに直交する。

3.2 接続行列とベクトル空間

枝の集合 $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ と節点の集合 $V=\{v_1,$

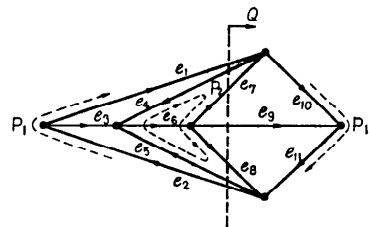


図-20 カットセット Q とタイセット P

[†] Recent Development in Graph Theory and Its Applications (2) by Tatsuo OHTSUKI (Central Research Laboratories, Nippon Electric Co., Ltd.).

^{††} 日本電気(株)中央研究所

* 1と0を元とする mod 2の整数体においては、加算 \oplus は $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 1 = 0$ によって定義され、乗算 \cdot は $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$ によって定義される。すなわち $1 \oplus 1 = 0$ という規則以外は実数体における 0, 1 と同じである。

v_2, \dots, v_n から成るグラフ $G=(V, E)$ の接続行列 (2.1 節参照) を $D=\{d_{ij}\}$ とすれば, D の行ベクトルおよびそれらの一次結合で表わされるベクトルの集合は m 次元ベクトル空間の一つの線形部分空間 Γ を形成する. G の各々の節点に接続している枝の集合はカットセットであるので D の行ベクトルはカットセットベクトルである. 更に, 「接続行列の各列が丁度 1 個ずつの “1” と “-1” を持つ」ことより, 次の定理が導かれる.

[定理 3.2] グラフ $G=(V, E)$ の接続行列 D の節点 $i; i=1, 2, \dots, n$ に対応する行ベクトルを $d^{(i)}$ とすれば, 任意のカットセットベクトル q は

$$q = \sum_{v_i \in V_1} d^{(i)} \quad (3.3)$$

によって与えられる. ここでベクトル q に対応するカットセット Q は V を V_1 と $(V-V_1)$ に分割し, 方向は $V_1 \rightarrow (V-V_1)$ であるとする.

この定理は「任意のカットセットベクトルが D の行ベクトルの一次結合で表わされる」ことを示している. すなわち, 任意のカットセットベクトルが線形部分空間 Γ の上にあることになるので, 以後 Γ を **カットセット空間**と呼ぶ. また Γ と直交する線形部分空間を Δ とすれば, 定理 3.1 より, すべてのタイセットベクトルは Δ の上にある. そこで Δ を以後 **タイセット空間**と呼ぶ. 定義から明らかなように, Γ の次元と Δ の次元の和は枝の数 m に等しい. 更に後述の定理 3.3 によれば, Γ, Δ の次元はそれぞれグラフ G の階数 ρ , 零度 μ に等しい.

接続行列 D の自己閉路に対応する列の要素はすべて 0 であり, それ以外の列は丁度 1 個ずつの “1” と “-1” を持つ. すなわち D の行ベクトルの総和が 0 になるので, 一つの行ベクトルは残りの行ベクトルに一次従属である. グラフが k 個の連結成分から成っているとすれば, その各々から 1 個ずつ節点を選べば, それらに対応する k 個の行ベクトルは残りの行ベクトルに一次従属である. したがって接続行列 D の階数はグラフの階数 $\rho (=n-k)$ 以下である. 以後 D から上記のような k 個の行を取り除いて得られる $\rho \times m$ の行列を **既約接続行列**と呼ぶ. また取り除かれた行に対応する節点の各々を **基準点 (reference node)** と呼ぶ. D の階数が ρ に等しいことは, 「連結グラフの既約接続行列の少なくとも 1 個の列において “1” または “-1” を丁度 1 個含む」ことより導かれる. 以上の結果をまとめると次の定理が得られる.

[定理 3.3] グラフ G の階数を ρ , 零度を μ とす

れば, 下記の i), ii), iii) が成立する.

i) カットセット空間 Γ , タイセット空間 Δ の次元はそれぞれ ρ, μ に等しい.

ii) (既約)接続行列の階数は ρ に等しい.

iii) 既約接続行列の行ベクトルの組は Γ の基底を成す.

3.3 基本カットセット行列と基本閉路行列

グラフ G の一つの木 T を選ぶと, これに基づいて ρ 個の基本カットセットと μ 個の基本閉路が定まる (2.4 節参照). これらのカットセット, 閉路をベクトルで表わしたものを, それぞれ T に基づく **基本カットセットベクトル**, **基本タイセットベクトル** という. 但し, 基本カットセット (閉路) の方向は丁度 1 個含まれる木 (補木) の枝が順方向に含まれるように定めるものとする. ところで, ρ 個 (μ 個) の基本カットセット (閉路) は木 (補木) の枝を 1 個ずつ含み, それらはすべて異なるので基本カットセット (タイセット) ベクトルは互いに一次独立である. よって次の定理を得る.

[定理 3.4] グラフ G の一つの木に基づき基本カットセットベクトル, 基本タイセットベクトルはそれぞれカットセット空間, タイセット空間の基底を形成する.

以後このような基底を **カットセット空間あるいはタイセット空間の原始基底 (primitive basis)** と呼ぶ.

グラフ $G=(V, E)$ の一つの木 T に基づき ρ 個の基本カットセットベクトル (行ベクトル) を縦に並べて得られる $\rho \times m$ の行列 $C=[c_{ij}]$ を T に基づく **基本カットセット行列** という. また μ 個の基本タイセットベクトルを縦に並べて得られる $\mu \times m$ の行列 $B=[b_{ij}]$ を T に基づく **基本閉路行列** という. C, B の行, 列の番号付けを適当に行えば, C, B はそれぞれ

$$C = \begin{bmatrix} \overline{I}_\rho & \overline{S} \\ \overline{T} & \overline{E-T} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \overline{R} & \overline{I}_\mu \\ \overline{T} & \overline{E-T} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

という構造を持つ. ここで $\overline{I}_\rho, \overline{I}_\mu$ はそれぞれ ρ 次, μ 次の単位行列を表わす. また $\overline{S}, \overline{R}$ をそれぞれ基本カットセット行列, 基本閉路行列の **主要部** という.

定理 3.1 によれば, 基本カットセット行列 C の行ベクトルと基本閉路行列 B の行ベクトルは互いに直交する. したがって C と B が同じ木に基づき行列ならば,

$$S = -R^T \quad \text{あるいは} \quad R = -S^T \quad (3.5)$$

という関係が成立する.

グラフ $G=(V, E)$ の適当な ρ 個の枝から成る集合を F , 基本カットセット行列 C および既約接続行列 D の F の枝に対応する列だけを取り出して作った ρ 次の

正方行列をそれぞれ $C(F)$, $D(F)$ とすれば, 次の定理に示される性質を持つ.

【定理 3.5】 F がグラフ G の木ならば
 $|\det C(F)| = |\det D(F)| = 1$ (3.6)

F が G の木でないならば
 $\det C(F) = \det D(F) = 0$ (3.7)

である.

一方, グラフ G の適当な μ 個の枝から成る集合を F , 基本閉路行列 B の F の枝に対応する列だけを取り出して作った μ 次の正方行列を $B(F)$ とすれば, 次の定理に示される性質を持つ.

【定理 3.6】 F がグラフ G の補木ならば
 $|\det B(F)| = 1$ (3.8)

F が補木でないならば
 $\det B(F) = 0$ (3.9)

である.

定理 3.5, 3.6 の証明は難解ではないが, 長くなるので省略する.

3.4 基底変換

グラフ $G=(V, E)$ の一つの木を T , T の枝の一つを b , 補木 $(E-T)$ の枝の一つを c とすれば, b に対応する基本カットセットが c を含むとき, しかもそのときに限り, c に対応する基本閉路は b を含む. もし b と c の間にこのような関係があれば, $T' = T \cup \{c\} - \{b\}$ も G の木であり, したがって $(E-T')$ も G の補木である. このようにある木 T の一つの枝を除いて, 代わりに補木 $(E-T)$ の適当な一つの枝を加えて新しい木 T' を得る操作を木の初等変換 (elementary transformation) という. 一般に, 一つの木から出発して初等変換を繰り返せば任意の木が得られる. 一つの木 T から別の木 T' を得る操作は, カットセット (タイセット) 空間において T に対応する原始基底を T' に対応する原始基底に変換することに相当する.

基底変換によって基本カットセット (閉路) 行列がどのように変化するかについて考察しよう. グラフのある木 T に基づく基本カットセット行列を C , 別の木 T' に基づく基本カットセット行列を C' とすれば, これらは下記のような構造を持つ.

$$C = \begin{array}{c|ccc|c} & T \cup T' & T - T' & E - T - T' & T' - T \\ \hline T \cap T' & I & 0 & S_{11} & S_{12} \\ \hline T - T' & 0 & I & S_{21} & S_{22} \end{array} \quad (3.10)$$

$$C' = \begin{array}{c|ccc|c} & T' \cap T & T - T' & E - T - T' & T' - T \\ \hline T' \cap T & I & S_{12}' & S_{11}' & 0 \\ \hline T' - T & 0 & S_{22}' & S_{21}' & I \end{array} \quad (3.11)$$

ここで, 定理 3.4 より, C' と C は ρ 次の非特異正方行列 K を介して一次結合で結ばれる. すなわち

$$C' = KC \quad (3.12)$$

という関係が成立する. 式(3.10)~(3.12)を比較することによって, C' の主要部が

$$S' = \left[\begin{array}{c|c} S_{11}' & S_{12}' \\ \hline S_{21}' & S_{22}' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ \hline S_{22}^{-1}S_{21} & S_{22}^{-1} \end{array} \right] \quad (3.13)$$

で与えられることがわかる. 一般に行列

$$S = \left[\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array} \right]; \det S_{22} \neq 0 \quad (3.14)$$

を与えて式(3.13)で定義される行列 S' を得る操作を行列の枢軸変換 (pivotal transformation) という. 特に S_{22} として一つの "1" あるいは "-1" 要素を選んで枢軸変換を行うことは木の初等変換に対応する.

以上より, カットセット空間, タイセット空間における原始基底の変換は, それぞれ基本カットセット行列, 基本閉路行列の主要部の枢軸変換として解釈されることがわかった. 例えば図-21 のグラフ $G=(V, E)$ において, (a) に示される木 $T = \{a, c, g, d\}$ に基づく基本カットセット行列の主要部を

$$S = \begin{array}{c|cc|c} & E - T - T' & T' - T & \\ \hline T \cap T' & S_{11} & S_{12} & \\ \hline T - T' & S_{21} & S_{22} & \\ \hline & b & e & f \\ \hline a & -1 & 0 & 0 \\ \hline c & 1 & -1 & -1 \\ \hline g & 0 & 0 & -1 \\ \hline d & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

とにおいて枢軸変換を行うと,

$$S' = \begin{array}{c|cc|c} & E - T - T' & T' - T & \\ \hline T' \cap T & S_{11}' & S_{12}' & \\ \hline T' - T & S_{21}' & S_{22}' & \\ \hline & b & e & d \\ \hline a & -1 & 0 & 0 \\ \hline c & 1 & 0 & 1 \\ \hline g & 0 & 1 & 1 \\ \hline f & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

が得られる. 一方, 木 T に初等変換 (木の枝 d と補木の枝 f を交換する) をほどこすことによって図-21(b) に示される木 $T' = \{a, c, g, f\}$ が得られるが, T' に基づく基本カットセット行列の主要部が上記の枢軸変

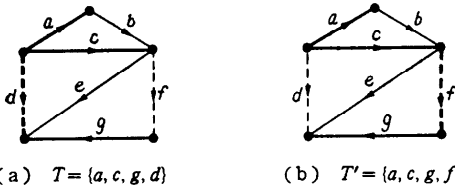


図-21 木の初等変換

換によって得られる S' に等しいことが確かめられる。

3.5 行列の完全単模性

どの小行列式の値も 0, ± 1 のいずれかであるような行列は完全単模 (totally unimodular) であるといわれる。グラフ $G=(V, E)$ の階数, 零度をそれぞれ ρ, μ とすれば, 接続行列, 基本カットセット行列の ρ 次の小行列式および基本閉路行列の μ 次の小行列式の値が 0, ± 1 のいずれかであることはすでに述べた。一方, 基本カットセット行列あるいは既約接続行列からいくつかの行を取り除く操作は, グラフ G の対応する枝を短絡除去 (2.1 節参照) することに対応し, 基本閉路行列からいくつかの行を取り除く操作は, G の対応する枝を開放除去 (2.1 節参照) することに対応するという事実に着目すれば, これらの行列のすべての小行列式の値も 0, ± 1 のいずれかになることが示される。よって次の定理を得る。

【定理 3.7】 グラフの (既約) 接続行列, 基本カットセット行列, 基本閉路行列は完全単模である。

行列 A が完全単模ならば A^{-1}, A^T も完全単模になることは定義から明らかである。また特定の行 (列) を除去したり符号を反転したり, 行 (列) 同志の置換を行っても完全単模性が保存されることも明らかである。更に A が基本カットセット行列あるいは基本閉路行列の場合には, 枢軸変換 (木の初等変換) を行ってもその完全単模性が保存される。証明は厄介である²⁵⁾ が, 一般の (グラフに対応するとは限らない) 行列に対しても枢軸変換がその完全単模性を保存することが知られている。これを定理として挙げる。

【定理 3.8】 行列の枢軸変換はその完全単模性を保存する。

このほか完全単模行列の重要な性質として下記の定理を挙げておく。

【定理 3.9】²¹⁾ 完全単模行列は部分行列として下記

* フロー, テンションはそれぞれ電気回路における電流, 電圧に相当する物理量を抽象化したものである。
 ** フロー公理, テンション公理はそれぞれ, 電気回路理論におけるキルヒホフの電流則, 電圧則に相当する。

の構造のもの, あるいはその転置を含まない。ここで “ \times ” は ± 1 を表わすものとする。

$$\begin{bmatrix} \times & 0 & \times & \times \\ \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & 0 \end{bmatrix}$$

4. ネットワーク理論の基礎

ネットワークの理論はオペレーションズリサーチにおける輸送計画, 日程計画などの各種の回路形の計画問題や通信網, 道路交通網などの問題に共通な基礎理論であるといわれている。本講座では統一的に確立された理論体系に乗るようなネットワークの問題だけを扱うことにする。そうすると, 扱う対象は “非線形非負抵抗回路” として抽象化できるような問題となる。このようなネットワークにおいては, 物理的性質が比較的単純であるため, その接続関係 (グラフの構造) が主要な役割を果たすことになる。

4.1 フローとテンション

グラフ G の各々の枝 $e_k; k=1, 2, \dots, m$ に物理量 f_k が付随していて, G の任意のカットセットベクトル $q=(q_1, q_2, \dots, q_m)$ に対して

$$qf^T = q_1f_1 + q_2f_2 + \dots + q_mf_m = 0 \tag{4.1}$$

という関係が成立するとき, $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ をフローベクトル, あるいは単にフロー (flow)* という。フローベクトル f に対して, 各々の f_k を枝 e_k のフローという。また式 (4.1) の関係をフロー公理** という。任意のタイセットベクトル $p=(p_1, p_2, \dots, p_m)$ に対して

$$pt^T = p_1t_1 + p_2t_2 + \dots + p_mt_m = 0 \tag{4.2}$$

という関係が成立するとき, $t=(t_1, t_2, \dots, t_m)$ をテンションベクトル, あるいは単にテンション (tension)* という。テンションベクトル t に対して, 各々の t_k を枝 e_k のテンションという。また式 (4.2) の関係をテンション公理** という。

フロー公理, テンション公理はそれぞれ, カットセットとフロー, タイセットとテンションの直交性を表現したものであるため, これと第3章の理論を照合すれば次の定理が得られる。

【定理 4.1】 m 個の枝より成るグラフ G が規定するタイセット空間, カットセット空間をそれぞれ Δ, Γ とすれば, 次の i), ii), iii) が成立する。

i) m 次元ベクトル f が G 上のフローであるための必要十分条件は $f \in \Delta$ であることである。

ii) m 次元ベクトル t が G 上のテンションであるための必要十分条件は $t \in T$ であることである。

iii) グラフ G 上のフロー f とテンション t は互いに直交する。すなわち次の関係が成立する*。

$$ft^T = tf^T = f_1t_1 + f_2t_2 + \dots + f_mt_m = 0 \quad (4.3)$$

グラフ G の各々の枝 e_k ; $k=1, 2, \dots, m$ に物理量としてフロー f_k およびテンション t_k が付随しているようなネットワークにおいて、各々の枝のフローとテンションの取り得る値の範囲を規定する関係を枝特性という。これをフローあるいはテンションの関数として、

$$t_k = r_k(f_k) \text{ あるいは } f_k = g_k(t_k) \quad (4.4)$$

と形式的に表現してみる。ここで r_k と g_k は互いに逆関数である。また、 r_k および g_k は有限個の点を除いて、連続な一価関数で与えられるものとする。通常ネットワーク理論においては、 r_k および g_k が単調非減少関数で与えられる場合だけを対象とする。ここで“単調非減少”とは枝特性を表す開曲線上の任意の2点、 $(f_k^{(1)}, t_k^{(1)})$, $(f_k^{(2)}, t_k^{(2)})$ に対して、

$$(f_k^{(1)} - f_k^{(2)}) \cdot (t_k^{(1)} - t_k^{(2)}) \geq 0 \quad (4.5)$$

が成立することである。このような意味で単調非減少な特性を持つ枝だけから成るネットワークを非負抵抗回路と呼ぶ。図-22(a), (b), (c) に単調非減少な特性の例を示す。特に(a), (b)のようにフロー、テンションの値が一定な枝をそれぞれフロー源、テンション源という*。

ネットワークの各々の枝 e の特性をフロー軸あるいはテンション軸に射影したものは実直線上の一つの区間をなす。その区間をそれぞれ $I(e)$, $J(e)$ と記す。例えば図-22の特性における $I(e_k)$, $J(e_k)$ はそれぞれ下記のようになる。

- (a) $I(e_k) = [a, a]$, $J(e_k) = (-\infty, +\infty)$
- (b) $I(e_k) = (-\infty, +\infty)$, $J(e_k) = [b, b]$
- (c) $I(e_k) = [c, +\infty)$, $J(e_k) = (-\infty, +\infty)$

ネットワークの各々の枝 e_k ; $k=1, 2, \dots, m$ に対して

$$f_k \in I(e_k) \text{ あるいは } t_k \in J(e_k) \quad (4.6)$$

が成立するようなフロー $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ あるいは

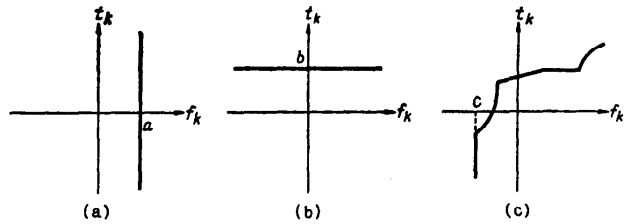


図-22 フロー源(a), テンション源(b)および単調非減少関数(c)の枝特性

テンション $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ をそれぞれ許容フローあるいは許容テンションと呼ぶ。またカットセット Q , タイセット P に対して式(4.6)の制限のもとで、 qf^T , pt^T の取り得る値の範囲をそれぞれ、 $I(Q)$, $J(P)$ とすれば次の定理が成立する。ここで q, p はそれぞれ Q, P のベクトル表示である。

[定理 4.2] 許容フロー、許容テンションが存在するための必要十分条件は、それぞれ、任意のカットセット Q に対して $I(Q)$ が 0 を含むこと、任意のタイセット P に対して $J(P)$ が 0 を含むことである。

この定理の必要性はフロー、テンションの定義から明らかである。十分性の証明については、例えば文献 8) を参照されたい。

4.2 典型的な3種の問題

ネットワークの各枝 e_k の特性が式(4.4)で与えられているとして、関数 $\varphi_k(f_k)$ および $\psi_k(t_k)$ を

$$\varphi_k(f_k) = \int_0^{f_k} r_k(x) dx, \quad \psi_k(t_k) = \int_0^{t_k} g_k(y) dy \quad (4.7)$$

によって定義し、それぞれ f パワー、 t パワーと呼ぶ。ここで積分の下限は、それぞれ $I(e_k)$, $J(e_k)$ の中の任意の点を選んで良い。図-23 に示す $f-t$ 曲線において、原点を積分の下限に選ぶと、 $\varphi(f)$, $\psi(t)$ は斜線の部分の面積を表わしている。また r_k, g_k が単調非減少関数であることより、 φ_k, ψ_k はいずれも凸関数である。

上に定義した関数に基づいて一つのネットワークに対して次の三つの問題を考えよう。

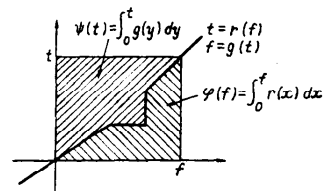


図-23 f パワーと t パワー

* 電気回路理論の中では、この関係は Tellegen の定理と呼ばれている。

** それぞれ、電気回路における電流源、電圧源である。

[P I : f パワーの総和の最小化]

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^m \phi_k(f_k) \rightarrow \min \quad (4.8)$$

とするようなフロー $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ を求める。

[P II : t パワーの総和の最小化]

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^m \psi_k(t_k) \rightarrow \min \quad (4.9)$$

とするようなテンション $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ を求める。

[P III : フロー・テンションの平衡解]

すべての枝について、式(4.4)を満たすようなフロー f とテンション t の組を求める。

P III の問題は、フロー、テンションをそれぞれ電流、電圧に対応させれば、非負抵抗回路を解く問題に外ならない。ところが、P I, P II の問題も定式化が異なるだけで、次に挙げる定理の意味において、P III と等価な問題である。下記の定理は、数学的な厳密さに固執しなければ、Lagrange の未定乗数法を利用することによって導かれる。

[定理 4.3] P III に解 (f^*, t^*) が存在すれば、 f^* , t^* はそれぞれ P I, P II の解でもある。

[定理 4.4] P I (P II) に解が存在すれば、P II (P I) にも解が存在し、両者を合わせたものは P III の解となっている。

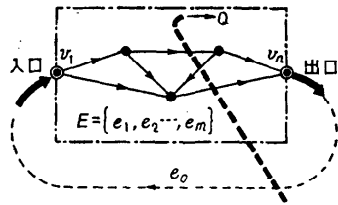
[定理 4.5] P I, P II, P III に解が存在するための必要十分条件は許容フローと許容テンションの両方が存在することである*。

多くのネットワーク問題は、上記の典型的な3種の問題に帰着されるが、個々の問題を取り上げると、その中のどれかの問題として定式化した方が見通しが良くなる場合が多い。また問題によっては、固有の能率の良い解法が工夫されている。特に4.3節で述べる最大フロー問題と4.4節で述べる最短経路問題は、ネットワーク問題の中で最も簡単ではあるが、一般の問題を解くときにもこれらの問題の解法が利用されるという意味で基本的に重要である。

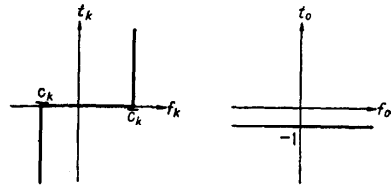
4.3 最大フローと最小コストフロー

m 個の枝 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ と n 個の節点 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ から成るグラフ G において、2個の節点 v_1, v_n を選び、 v_1 を、入口 (source), v_n を出口 (sink) と指定する。また各々の節点 v_i に接続している枝の集合から成るカットセットを $Q^{(i)}$, そのベクトル表示を $q^{(i)}$ とする。但し $Q^{(i)}$ の方向は $\{v_i\}$ から $V - \{v_i\}$ に向うように取るものとする。ここで

* 許容フロー (テンション) が存在するための必要十分条件はすでに定理4.2に与えられている。



(a) 仮想枝 e_0 の追加



(b) $e_k; k=1 \sim m$ の枝特性 (c) e_0 の枝特性

図-24 最大フロー問題の定式化

$$\begin{cases} c_k \leq f_k \leq \bar{c}_k; k=1, 2, \dots, m \\ q^{(i)} f T = 0; i=2, 3, \dots, (n-1) \\ f_0 = q^{(1)} f T = -q^{(n)} f T \end{cases} \quad (4.10)$$

を満たすようなベクトル $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ の内 f_0 を最大にするようなものを求める問題を最大フロー問題という。

図-24(a)に示すように出口から入口へ向う枝 e_0 を追加して得られるグラフ \hat{G} を考え、各枝 $e_k; k=1, 2, \dots, m$ の枝特性が同図(b)で、 e_0 の枝特性が同図(c) (値-1のテンション源)で与えられるとすれば、最大フロー問題はグラフ \hat{G} 上において問題 P I, P II あるいは P III を解く問題とみなすことができる。何となれば式(4.10)を満たすベクトル $\hat{f} = (f_0, f_1, \dots, f_m)$ は \hat{G} 上のフローであり、 f パワーの総和 $\Phi(\hat{f}) = -f_0$ は f_0 が最大値を取るとき最小になるからである。

通常、最大フロー問題においては

$$c_k \leq 0, \bar{c}_k \geq 0; k=1, 2, \dots, m \quad (4.11)$$

を前提とし、 $\bar{c}_k, -c_k$ をそれぞれ枝 e_k の順方向容量、逆方向容量という。許容フロー f において、 $f_k = \bar{c}_k, f_k = c_k$ であるとき、枝 e_k はそれぞれ順方向、逆方向に飽和している (saturated) という。

枝 e_0 を逆方向に含む \hat{G} のカットセット $Q = \bar{Q} \cup \bar{Q} \cup \{e_0\}$ に対して

$$c(Q) = \sum_{e_k \in \bar{Q}} c_k - \sum_{e_k \in \bar{Q}} c_k \quad (4.12)$$

とおけば、式(4.11)の前提より $c(Q) \geq 0$ であり、 f_0 の値はどの Q に対しても $c(Q)$ の値を越えられないこ

とは明らかである。実は f_0 の最大値は $c(Q)$ の最小値に等しいことが知られている⁵⁾。

【定理 4.6: 最大流・最小切断の定理】 枝 e_0 を逆方向に含む G のカットセット Q の中で $c(Q)$ の値を最小にするものを Q_{\min} とすれば、式(4.10)を満たす f_0 の最大値は $c(Q_{\min})$ に等しい。

f_0 を最大にするようなフロー f において、 $Q_{\min} = \bar{Q} \cup \bar{Q} \cup \{e_0\}$ とおけば、 \bar{Q} 、 \bar{Q} の枝はそれぞれ順方向、逆方向に飽和していることになる。

入口 v_1 から出口 v_n に向う G 上の単純な道 $P = \bar{P} \cup \bar{P}$ 、式(4.10)を満たす G 上の許容フロー $f = (f_0, f_1, \dots, f_m)$ に対して、

$$f_k \begin{cases} < c_k; & e_k \in \bar{P} \\ > c_k; & e_k \in \bar{P} \end{cases} \quad (4.13)$$

が成立するとき、道 P はフロー増加可能道 (flow augmentation path) と呼ばれる。このような道 P が存在すれば、 P に含まれる枝のフロー値だけを変更させることによって、より大きな f_0 の値を持つ許容フローを求めることができる。最大フローを求めるためのアルゴリズムとしては、Ford-Fulkerson のラベル法⁵⁾ が最も基本的なものである。最近これを改良した方法がいくつか提案されている^{26), 27)} が、いずれの方法においても、“一つの許容フローから出発してフロー増加可能道を見つけながら f_0 の値を順次増大させる” という考え方に基づいている。また一つの許容フローを求める際にも最大フローアルゴリズムが適用される^{8), 14)}。すなわち、非許容フローから出発して式(4.10)の第一式を満たさない枝を一つずつ減らして行けば良い。

入口 v_1 と出口 v_n が指定されたグラフ G の各々の枝 $e_k; k=1, 2, \dots, m$ に対して非負の定数 γ_k ——コスト率と呼ぶ——が与えられていて、式(4.10)の f^0 の値を固定したもとですべての枝で発生するコストの総和

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^m \gamma_k |f_k| \quad (4.14)$$

を最小にするようなフロー $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ を求める問題を最小コストフロー問題という。

最大フロー問題と同じように、出口から入口へ向う枝 e_0 を追加して得られるグラフ G を導入しよう。一般性を失うことなく、各枝のフローは順方向にしか流せないものとすれば、各枝 $e_k; k=1, 2, \dots, m$ の特

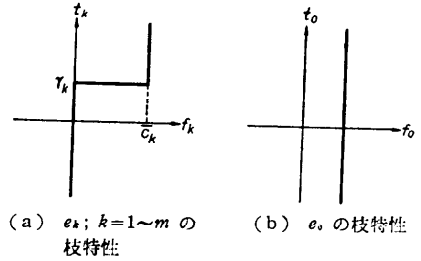


図-25 最小コストフロー問題の定式化

性は図-25(a)で与えられる。また追加した枝 e_0 の特性は図(b)で与えられるものとする。枝 $e_k; k=1, 2, \dots, m$ においては原点を、 e_0 においては f_0 を積分の下限にとって f パワー $\varphi_k(f_k)$; $k=0, 1, 2, \dots, m$ を定義すれば、 f パワーの総和 $\Phi(f)$ は式(4.14)の値に等しくなる。したがって最小コストフロー問題はグラフ G 上で問題 P_I , P_{II} あるいは P_{III} を解くことに帰着される。

上記の定式化に着目すれば、与えられた許容フロー $f = (f_0, f_1, \dots, f_m)$ が最小コストフローであるための条件を導くことができる。各々の枝 e_k の特性上で

$$r_k(f_k) = t_k \text{ または } q_k(t_k) = f_k; k=0, 1, \dots, m \quad (4.15)$$

を満たすテンション $t = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ が存在するとき、しかもそのときに限り、 f が最小コストフローである。したがって、 $J(f_0) = (-\infty, +\infty)$ であることを念頭において定理 4.2 を適用すれば、次の定理を得る。

【定理 4.7】 許容フロー f が最小コストフローであるための必要十分条件は、枝 e_0 を含まない各々のタイセット P に対して、式(4.15)の制限のもとでの区間 $J(P)$ が 0 を含むことである。

最大フロー問題を解くためのラベル法は最小コストフローを求めるためにも利用できる²⁶⁾。すなわち、“すべての枝のフローの値が 0” という状態から出発して、入口から出口へ向うフロー増加可能道に沿って最大限のフローを流しながら f_0 の値を増加させる。但し、それに含まれる枝のコスト率の総和が最小となるようなフロー増加可能道を優先させる*。このようにして実現されたフロー分布が最小コストを与えることは定理 4.7 を使えば容易に証明できる。

4.4 最短経路と最長経路

グラフ G 上のテンションベクトル $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ に対して

$$t = \mathbf{A} \mathbf{D} \quad (4.16)$$

* コスト率を枝の長さとして解釈すれば、入口から出口へ至る最短経路(4.4節参照)を求めることに帰着される。

が成立するようなベクトル $\hat{u}=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ を節点ポテンシャル (node potential) という。ここで u_i ; $i=1, 2, \dots, n$ は節点 v_i に付随した量である。また \hat{D} は G の接続行列である。式(4.16)は“各々の枝 $e_k=(v_i, v_j)$ のテンションが両端点のポテンシャルとの差

$$t_k = u_i - u_j \quad (4.17)$$

によって与えられる”ことを示している。一方テンション t を指定し、一つの節点 (例えば v_n) を基準点として選び、そのポテンシャルを $u_n=0$ と固定すれば、他の節点の節点ポテンシャル $u=(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ は

$$u = D_T^{-1} \beta \quad (4.18)$$

によって一意的に定まる*。ここで D_T は \hat{D} の節点 v_n に対応する行を取り除いて得られる既約接続行列の木 T の枝に対応する部分、 β は t の T に枝に対応する要素だけを集めて得られる ρ 次の行ベクトルである。実際に β を与えて式(4.18)の u を求めるには、図-26 に示すように、基準点から出発して木 T の枝をたどりながら、式(4.17)を用いて他の節点のポテンシャルを一つずつ決定して行けば良い。図において、 v_6 が基準点 ($u_6=0$ と固定) であり、また木(太線)の枝に付随した数字はテンション (β の要素) の値を示している。

テンションに着目した方が見通しが良くなるネットワーク問題の中で最も基本的なものは最短(長)経路問題である。このようなネットワーク問題を扱うには、ポテンシャルの概念を導入すると便利である。

グラフ G の各々の枝 e_k ; $k=1, 2, \dots, m$ に非負の数 b_k —長さと呼ぶ—が付随しているとす。 G 上の道 P に属する枝の長さの総和を P の長さと呼ぶ。指定された節点对 (v_i, v_j) に対して、 v_i から v_j に至る単純な道の中で長さが最小(大)のものを v_i と v_j の間の最短(長)経路という。但し G が有向グラフならば、 v_i を始点、 v_j を終点とする有向道だけを対象とする。また v_i と v_j を結ぶ最短経路の長さを v_i と v_j の間の距離という。

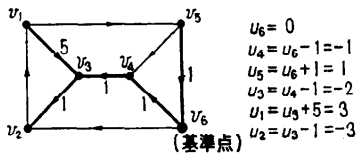


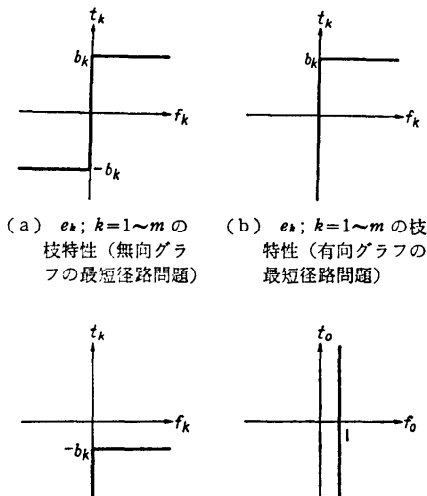
図-26 テンションと節点ポテンシャル

* グラフ G は連結であると仮定する。
 ** 節点ポテンシャルの値はその節点から根に至る距離を与える。

グラフ G が連結ならば、一つの木 T は各々の節点对を結ぶ道を一意に定める。特に一つの節点 v_n を固定したときに、木 T によって定まる節点 v_i ; $i=1, 2, \dots, n-1$ から v_n に至る道 P_i がそれぞれの節点对に対する最短(表)経路であるとき、 T を v_n を根 (root) とする最短(長)経路木という。多くの最短(長)経路アルゴリズムは、根 v_n から出発して、最短(長)経路木の枝と新しい節点のポテンシャルの値**を一つずつ求めながら最短(長)経路木を決定する、という考え方に基づいている。このようなアルゴリズムの中で、“最悪の場合の計算時間が最も短い”という理由で、ダイクストラ法²⁸⁾が広く用いられている。

ダイクストラ法は特定の節点と他の全節点の各々を結ぶ最短(長)経路を同時に求めるためのアルゴリズムであるので、これを n 回適用すれば、すべての節点对の間の最短(長)経路が求められる。しかし全節点間の最短(長)経路を同時に求めるという目的に対しては、より能率の良いアルゴリズムとして Floyd 法²⁹⁾が広く用いられている。

特定の2節点 (v_i, v_n) の間の最短(長)経路を求める問題も非負抵抗回路の問題として定式化できる。最大フロー問題と同様に、グラフ G に枝 $e_0=(v_n, v_i)$ を追加して得られるグラフを \hat{G} とおく (図-24(a)参照)。枝 e_0 は値1のフロー源、すなわち図-27(d)に示される枝特性を持つものとする。また枝 e_k ; $k=1, 2, \dots, m$ の特性は、無向グラフならば同図(a)、有向



(a) e_k ; $k=1 \sim m$ の枝特性 (無向グラフの最短経路問題)
 (b) e_k ; $k=1 \sim m$ の枝特性 (有向グラフの最短経路問題)
 (c) e_k ; $k=1 \sim m$ の枝特性 (最長経路問題)
 (d) e_0 の枝特性

図-27 最短(長)経路問題の定式化

グラフならば同図(b)で表わされるものとする。このようなネットワークにおいて、 v_1 から v_n に至る最短でない経路にフローが流れたとすれば、図-27(a)あるいは(b)の枝特性を満たすようなテンションは存在しない。逆に v_1 から v_n に至る最短経路に沿って値1のフローを流せば、対応するテンションが存在することは定理4.2を用いて容易に確認できる。したがって4.2節で定義した問題PⅢの解において、フローの流れている枝を集めれば最短経路が得られる。また v_n を基準点 ($u_n=0$) としたときの v_1 の節点ポテンシャルの値 u_1 が最短経路の長さになる。

最長経路問題においては、枝 e_0 の特性を最短経路問題と同じとして、枝 e_k ; $k=1, 2, \dots, m$ (有向枝に限る) の特性が図-27(c)で表わされるものとするれば、やはり非負抵抗回路を解くことに帰着される。但し、最長経路問題が非負抵抗回路の問題として定式化できるためには、 G は有向閉路を含まない有向グラフであることが必要である。それ以外のグラフに対しては、

ダイクストラ法などのアルゴリズムを適用しても、最長経路は求められない。

参考文献

(既出分への追加)

- 25) Cederbaum, I.: Matrices all of whose elements and subdeterminants are 1, -1 or 0, J. Math. Physics. Vol. 36, No 4, p. 351 (1958).
- 26) Edmonds, J. & Karp, R.M.: Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, J. ACM, Vol. 19, p. 248 (1972).
- 27) Gabil, Z.: On the theoretical efficiency of various network flow algorithms, IBM Research Report, RC 7320 (1978).
- 28) Dijkstra, E.: A note on two problems in connection with graphs, Numerische Math., Vol. 1, p. 269 (1959).
- 29) Floyd, R.: Algorithm 97: shortest path, Comm. ACM, Vol. 5, p. 345 (1962).

(昭和54年12月14日受付)