

## $k$ 辺連結 2 部グラフの ( $k + 1$ ) 辺連結化のための高速アルゴリズム

沖 忠 親<sup>†1</sup> 田 岡 智 志<sup>†1</sup> 渡 邊 敏 正<sup>†1</sup>

2 部グラフの  $k$  辺連結化問題 (以下, UW-Bipartite- $(k + 1)$ ECA(\*, MA) と略記) は以下のように定義される: 「無向 2 部グラフ  $G = (V^+ \cup V^-, E)$  が与えられたとき, 辺追加後のグラフ  $G' = (V^+ \cup V^-, E \cup E')$  が  $(k + 1)$  辺連結 2 部グラフであるような最小の付加辺集合  $E'$  を求めよ」本稿では,  $G$  が  $k$  辺連結であるときに最適解を算出する高速アルゴリズムを提案し,  $k \in \{1, 2\}$  のとき線形時間で解けることを示す.

### A Fast Algorithm for $(k + 1)$ -Edge-Connectivity Augmentation of a $k$ -Edge-Connected Bipartite Graph

TADACHIKA OKI,<sup>†1</sup> SATOSHI TAOKA,<sup>†1</sup>  
and TOSHIMASA WATANABE<sup>†1</sup>

The  $k$ -edge-connectivity augmentation problem of bipartite graphs (UW-Bipartite- $k$ ECA(\*, MA) for short) is defined as follows: "Given an undirected bipartite graph  $G = (V^+ \cup V^-, E)$ , find a smallest set  $E'$  of edges such that  $G' = (V^+ \cup V^-, E \cup E')$  is a  $k$ -edge-connected bipartite one." In this paper we propose a fast algorithm for finding an optimum solution to UW-Bipartite- $(k + 1)$ ECA(\*, MA) when  $G$  is  $k$ -edge-connected with  $k > 0$ , and show that it can be solved in linear time for  $k \in \{1, 2\}$ .

#### 1. はじめに

$k$  辺連結化問題 (以下, UW- $k$ ECA と略記) は以下のように定義される: 「グラフ  $G = (V, E)$

が与えられたとき, 付加後のグラフ  $G' = (V, E \cup E')$  が  $k$  辺連結グラフであるような最小の付加辺集合  $E'$  を求めよ。」 UW- $k$ ECA は, 耐故障性ネットワーク構築に応用がある。また, UW- $k$ ECA において  $G$  と  $G'$  が 2 部グラフのときに, 2 部グラフの  $k$  辺連結化問題 (以下, UW-Bipartite- $k$ ECA と略記) と呼ぶ。ただし, グラフ  $G = (V, E)$  において,  $V$  を 2 つの集合 ( $V^+$  と  $V^-$  と表記) に分割したときに, 各辺  $(u, v) \in E$  が  $(u \in V^+$  かつ  $v \in V^-)$  または  $(u \in V^-$  かつ  $v \in V^+)$  となるグラフを 2 部グラフと呼ぶ (図 1 を参照)。2 部グラフを  $G = (V^+ \cup V^-, E)$  と表記することがある。UW-Bipartite- $k$ ECA は, 統計データのクロス表におけるセキュリティについての応用がある<sup>3)</sup>。

ここで, 多重辺付加を許さない辺付加問題を記述するために以下のような表現を用いる。UW-Bipartite- $k$ ECA(\*, \*\*) は, 以下の問題を表す。まず, \*が  $S$  に設定されたときには入力グラフは単純 2 部グラフとし, \*がそのままのときには入力グラフは多重 2 部グラフでも構わない。一方, \*\*が MA に設定されたときは多重辺付加を許すが, SA に設定されたときには多重辺付加を許さない。本稿の扱う問題は UW-Bipartite- $(k + 1)$ ECA(\*, MA) と表現される。

UW- $k$ ECA に対する解法が数多く提案されているが, 例えば, 文献 2) で UW-2ECA に対する線形時間解法が, 文献 7), 12) で UW- $k$ ECA に対する多項式時間解法が提案されている。また, これらの解法に基づいた 2 部グラフまたは 2 部グラフを拡張した  $r$  部グラフ ( $r \geq 2$ ) における解法が存在している。文献 3) で UW-Bipartite-2ECA(\*, MA) に対する線形時間解法が, 文献 1) で  $k$  辺連結  $r$  部グラフにおける  $\ell$  連結化問題 UW-Multipartite- $\ell$ ECA(\*, MA) ( $k, \ell, r \in \mathbb{Z}^+, k < \ell$ ) に対して  $O(|V|(|E| + |V| \log |V|) \log |V|)$  時間解法が提案されている。さらに, 文献 3) では, EREW PRAM 上での並列アルゴリズムが提案されている。

本稿では,  $G$  が  $k$  辺連結の場合の UW-Bipartite- $(k + 1)$ ECA(\*, MA) について,  $G$  の構造グラフ  $F(G)^{4), 8)}$  が与えられた場合には最適解を  $O(|V| + |E|)$  で求めることができることを示す。一般に  $F(G)$  は  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  時間で求めることができる<sup>8)</sup> ので, 提案解法の時間計算量は  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  となる。また,  $k \in \{1, 2\}$  ならば  $F(G)$  は  $O(|V| + |E|)$  で求まるので, 最適解が線形時間で求められる。なお, 提案解法は, 対応する問題については文献 1) の解法よりも高速であることを付記しておく。

#### 2. 諸 定 義

無向グラフ  $G = (V, E)$  は, 有限な空でない点集合  $V$  と辺集合  $E$  からなる。 $V, E$  をそれぞれ  $V(G), E(G)$  と表すこともある。特に断らない限り, グラフは自己閉路を持たない

<sup>†1</sup> 広島大学 大学院 工学研究科  
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

とする．2点  $u, v$  を両端とする辺を  $(u, v)$  と表す．互いに素な集合  $X, X' \subset V$  において， $(X, X'; G) = \{(u, v) \in E \mid u \in X \text{ and } v \in X'\}$  とする．ただし， $G$  が明らかな場合には， $(X, X')$  と表記することがある．また，点集合  $X \subseteq V$  に対して， $\bar{X} = \{v \in V \mid v \notin X\}$  と表し， $d_G(X) = |(X, \bar{X}; G)|$  とおく． $G$  において点  $v$  に接続している辺数を  $G$  における点  $v$  の点次数または単に次数と呼び， $d_G(v)$  と表す． $G$  の点集合対  $\{X, \bar{X}\}$  をカットと呼ぶ．表記簡略化のため，辺集合  $(X, \bar{X}; G)$  もまたカットと呼び， $|(X, \bar{X})| = k$  のときには  $k$  カットとも言う． $G$  に辺集合  $E'$  を付加して得られるグラフを  $G + E'$ ， $G$  から点集合  $X \subseteq V$  を除去して得られるグラフを  $G - X$  と表す． $E' = \{e\}$  または  $X = \{v\}$  のとき，それぞれ  $G + e$  または  $G - v$  と表す． $G - \bar{X}$  を  $G[X]$  と表し， $X$  から誘導される  $G$  の部分グラフと呼ぶ．

$G$  において，どの2点間にも道が存在するとき  $G$  は連結であるという． $G$  の極大な連結部分グラフを連結成分という．

$G = (V, E)$  を単純無向グラフとする．2点  $u, v \in V$  に対して， $\lambda(u, v; G)$  は  $G$  における  $u, v$  間の辺素な (辺を共有しない) 道の最大本数を表す (但し， $u = v$  ならば  $\lambda(u, v; G) = \infty$  とする)．このとき， $G$  の辺連結度  $\lambda(G)$  は  $\lambda(G) = \min\{\lambda(u, v; G) \mid u, v \in V\}$  と定義される． $\lambda(G) \geq k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ) なる  $G$  は  $k$  辺連結であるという． $G$  が  $k$  辺連結ならば，どのように  $k - 1$  本の辺を除去しても得られるグラフは連結である． $X \subset V$  において  $(X, V - X; G)$  が  $k$  カットとは， $|(X, V - X; G)| = k$  のときである．パスと同様な辺の列  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{r-1}, v_r)$  で， $v_0 = v_r$  かつ途中に出現する辺の重複は許す場合を閉トレイルと呼ぶ．全ての辺を一度だけ通る閉トレイルをオイラー閉トレイルとよぶ．

$Z \subseteq V$  が  $\forall u, v \in Z$  について  $\lambda(u, v; G) \geq k$  が成り立つ極大な点集合であるとき， $Z$  を  $G$  の  $k$  辺連結成分 (あるいは単に  $k$  成分) と呼ぶ．

カクタスとは無向連結グラフで任意のサイクルの対が多くとも1個の頂点を共有しているもののことである． $\lambda(G) = k$  なるグラフ  $G = (V, E)$  の構造グラフ  $F(G) = (V(F(G)), E(F(G)))$  (図2参照) とは， $G$  の全ての極小カットを表現するグラフである<sup>4),8)</sup>． $F(G)$  は  $O(V)$  個のノード (ここでは  $F(G)$  の頂点) からなる辺重み付きカクタスで，各々の木辺 ( $F(G)$  における橋) は重み  $\lambda(G)$  を持ち，各々のサイクル辺 (サイクルに含まれる辺) が重み  $\lambda(G)/2$  を持つ．特に，もし  $k$  が奇数ならば  $F(G)$  は辺重みの付いた木である． $G$  の点集合から各  $F(G)$  の点集合へ丁度一つの写像が存在するが， $F(G)$  は  $G$  から写像されない空ノードを持つこともある． $\epsilon(G) \subseteq V(F(G))$  を  $F(G)$  の全ての空ノードからなる集合とする． $G$  の任意の極小カットは，木辺が  $F(G)$  の同一サイクル内のサイクル辺の対で表現

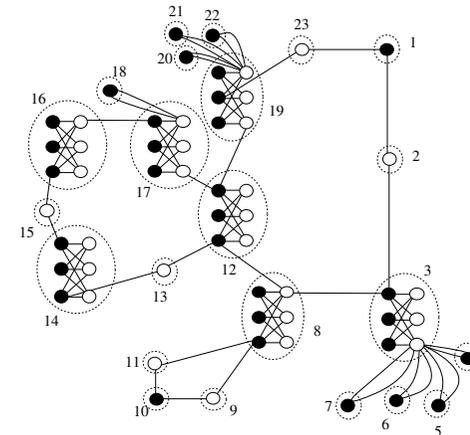


図1  $\lambda(G) = 2$  なる2部グラフ  $G = (V^+ \cup V^-, E)$ ．ただし，黒い丸 (それぞれ白い丸) は  $V^+$  ( $V^-$ ) に含まれる点を表す．また，点線で囲んだ各点集合は3成分である．

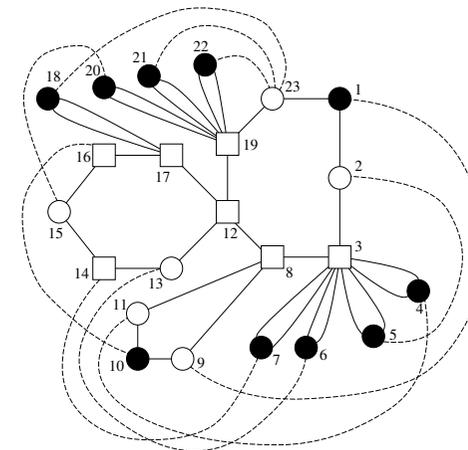


図2 図1のグラフ  $G$  における構造グラフ  $F(G)$ ． $F(G)$  上の解  $E' = \{(1, 9), (2, 5), (4, 11), (6, 13), (7, 14), (10, 16), (15, 20), (18, 23), (21, 23), (22, 23)\}$  を点線で表している

され、逆もまた言える。いま、 $\rho: V(G) \rightarrow V(F(G)) - \epsilon(G)$  でこの写像を表そう。以下のような記法を用いる。 $X \subseteq V(G)$  に対して  $\rho(X) = \{\rho(v) | v \in X\}$  for  $X \subseteq V, Y \subseteq V(F(G))$  に対して  $\rho(Y)^{-1} = \{v \in V | \rho(v) \in Y\}$ ,  $Y \subseteq V(F(G))$ 。また、 $\rho(\{v\})$ ,  $\rho^{-1}(\{v\})$  を簡単に  $\rho(v)$ ,  $\rho^{-1}(v)$  と表記する。任意のカット  $(X, V(F(G)) - X; F(G))$  に対して、もし、カットに含まれる辺重みの総和が  $k$  ならば、 $(\rho^{-1}(X), V - \rho^{-1}(X); G)$  は  $G$  の  $k$  カットである。逆に、 $G$  の任意の  $k$  カット  $(X, \bar{X}; G)$  に対して、 $F(G)$  はカット  $(Y, V(F(G)) - Y; F(G))$  に含まれる辺重み総和が  $k$  である点を持つ。ただし、 $\rho(X) = Y \subseteq V(F(G))$  とする。 $\lambda(G) = k$  のとき、 $G$  の任意の  $(k+1)$  成分  $S$  は  $F(G)$  のノード  $\rho(S) \in V(F(G)) - \epsilon(G)$  であり、逆に、任意のノード  $v \in V(F(G)) - \epsilon(G)$  に対して、 $\rho^{-1}(v)$  は  $G$  の  $(k+1)$  成分である。 $v \in V(F(G)) - \epsilon(G)$  に対して、点  $v$  に接続する辺の重み総和が  $k$  に等しいとき、 $v$  をリーフと呼ぶ。 $F(G)$  の任意のリーフ  $v$  に対して、 $\rho^{-1}(v)$  を  $G$  のリーフブロックと呼ぶ。逆に、 $G$  任意のリーフブロック  $L$  に対して、 $\rho(L)$  を  $F(G)$  のリーフと呼ぶ。 $F(G)$  のリーフの集合を  $LF(G)$  とおく。なお、 $G$  が与えられたとき  $F(G)$  は  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  時間で求めることができる<sup>8)</sup>。

もし  $F(G)$  が木辺を持つときには、各々の木辺（重みは  $\lambda(G)$ ）を多重辺（各多重辺の重みは  $\lambda(G)/2$ ）の対で置き換え、この多重辺対を長さ 2 のサイクルとして取り扱うことにする。このようなグラフを修正カクタスと呼び、本稿では特に注意することなく  $F(G)$  はすべて修正カクタスとする。修正カクタス  $F(G)$  は  $G$  の構造グラフであり、 $\lambda(F(G)) = 2$  であることに注意されたい。

2 部グラフ  $G = (V^+ \cup V^-, E)$  の構造グラフ  $F(G)$  は、 $V^+$  と  $V^-$  を区別することなく定義する。2 部グラフ  $G = (V^+ \cup V^-, E)$  の構造グラフ  $F(G)$  において、 $F(G)$  の各点  $v$  を以下の 3 種類に分類する: (i)  $\rho^{-1}(v) \subseteq V^+$  ( $v$  を黒点と呼ぶ), (ii)  $\rho^{-1}(v) \subseteq V^-$  ( $v$  を白点と呼ぶ), (iii)  $\rho^{-1}(v) \cap V^+ \neq \emptyset$  かつ  $\rho^{-1}(v) \cap V^- \neq \emptyset$  ( $v$  を混合点と呼ぶ)。  $G$  についても同様に、 $V^+$  (それぞれ  $V^-$ ) の各点を黒点 (白点) と呼ぶ。 $LF(G)$  の各リーフ  $v$  についてもそれぞれ、黒リーフ、白リーフ、混合リーフと呼び、各々の集合を  $B(G)$ ,  $W(G)$ ,  $H(G)$  と表す。なお、 $G$  が明らかな時は " $G$ " を省略する。

本稿の図では、 $F(G)$  の混合点を四角で、黒点や白点はそれぞれ黒丸、白丸で表す (図 2 参照)。本稿では、一般性を失うことなく  $V^+ \neq \emptyset$ ,  $V^- \neq \emptyset$  かつ  $|B(G)| \geq |W(G)|$  と仮定する。 $F(G)$  において  $|B| > |W| + |H|$  が成り立つとき、 $F(G)$  は  $B$ -支配<sup>3)</sup> と呼ぶ。

### 3. 解の下界と存在性

本節では、最適解の下界について考える。UW-Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) は UW-Multipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) の特殊な場合であり文献 1) で示されている下界についての定理を UW-Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) に対して適用すると以下の命題を得る。

命題 3.1  $|B(G)| \leq |W(G)|$  なる  $k$  辺連結 2 部グラフ  $G$  を  $(k+1)$  辺連結化するために必要な辺の本数は、次の (1), (2) である。

(1)  $F(G)$  において多重辺の両端を 1 点に縮約 (自己ループは除去する) 操作を可能な限り行った後のグラフが、黒リーフと白リーフが交互に並ぶ長さ 4 のサイクル (図 3) となるならば 3 本である。(2) それ以外のときは、 $\max\{|B(G)|, \lceil |LF(G)|/2 \rceil\}$  本である。

次節で提案する解法は UW-Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) の解として命題 3.1 の下界に等しい付加辺集合を求めるとすなわち、提案解法が最適解を求めることが示される。

### 4. 提案解法

本節では、 $\lambda(G) = k$  の場合の UW-Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) に対する解法を示す。

まず、提案解法の概要を示す。構造グラフ  $F(G)$  は修正カクタスであり、 $\lambda(F(G)) = 2$  である。構造グラフの性質から、 $F(G)$  に対する UW-Bipartite-3ECA(\*, MA) を考えることがポイントとなる。(文献 5), 9) 参照)。この解を  $F(G)$  上の解と呼ぶ。なお、 $\lambda(G)$  が奇数ならば  $F(G)$  は木になるが、本論文では、議論を簡素にするため各橋を 2 本の多重辺で置き換えた修正カクタスで議論する。解を求める場合の着目点は、付加辺数の最小化と共に辺付加後に 2 部グラフであることが保証されることである。付加辺数最小化の観点からは  $F(G)$  上の解に含まれる付加辺  $(u, v)$  については、 $u$  と  $v$  両方がいずれもリーフであることが基本であるが、ただし、 $u$  と  $v$  のいずれかが 1 つがリーフでない場合もあり得る。一方、2 部グラフを維持する観点からは、黒点と白点を結ぶ辺付加が望ましい。ここで、混合リーフは黒リーフまたは白リーフとして扱うことが可能なので、混合リーフを白リーフまたは黒リーフに適宜変更して、黒リーフ数と白リーフ数の差をできる限り小さくし、両端が黒リーフと白リーフである付加辺を 1 本ずつ求め、リーフの数を減らすことを繰り返す。ただし、 $F(G)$  が  $B$ -支配であるときには未操作の白リーフがなくなることが発生し、そのときには、操作していない黒リーフを両端点とする付加辺を求めて、解として追加してゆく。最後に、求めた  $F(G)$  上の解に対応する  $G$  上の解を求める。

次に、文献 9) で提案されている修正カクタス  $F(G)$  に対する特別な先行順について説明

する．まず，それぞれのサイクルに異なる色を彩色する．すなわち，1 番目，2 番目，... と各サイクルに番号を付けることで，一つのサイクル内の辺は同一の色をつける．この「色」は黒点や白点等の色とは別で，サイクル識別用番号であることに注意されたい．このような彩色は深さ優先探索を利用して  $O(|V| + |E|)$  時間で行える．

( $F(G)$  に対する特別な先行順) 深さ優先探索を任意の点から以下の規則に従って行う：もし，ある点  $u$  がそのサイクルの辺 (そのサイクル辺の色を赤とする) を通じて最初に探索されたならば， $u$  に接続する他の赤い辺を探索する前に，それ以外の  $u$  に接続するすべての辺を探索する．この探索では各点  $v$  に 1 から先行順  $\beta(v)$  を割り当てる．ただし，議論を簡単にするために， $\beta$  の値  $|V(F(G))|$  と 1 は連続するものとする．ここで， $F(G)$  上で  $\beta(v)$  が 1 から大きい方へ順に辿ることでオイラー閉トレイルが定まることに注意されたい．

以下に提案解法の詳細を示す．

**Algorithm** Sol\_UW-Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA)

Input:  $k$  辺連結 2 部グラフ  $G$

Output:  $G$  を  $(k+1)$  辺連結にする辺集合  $E_f$

1. 構造グラフ  $F(G) = (V(F(G)), E(F(G)))$  を求める．
2.  $LF(G)$  の各リーフ  $v$  に対して特別な先行順  $\beta(v)$  を求める．
3.  $E' \leftarrow \emptyset$  とする． $B \leftarrow$  黒リーフ集合 ( $W \leftarrow$  白リーフ集合,  $H \leftarrow$  混合リーフ集合) とする．
4.  $H \neq \emptyset$  (混合リーフが存在) かつ  $|B| > \lceil (|B| + |W| + |H|)/2 \rceil$  ならば， $W \leftarrow W \cup H$  とする (全ての混合リーフを白に塗り替える)．
5.  $H \neq \emptyset$  かつ  $|B| \leq \lceil (|B| + |W| + |H|)/2 \rceil$  ならば，任意に選択した  $\lfloor (|H| + |W| - |B|)/2 \rfloor$  個の混合リーフを  $W$  に加え (白に塗り替え)，残りを  $B$  に加える (黒に塗り替える)．更新後には， $|H| + |W| - |B|$  が偶数のとき  $|B| = |W|$ ，奇数のときは  $|B| = |W| + 1$  となる．
6.  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W \neq \emptyset$  なる間，次の操作を繰り返す：  
 $|B| = |W| = 3$  の場合は補題 4.6，それ以外は補題 4.5 により黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  を選び， $E' \leftarrow E' \cup \{(b, w)\}$ ， $B \leftarrow B - \{b\}$ ， $W \leftarrow W - \{w\}$  とする．
7.  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W = \emptyset$  なる間，次の操作を繰り返す：  
補題 4.7 の黒リーフ  $b$  と，白点または混合点である  $w$  を定め， $E' \leftarrow E' \cup \{(b, w)\}$ ， $B \leftarrow B - \{b\}$  とする．
8.  $|B \cup W| = 4$  ならば補題 4.3， $|B \cup W| = 3$  ならば補題 4.2， $|B \cup W| = 2$  ならば補題

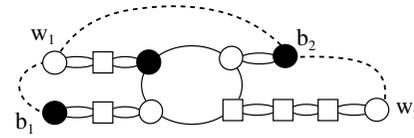


図 3 補題 4.3 の説明図．ただし，破線の辺集合は最適解

4.1 により付加辺集合  $E''$  を求め， $E''$  を  $E'$  に加える．

9.  $E_f = \{(n_b, n_w) \mid (b, w) \in E'\}$  を出力する．ただし， $b$  は  $F(G)$  の黒リーフとし， $w$  は白リーフ，白点または混合点とし， $n_b$  は  $\rho^{-1}(b)$  内の任意の黒点および， $n_w$  は  $\rho^{-1}(w)$  内の任意の白点とする． □

#### 4.1 解法の正当性

以下の補題，定理を利用し解法の正当性を示す．

$G$  が 2 部グラフであることから次の性質が成り立つ．

性質 4.1  $LF(G)$  のリーフ  $v$  が黒リーフまたは白リーフのどちらかならば  $|\rho^{-1}(v)| = 1$  である．

以下では， $F(G)$  上の付加辺について考える． $|B \cup W| \leq 4$  ならば，次の補題 4.1 ~ 4.3 が成り立つ．これらは提案解法の Step 8 で用いる，(紙面の都合で証明は省略する．)

補題 4.1  $F(G)$  において， $|B \cup W| = 2$  と仮定する． $|W| = 0$  ならば  $|E''| = |B| = 2$ ， $|B| = |W| = 1$  ならば  $|E''| = 1$  を満たす  $F(G)$  上の解  $E''$  が存在する．

補題 4.2  $F(G)$  において， $|B \cup W| = 3$  と仮定する． $|W| = 0$  ならば  $|E''| = |B| = 3$ ， $|W| = 1$  ならば  $|E''| = 2$  を満たす  $F(G)$  上の解  $E''$  が存在する．

補題 4.3  $F(G)$  において， $|B \cup W| = 4$  と仮定する．

- (1)  $|W| \leq 1$  ならば  $|E''| = |B|$  を満たす  $F(G)$  上の解  $E''$  が存在する．
  - (2)  $|B| = |W| = 2$  とする． $F(G)$  に対して多重辺の両端を 1 点に縮約する操作 (自己ループは除去する) を可能な限り行う．
    - (i) その結果グラフが黒リーフと白リーフが交互に登場する長さ 4 のサイクル (図 3 参照) に変形できるならば  $|E''| = 3$ ，
    - (ii) そうでないならば  $|E''| = 2$ ，
- である  $F(G)$  上の解  $E''$  が存在する．

次に， $|B \cup W| \geq 5$  なる場合について考える．まず，2 部グラフとは限らないグラフ  $G$  の構造グラフ  $F(G)$  について，付加辺を求める際に有用な補題を示す．

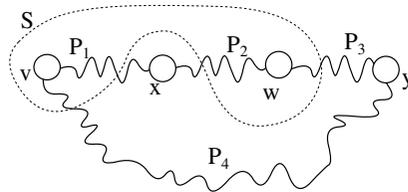


図4 補題 4.4 の説明図

補題 4.4 グラフ  $G$  の構造グラフ  $F(G)$  について,  $|LF(G)| \geq 4$  と仮定する. そのとき, 任意の 4 つのリーフ  $v, w, x, y$  において  $\beta(v) < \beta(x) < \beta(w) < \beta(y)$  を満たす異なる 4 つのリーフ  $v, w, x, y$  が存在するならば  $F(G \cup \{(n_v, n_w)\})$  および  $F(G \cup \{(n_x, n_y)\})$  のリーフ数は  $F(G)$  のものより 2 小さくなるような, 4 点  $n_v, n_w, n_x, n_y \in V(G)$  を選ぶことができる. ここで,  $a \in \{v, w, x, y\}$  とするとき  $n_a$  は  $\rho^{-1}(a)$  内の任意の点とすることができる. (証明) 各点  $v \in V(F(G))$  に与えた  $\beta(v)$  により  $F(G)$  上でオイラー閉トレイルを求めることができる. そのオイラー閉トレイルを,  $v$  と  $x$ ,  $x$  と  $w$ ,  $w$  と  $y$ , および  $y$  と  $v$ , それぞれを端点とする部分パス  $P_1, P_2, P_3$  および  $P_4$  に分割する (図 4 参照). オイラー閉トレイルを分割したもので,  $P_i$  と  $P_j (1 \leq i, j \leq 4, i \neq j)$  は  $F(G)$  上での辺素なパスである. 次に,  $F(G \cup \{(n_v, n_w)\})$  のリーフ数について考える.  $\{v, w\} \subseteq S$  かつ  $\{x, y\} \subseteq V - S$  なる任意の集合  $S \subset V(F(G))$  について考える.  $P_i (1 \leq i \leq 4)$  の存在から  $d_{F(G)}(S) \geq 4$  となり,  $F(G)$  において  $(S, \bar{S})$  は 2 カットではない. 構造グラフの性質から,  $(\rho^{-1}(S), \rho^{-1}(\bar{S}))$  は  $G$  の最小カットではない. よって,  $G \cup \{(n_v, n_w)\}$  において  $n_v$  と  $n_w$  は 1 つの  $k$  成分  $S'$  に含まれるが,  $S'$  は  $G$  のリーフブロックにはならない. 以上から,  $F(G \cup \{(n_v, n_w)\})$  では  $F(G)$  の 2 つのリーフ  $v$  と  $w$  が消滅し, 新しくリーフが生成されることはない.  $F(G \cup \{(n_x, n_y)\})$  についても同様に示すことができる. □

アルゴリズム Sol\_UW\_Bipartite- $(k+1)$ ECA(\*, MA) の Step 6 における, 黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  に関する 2 つの補題を示す.

補題 4.5 Step 6 で  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W \neq \emptyset$  とする. このとき,  $F(G \cup \{(n_b, n_w)\})$  のリーフ数が  $F(G)$  のものより 2 小さくなる  $F(G)$  の黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  が存在する. ただし,  $n_b$  (それぞれ  $n_w$ ) は  $\rho^{-1}(b)$  ( $\rho^{-1}(w)$ ) 内の任意の黒点 (白点) とする. (証明)  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W \neq \emptyset$  なので, (1) 2 つの黒リーフ  $b_1, b_2$  と 2 つの白リーフ  $w_1, w_2$ , または (2) 3 つの黒リーフ  $b_1, b_2, b_3$  と白リーフ  $w$  が存在する. (1) の場合  $\beta$  の昇順に並べたとき 6 通り, (2) の場合 4 通りの並べ方がある. いずれの場合にも, 補題 4.4 を満

たす  $w$  と  $b \in \{b_1, b_2, b_3\}$  を定めることができる. よって,  $F(G \cup \{(n_b, n_w)\})$  のリーフ数を  $F(G)$  のものより 2 だけ小さくできる. □

補題 4.6 Step 6 で  $|B| = |W| = 3$  とする. 次の (1) と (2) を共に満たす  $F(G)$  の黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  が存在する. (1)  $F(G \cup \{(n_b, n_w)\})$  のリーフ数が  $F(G)$  のものより 2 小さくなる. ただし,  $n_b$  (それぞれ  $n_w$ ) は  $\rho^{-1}(b)$  ( $\rho^{-1}(w)$ ) 内の任意の黒点 (白点) とする. (2)  $b$  と  $w$  以外の, 任意の 2 つの黒リーフと 2 つの白リーフについて,  $\beta$  の値で昇順に並び替えた場合にこれらが交互に並ぶことはない.

(証明)  $B = \{b_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$  かつ  $W = \{w_i \mid 1 \leq i \leq 3\}$  とし, 一般性を失うことなく,  $\beta(b_1) < \beta(b_2) < \beta(b_3)$  かつ  $\beta(w_1) < \beta(w_2) < \beta(w_3)$  と仮定する. これら 6 つのリーフを  $\beta$  の値で昇順に並べたとき, 20 通りの並べ方がある.  $\beta$  の値が最も小さいリーフを上記 (1) の  $b$  または  $w$  のいずれかとして選ぶものとする. まず,  $\beta(b_1)$  の値が最も小さいとする. このとき,  $\beta(b_1) < \beta(w_1) < \beta(b_2) < \beta(w_2) < \beta(w_3) < \beta(b_3)$  の場合のみ, (2) の条件を満たす (つまり,  $b = b_1$  と  $w$  以外の残った 4 つのリーフの色が交互に並ばないように)  $w$  を選択できない. この場合には,  $w_1$  と  $b_3$  をそれぞれ  $w$  と  $b$  として選べば, (それぞれ補題 4.4 の  $x$  と  $y$  になる). 一方,  $\beta(w_1)$  が最も小さい場合,  $\beta(w_1) < \beta(b_1) < \beta(w_2) < \beta(b_2) < \beta(b_3) < \beta(w_3)$  の場合のみ, (2) の条件を満たす  $b$  を選択することができないが, このときには,  $b_1$  と  $w_3$  をそれぞれ  $b$  と  $w$  として選べば, それぞれ補題 4.4 の  $x$  と  $y$  になる. □

次に, 同様に Step 7 の黒リーフ  $b$  と, 白点または混合点  $w$  に関する補題を示す.

補題 4.7 Step 7 で  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W = \emptyset$  とする. このとき,  $F(G)$  において,  $F(G \cup \{(n_b, n_w)\})$  のリーフ数が  $F(G)$  のものより 1 小さくなる黒リーフ  $b$  と, 白点または混合点  $w$  が存在する. ただし,  $n_b$  (それぞれ  $n_w$ ) は  $\rho^{-1}(b)$  ( $\rho^{-1}(w)$ ) 内の任意の黒点 (白点) とする.

(証明) まず, 提案解法の Step 6 で, はじめて  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W = \emptyset$  となる場合を考える. このとき, Step 6 で, 同数の黒リーフと白リーフがそれぞれ  $B$  と  $W$  から削除され, それでも  $|B| > |W| + 4$  なので, ここまでに Step 5 は実行されていない (すなわち,  $H$  の点を  $W$  に入れることは行っていない) ことに注意されたい. よって, Step 7 を実行する直前の  $B$  に含まれる点はすべて  $LF(G)$  の黒リーフである.

$|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W = \emptyset$  なので  $\beta(b) < \beta(x) < \beta(b') < \beta(y)$  なる 4 つの黒リーフ  $b, x, b', y$  が存在する. 補題 4.4 の証明より,  $\{b, b'\} \subseteq S$  かつ  $\{x, y\} \subseteq V - S$  なる任意の点集合  $S \subset V(F(G))$  は  $d_{F(G)}(S) > 2$  となる.

$b'$  が黒リーフなので,  $d_{F(G)}(b') = 2$  であり,  $b'$  に隣接する点は白点または混合点であ

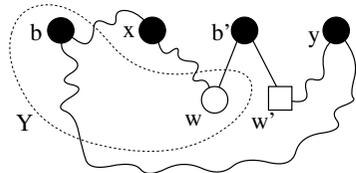


図5 補題 4.7 の説明図 .  $w' \in Y$  (この場合、 $w = w'$  となる) でも良い

る . これらを  $w, w'$  とおく ( $w = w'$  でもよい) . ここで ,  $G' = G \cup \{(n_b, n_w)\}$  において ,  $n_b$  と  $n_w$  を含む  $k$  成分を  $Y'$  とするが , いま ,  $Y'$  がリーフブロックになったと仮定して矛盾を導く .  $F(G)$  の点集合  $Y = \rho(Y')$  について考える . 仮定から ,  $d_{F(G)}(Y) = 2$  である . また ,  $F(G) \cup \{(b, w)\}$  において  $Y$  は 3 成分となり ,  $\{b', x, y\} \cap Y = \emptyset$  である . しかし ,  $F(G)$  には  $b, x, b', y$  を含むオイラー閉トレイルが存在し , 2 辺  $(b', w), (b', w')$  を含む . よって ,  $d_{F(G)}(Y) \geq 4$  であり , 矛盾である . 以上より ,  $Y$  はリーフブロックではなく ,  $F(G \cup \{n_b, n_w\})$  ではリーフ数が 1 だけ減少している . □

補題 4.1 ~ 4.7 より以下の定理を得る .

**定理 4.1** *Sol-Bipartite-(k+1)ECA(\*, MA)* により ,  $\lambda(G) = k$  なる任意の 2 部グラフ  $G$  に対して ,  $\max\{|B|, \lceil |LF(G)|/2 \rceil\}$  本の辺の付加により  $(k+1)$  辺連結化できる .

(証明) Step 6 を実行したとすると , この各 Step で  $LF(G)$  のリーフを 2 つ消去する付加辺  $(b, w)$  が求められる . Step 7 を実行したとすると , この各 Step で  $LF(G)$  のリーフを 1 つ消去する付加辺  $(b, w)$  が求められる .

(i)  $|B(G) \cup W(G) \cup H(G)| > 5$  , かつ Step 6 の直前で  $|B| = |W|$  である場合 . このとき Step 7 を実行することはない .  $|B| = |W| > 3$  の間 , 補題 4.5 を満たす黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  を選択することができる . さらに ,  $|B| = |W| = 3$  においても補題 4.6 を満たす黒リーフ  $b$  と白リーフ  $w$  を選択できる .

次に , Step 8 の実行直前の状況を考える . この時の  $B$  と  $W$  をそれぞれ  $B'$  と  $W'$  とおくと ,  $|B'| = |W'| = 2$  である . また , この時点での  $E'$  に対して  $E'_1 = \{(n_b, n_w) \mid (b, w) \in E'\}$  とおく . ただし ,  $n_b$  (それぞれ  $n_w$ ) は  $\rho^{-1}(b)$  ( $\rho^{-1}(w)$ ) 内の任意の黒点 (白点) とする . ここまでの操作から ,  $F(G \cup E'_1)$  には , 4 つのリーフ  $b_1, b_2, w_1, w_2$  が存在し , これらすべて  $B', W'$  のリーフと対応している . 補題 4.6 より , これら 4 つのリーフを  $\beta$  の値で昇順に並び替えても交互に並ぶことはない . つまり ,  $F(G \cup E'_1)$  は図 3 に示すような構造グラフにはならない . よって , 補題 4.3(3) から  $|E''| = 2$  を満たす  $F(G)$  上の解  $E''$  が存在する . 最

終的に ,  $|E_f| = |LF(G)|/2$  となり , 定理 3.1 から ,  $E_f$  は  $G$  の最適解となる .

(ii)  $|B(G) \cup W(G) \cup H(G)| > 5$  , かつ Step 6 の直前で  $|B| > |W|$  である場合 . Step 6 の直後では , 次の (a) ~ (d) のいずれかをみたく .

(a)  $|B| > 4$  かつ  $|W| = 0$ ; (b)  $|B| = 4$  かつ  $|W| = 0$ ; (c)  $|B| = 3$  かつ  $0 \leq |W| \leq 1$ ; または (d)  $|B| = 2$  かつ  $|W| = 1$  .

この時の構造グラフを  $F(G')$  ,  $B$  と  $W$  それぞれを  $B'$  と  $W'$  とおく . (a) の場合のみ , Step 7 を繰り返し実行し ,  $(|B'| - 4)$  本の付加辺を求め , かつ , Step 7 の直後は  $|B| = 4$  となる . 補題 4.3 より , Step 8 で 4 本の付加辺を求める . Step 6 で  $(|B(G)| - |B'|)$  本の付加辺を求めているので , 最終的に ,  $|E_f| = |B(G)|$  となる . また , (b) ~ (d) については , いずれも Step 8 で  $|B'|$  本の付加辺を求めるので , 最終的に ,  $|E_f| = |B(G)|$  となる . 図 2 に示す解  $E'$  については ,  $E' - \{(18, 23), (21, 23), (22, 23)\}$  の各辺は Step 6 で ,  $\{(18, 23), (21, 23), (22, 23)\}$  の各辺は Step 8 で求めている .

(iii)  $|B(G) \cup W(G) \cup H(G)| \leq 4$  の場合 . この場合は , 補題 4.1 ~ 4.3 より ,  $|E_f| = \max\{|B(G)|, \lceil |LF(G)|/2 \rceil\}$  となる . □

#### 4.2 計算量

まず , *Sol-UW-Bipartite-(k+1)ECA(\*, MA)* の Step 6 と Step 7 それぞれの繰り返しで求められる付加辺  $(b, w)$  すべてを , 線形時間で得る方法について議論する .

Step 6 の実行直前の  $B$  と  $W$  を ,  $\beta$  の値で昇順に並べた 2 つの線形リストを作る (Step 4 または Step 5 では ,  $H(G)$  の点は  $B$  あるいは  $W$  のいずれかに入っている) . リーフ  $v$  に対応するリストの要素には ,  $\beta(v)$  の値と  $v$  が黒リーフまたは白リーフのいずれかであることを情報を蓄える . そして , 3 つのポインタ変数  $top, top\_b, top\_w$  を用意する .  $top.\beta$  (それぞれ  $top.color, top.next$ ) で ,  $top$  が指す要素の  $\beta$  の値 (色 , 次の要素へのポインタ) を表す . ポインタ値とリーフを同一視する . つまり ,  $top.next$  が指す要素がリーフ  $v$  を表す (リストの) 要素の場合 ,  $top.next$  で  $v$  を表す .

Step 6 と Step 7 の詳細な記述を以下に示す .  $top$  には ,  $B \cup W$  の中で  $\beta$  の値が最小のリーフに対応する要素へのポインタ値を ,  $top\_b$  (それぞれ  $top\_w$ ) には ,  $B$  ( $W$ ) に属するリーフの中で  $top$  に対応するリーフと異なり , かつ ,  $\beta$  が最小の値を持つものを表す (リストの) 要素へのポインタ値を保持する . ただし ,  $W = \emptyset$  ならば  $top\_w \leftarrow nil$  とする . なお ,  $top, top\_b, top\_w$  には , 以下の記述の第 1 行でこのようなポインタ値を蓄えていることに注意されたい .

/\* Step 6 \*/

```

1. while  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W \neq \emptyset$  do
  begin
  if  $|B| = |W| = 3$  then
     $b$  と  $w$  を補題 4.6 のリーフとする;
  else if top.color は黒 then
2.   if  $|W| = 1$  then 補題 4.5 の証明と同様に黒リーフ
         $b$  と白リーフ  $w$  を定め、リストから  $b$  を除く;

  else if  $top\_b.\beta > top\_w.\beta$  then
    begin /* Line 2 により  $top\_w.next \neq nil$  */
     $b \leftarrow top$ ;  $w \leftarrow top\_w.next$ ;
     $top \leftarrow top\_w$ ;  $top\_w \leftarrow top\_w.next.next$ ;
    end
  else /*  $top\_b.\beta < top\_w.\beta$  */
    begin
     $b \leftarrow top$ ;  $w \leftarrow top\_w$ ;  $top \leftarrow top\_b$ ;
     $top\_b \leftarrow top\_b.next$ ;  $top\_w \leftarrow top\_w.next$ ;
    end
  else /* top.color は白 */
    if  $top\_b.\beta > top\_w.\beta$  then
      begin
       $b \leftarrow top\_b$ ;  $w \leftarrow top$ ;  $top \leftarrow top\_w$ ;
       $top\_w \leftarrow top\_w.next$ ;  $top\_b \leftarrow top\_b.next$ ;
      end
    else /*  $top\_b.\beta < top\_w.\beta$  */
      begin
       $b \leftarrow top\_b.next$ ;  $w \leftarrow top$ ;
       $top \leftarrow top\_b$ ;  $top\_b \leftarrow top\_b.next.next$ ;
      end
    end
   $E' \leftarrow E' \cup \{(b, w)\}$ ;  $B \leftarrow B - \{b\}$ ;  $W \leftarrow W - \{w\}$ 

```

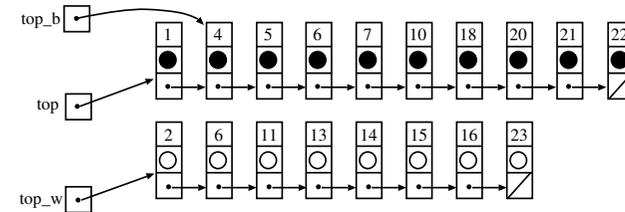


図 6 Step 6 の実行前のデータ構造 . 黒 (それぞれ白) リーフは ( ) のついたノードで表現している .

end

/\* Step 7 \*/

```

3. top ← B の線形リストの先頭要素へのポインタ;
  while  $|B \cup W| \geq 5$  かつ  $W = \emptyset$  do
  begin
   $b \leftarrow top$ ;  $w \leftarrow F(G)$  で  $top.next.next$  に隣接する 1 点;
   $top \leftarrow top.next$ ;
   $E' \leftarrow E' \cup \{(b, w)\}$ ;  $B \leftarrow B - \{b\}$ ;
  end

```

□

上記の操作は  $O(|V|)$  時間で終了する . 構造グラフは  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  時間で求められる<sup>8)</sup> . また,  $\lambda(G) \in \{1, 2\}$  の場合, すべての  $k$  成分は線形時間で求められる<sup>6),10),11)</sup> ので構造グラフも線形時間で求められる . 以上から, 以下の定理を得る .

**定理 4.2**  $Sol_{UW-Bipartite-(k+1)ECA(*, MA)}$  は,  $k = \lambda(G)$  である UW-Bipartite- $(k+1)ECA(*, MA)$  の最適解を  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  時間で求める . さらに,  $k \in \{1, 2\}$  のときは  $O(|V| + |E|)$  時間で求める .

## 5. おわりに

本稿では, UW-Bipartite- $(k+1)ECA(*, MA)$  に対して,  $O(|V||E| + |V|^2 \log |V|)$  時間で最適解を算出するアルゴリズムについて報告した . 加えて,  $k \in \{1, 2\}$  のときには線形時間で解けることを示した .

## 謝 辞

本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究(C)(No. 20500015)の援助を受けた。記して謝辞を表す。

## 参 考 文 献

- 1) J.Bang-Jensen, H.N. Gabow, and T.Jordán. Edge-connectivity augmentation with partition constraints. *SIAM J. Discrete Mathematics*, Vol.12, No.2, pp. 160–207, 1999.
- 2) K.P. Eswaran and R.E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM J. Comput.*, Vol.5, pp. 653–655, 1976.
- 3) P. C. Huang, H. W. Wei, W. C. Lu, W. K. Shih, and T. Hsu. Smallest bipartite bridge-connectivity augmentation. *Algorithmica*, Vol.54, No.3, pp. 353–378, 2009.
- 4) A. V. Karzanov and E. A. Timofeev. Efficient algorithm for finding all minimal edge cuts of a nonoriented graph. *Cybernetics*, pp. 156–162, March-April 1986. Translated from *Kibernetika*, 2 (1986), 8–12.
- 5) T. Mashima, S. Taoka, and T. Watanabe. A 2-approximation algorithm to  $(k+1)$ -edge-connect a specified set of vertices in a  $k$ -edge-connected graph. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E88-A, No.5, pp. 1290–1300, May 2005.
- 6) H. Nagamochi and T. Ibaraki. A linear time algorithm for computing 3-edge-connected components in a multigraph. *Japan J. Industrial and Applied Math.*, Vol.9, No.7, pp. 163–180, 1992.
- 7) H. Nagamochi, S. Nakamura, and T. Ibaraki. A simplified  $\tilde{O}(nm)$  time edge-splitting algorithm in undirected graphs. *Algorithmica*, Vol.26, pp. 50–57, 2000.
- 8) H. Nagamochi, S. Nakamura, and T. Ishii. Constructing a cactus for minimum cuts of a graph in  $O(mn + n^2 \log n)$  time and  $O(m)$  space. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E86-D, No.2, pp. 179–185, 2003.
- 9) Dalit Naor, Dan Gusfield, and Charles Martel. A fast algorithm for optimally increasing the edge connectivity. *SIAM J. Comput.*, Vol.26, No.4, pp. 1139–1165, August 1997.
- 10) S. Taoka, T. Watanabe, and K. Onaga. A linear-time algorithm for computing all 3-edge-connected components of an multigraph. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E75-A, No.3, pp. 410–424, 1992.
- 11) R. E. Tarjan. A note on finding the bridges of a graph. *Information Processing Letters*, Vol.2, pp. 160–161, 1974.
- 12) T. Watanabe and A. Nakamura. Edge-connectivity augmentation problems. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol.35, No.1, pp. 96–144, 1987.