Vol.2010-AL-129 No.4
2010/3/5

直径 d 部分グラフ最大化問題の近似について

三溝和明[†1]　朝廣雄一[†2]　宮野英次[†1]

本稿では直径 d 部分グラフ最大化問題 (MaxDBS 問題) について考察する．MaxDBS 問題の目的は，入力グラフ G と整数 $d \geq 1$ に対して，直径 d である最大部分グラフを G 中から見つけることである．MaxDBS 問題は，$d = 1$ の場合，よく知られた最大クリーク問題と同一であるので，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下で，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似度の近似アルゴリズムは存在しない．また $d \geq 2$ に対しては，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1/3-\varepsilon}$ よりも良い近似度の近似アルゴリズムは存在しないことが知られていた．まず本稿では，この結果を改善し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1/2-\varepsilon}$ よりも良い近似度の近似アルゴリズムは存在しないことを示す．また，d が偶数の場合には $n^{1/2}$-近似アルゴリズム，d が 3 以上の奇数の場合には $n^{2/3}$-近似アルゴリズムが存在することを示す．さらに，弦グラフ，スプリットグラフ，区間グラフ，k 部グラフといった制限された入力に対する近似可能性と近似困難性について考察する．

On Approximation of Max d-Diameter Sugraphs

Kazuaki Samizo,[†1] Yuichi Asahiro[†2]
and Eiji Miyano [†1]

The maximum diameter-bounded subgraph problem (MaxDBS for short) is defined as follows: Given an n-vertex graph G and a fixed integer $d \geq 1$, we are asked to find the largest subgraph of the diameter d in G. If $d = 1$, the problem is identical to the well known maximum clique problem and thus it is $\mathcal{NP}$-hard to approximate MaxDBS to within a factor of $n^{1-\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$. Also, it is known to be $\mathcal{NP}$-hard to approximate MaxDBS to within a factor of $n^{1/3-\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$ and a fixed $d \geq 2$. In this paper, we first strengthen this hardness result; we prove that, for any $\varepsilon > 0$ and a fixed $d \geq 2$, it is $\mathcal{NP}$-hard to approximate MaxDBS to within a factor of $n^{1/2-\varepsilon}$. Then, we show that a simple polynomial-time algorithm achieves an approximation ratio of $n^{1/2}$ for any even $d \geq 2$, and an approximation ratio of $n^{2/3}$ for any odd $d \geq 3$. Furthermore, the (in)tractability and the (in)approximability of MaxDBS on subclasses of graphs are discussed for chordal graphs, split graphs, interval graphs, and k-partite graphs.

1. はじめに

MaxClique 問題はグラフにおける組合せ最適化問題として有名なものの 1 つであり，多くの研究が行なわれている[4)]: クリークとは，任意の頂点間が隣接しているグラフのことで，その直径は 1 である．グラフ G が与えられたとき，MaxClique 問題の目的は，G 中の最大クリークを見つけることである．MaxClique 問題の判定版は，Karp が示した最初の 21 個の $\mathcal{NP}$-完全問題の 1 つである[11)]．MaxClique 問題に対して最良の多項式時間近似アルゴリズムは，最適解の $n(\log\log n)^2/(\log n)^3$ 分の 1 程度の解なら見つけることができる[6)](近似度が $n(\log\log n)^2/(\log n)^3$ であるという)．ここで n は入力グラフの頂点数である．一方，$\mathcal{NP} \neq \mathcal{ZPP}$ という仮定のもとで，Bellare らは MaxClique 問題には $n^{1/3-\varepsilon}$ よりも良い近似度を持つ多項式時間アルゴリズムは存在しないことを示した[3)]．ここで ε は任意の正数である．また，Håstad は同じ仮定のもとで，$n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似度を持つアルゴリズムは存在しないことを示した[10)]．ここで，$\mathcal{NP} \neq \mathcal{ZPP}$ ではなく，少し弱い $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ を仮定すると，この近似度の下界は $n^{1/2-\varepsilon}$ になる．既知の最も高い下界は，Zuckerman により示されており，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ という仮定の下での $n^{1-\varepsilon}$ である [15)]．ここで，ε は，上と同様に任意の正数である．

本稿では MaxClique 問題の自然な拡張である，直径 d 部分グラフ最大化問題 (MaxDBS 問題) について議論する．MaxDBS 問題においては，グラフ G と整数 $d \geq 1$ が入力として与えられ，直径 d である最大の部分グラフを探すことを目的とする．$d = 1$ の場合は，MaxDBS 問題は正確に MaxClique 問題と同じ問題であり，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下では任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似度を持つアルゴリズムは存在しないことになる．さらに，$d \geq 2$ である場合にも，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n^{1/3-\varepsilon}$ よりも良い近似度の解を 求めることは $\mathcal{NP}$-困難であることが Marinček らによって示されている[12)⋆1]．本稿では，まずこの $d \geq 2$ に対する近似度の下界を強める．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n^{1/2-\varepsilon}$ よりも良い近似度の解を一般のグラフに対して求めることが $\mathcal{NP}$-困難であることを示す．

†1 九州工業大学大学院情報工学研究院
Department of Systems Design and Informatics, Kyushu Institute of Technology
†2 九州産業大学情報科学部
Department of Information Science, Kyushu Sangyo University

⋆1 元々の証明では $\mathcal{NP} \neq \mathcal{ZPP}$ が仮定されている．

Vol.2010-AL-129 No.4
2010/3/5

そして，偶数 $d \geq 2$ に対しては近似度が $n^{1/2}$ であるようなアルゴリズム，3 以上の奇数である d に対しては近似度が $n^{2/3}$ であるようなアルゴリズムを提案する．著者らが把握している限りでは，$d \geq 2$ に対しては，これまで近似アルゴリズムは知られていなかった．

MaxClique 問題ならびに MaxDBS 問題は，最適解を得ることが困難であることはもちろんのこと，例えば定数などの近似度は得られないことから，近似の観点からも難しいと考えられる．しかしながら，例えば入力されるグラフが平面グラフや弦グラフなどに制限される場合には，MaxClique 問題は多項式時間で解けることが知られている[8]．そこで，本稿でもこれにならい，入力グラフの構造を制限した場合の MaxDBS 問題の近似可能性と近似困難性について考察する．対象とするグラフ構造としては，弦グラフ，スプリットグラフ，区間グラフ，k 部グラフを扱う．スプリットグラフと区間グラフは弦グラフの部分クラスである．これらのグラフ構造の定義については，2 節で行う．本稿で述べる MaxDBS 問題に対する主要な結果について，以下にまとめる．

(i) 一般のグラフに対して，d が偶数なら $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズム，d が奇数なら $O(n^{2/3})$-近似アルゴリズムがそれぞれ存在する．[第 3.1 節]

(ii) 一般のグラフに対して，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下で，任意の $\varepsilon > 0$ について多項式時間で動作する $O(n^{1/2-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．[第 3.2 節]

(iii) d が奇数の場合，弦グラフとスプリットグラフに対して，多項式時間で動作する最適アルゴリズムが存在する．[第 4 および 5 節]

(iv) $d = 2$ の場合，スプリットグラフに対する $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが存在する．[第 5 節]

(v) 弦グラフに対して，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下で，任意の $\varepsilon > 0$ と偶数 d について多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．スプリットグラフについても同様に，多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．[第 4 節および第 5 節]

(vi) 区間グラフに対して，多項式時間で動作する最適アルゴリズムが存在する．[第 6 節]

(vii) 2 部グラフに対して，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ の仮定の下で，任意の $\varepsilon > 0$ と $d \geq 3$ について多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．同様に $k \geq 3$ であるような k 部グラフと $d \geq 2$ についても，多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．[第 7 節]

以上から，MaxDBS 問題の難しさは入力 d の偶奇に依存することが分かる．特に弦グラフに対する困難さは d の偶奇により大きく異なる．

2. 問題とアルゴリズム

2.1 諸 定 義

$G = (V, E)$ を無向連結グラフとする．ここで，V と E はそれぞれ G の頂点集合と辺集合を表す．G の頂点集合と辺集合であることを明示したい場合には，$V(G)$ と $E(G)$ をそれぞれ頂点集合と辺集合を表す記号として用いる場合もある．頂点 u と v の間の辺は (u, v) で表し，G 中の頂点の最大次数は $deg_{\max}(G)$ で表す．また，ある頂点 v に対して，v に隣接する頂点の集合を $N_G(v)$ で表し，$N_G^+(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ と定義する．グラフ G_S が $V(G_S) \subseteq V(G)$ と $E(G_S) \subseteq E(G)$ を満たすとき，G_S は G の部分グラフである．頂点の部分集合 $U \subseteq V$ に対して，$G[U]$ は U により誘導される部分グラフを表す．

頂点 v_0 から v_ℓ へ至る長さ ℓ の道 P は $P = \langle v_0, v_1, \cdots, v_\ell \rangle$ のように頂点列で表現する．閉路 C についても同様に，$C = \langle v_0, v_1, \cdots, v_{\ell-1}, v_0 \rangle$ と表現する．本稿では，単に道や閉路と言う場合には，単純道と単純閉路を意味する．2 頂点 u と v について，u から v に至る最短道の長さ (u, v 間の距離) は $dist_G(u, v)$ で表し，グラフ G の直径 $diam(G)$ は，$diam(G) = \max_{u,v \in V} dist_G(u, v)$ と定義される．

グラフ $G = (V, E)$ と正の数 $d \geq 1$ に対して，G の d 次積グラフ $G^d = (V(G), E^d)$ とは，距離が d 以下であるような任意の 2 頂点 u, v 間に辺 (u, v) を追加したグラフのことである．ここで $E(G) \subseteq E^d$ すなわち，もともと G に含まれていた辺は G^d にも含まれるとする．

G の部分グラフ $G_S = (V_S, E_S)$ が $E_S = V_S \times V_S$ を満たすとき，G_S (すなわち $G[V_S]$) と V_S をそれぞれ，クリークとクリーク集合と呼ぶ．G_S が G 中の最大クリークであるとき，V_S を最大クリーク集合と呼ぶ．また，$(V_S \times V_S) \cap E = \emptyset$ を満たす場合には，G_S と V_S はそれぞれ独立頂点グラフと独立頂点集合と呼ぶ．

各種グラフクラスの定義は 5) による：

定義 2.1 グラフ G に含まれる 4 頂点以上からなるすべての閉路が必ず弦を持つとき，G は弦グラフと呼ばれる．ここで，弦とは閉路の頂点列の中で隣り合わない 2 頂点間に存在する辺のことである． □

定義 2.2 グラフ $G = (V, E)$ の頂点集合 V がクリーク集合 V_1 および独立頂点集合 V_2 に分割できるとき ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$)，G はスプリットグラフと呼ばれる． □

事実 2.3 スプリットグラフは弦グラフの部分クラスである． □

定義 2.4 グラフ $G = (V, E)$ に対して，実直線上の閉区間集合 $\mathcal{I}$ で以下を満たすものが

直径 d 部分グラフ最大化問題 (MaxDBS 問題)
入力: 連結無向グラフ $G = (V, E)$，整数 d $(1 \leq d \leq |V| - 1)$.
出力 直径 $diam(G^s)$ が d 以下であり，頂点数が最大となるような G の部分グラフ G^s

図 1 直径 d 部分グラフ最大化問題 (MaxDBS 問題).
Fig. 1 The maximum diameter-bounded subgraph problem (MaxDBS).

存在するとき，G は区間グラフと呼ばれる.

- V と $\mathcal{I}$ の間に 1 対 1 対応が存在する.
- 2 頂点 $u, v \in V$ に対して 2 つの閉区間 $I_u, I_v \in \mathcal{I}$ がそれぞれ対応するとする. $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ であるとき，かつそのときに限り，対応する u, v の間に辺 $(u, v) \in E$ が存在する. □

事実 2.5 区間グラフは弦グラフの部分クラスである. □

定義 2.6 グラフ $G = (V, E)$ について，k 個の頂点部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ を考える. ただし，任意の $i \neq j$ について $V_i \cap V_j = \emptyset$，かつ $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ とする. すべての V_i が独立頂点集合であるとき，G を k 部グラフと呼ぶ. □

事実 2.7 2 つの整数 k, k' について $k' \leq k - 1$ であるとき，k' 部グラフは k 部グラフの部分クラスである. □

定義 2.8 高さ 1 である木グラフを，星グラフと呼ぶ. □

アルゴリズム ALG が 任意の入力 G に対して $OPT(G)/ALG(G) \leq \sigma$ を満たすとき，ALG は σ-近似アルゴリズムである，または ALG の近似度は σ であるという. ここで，$ALG(G)$ と $OPT(G)$ は，それぞれ ALG と何らかの最適アルゴリズムで得られる解 (部分グラフ) の値 (頂点数) とする.

2.2 直径 d 部分グラフ最大化問題

直径 d 部分グラフ最大化問題 (MaxDBS 問題) は図 1 のように定義される. 本稿では入力グラフ G について，頂点数を $|V| = n$，辺数を $|E| = m$ とする. $d = 1$ の場合には最大クリーク問題 (MaxClique 問題) と同一であり，MaxDBS 問題は探索する部分グラフの直径を 2 以上へと一般化した問題である.

2.3 アルゴリズム

まず，グラフ G と整数 d から d 次積グラフ G^d を作成することを考える. グラフ G が与えられたとき，最初に任意の 2 頂点間の距離 $dist_G(u, v)$ を求め，もし $dist_G(u, v) \leq d$ なら辺 (u, v) を追加する操作を G に対して行なえば良い. この処理を行なうアルゴリズムを `PowerOfGraph` と呼ぶことにする. `PowerOfGraph` の正しさは d 次積グラフの定義より自明であり，また `PowerOfGraph` は多項式時間で動作する.

アルゴリズム `ByFindClique`
入力: 連結無向グラフ $G = (V, E)$，整数 d
出力 直径 $diam(G^s)$ が d 以下であり，頂点数が最大となるような G の部分グラフ G^s
ステップ 1. `PowerOfGraph`(G, d) により G^d を得る.
ステップ 2. `FindClique` を G^d に適用し，最大クリーク $G_Q = (V_Q, E_Q)$ を得る.
ステップ 3. $G_S = (V_Q, E \cap E_Q)$ を出力する.

図 2 アルゴリズム `ByFindClique`.
Fig. 2 Algorithm `ByFindClique`.

動作時間に関しては多項式時間で実行可能であるか，もしくは指数時間を必要としてしまうかもしれないが，MaxClique 問題 (または，入力 $d = 1$ である MaxDBS 問題) に対して，頂点数が最大となるクリークを求めるアルゴリズム `FindClique` が設計できたとする. このとき $d \geq 2$ である MaxDBS 問題に対しても最大部分グラフを求めるアルゴリズム `ByFindClique` を図 2 のように設計することができる.

G の部分グラフのうち，直径が d 以下である任意の部分グラフ H は，`ByFindClique` のステップ 1 で `PowerOfGraph`(G, d) を実行した後に得られる G^d 中ではクリークとなる. よって，`ByFindClique` は，直径が d 以下の最大部分グラフを発見できる. `ByFindClique` の実行時間はステップ 2 で実行する `FindClique` の実行時間に依存し，`FindClique` が多項式時間アルゴリズム (または，指数時間アルゴリズム) であれば `ByFindClique` も多項式時間アルゴリズム (または，指数時間アルゴリズム) である.

$d = 2$ の場合は，最大次数 $deg_{\max}(G)$ を持つ頂点 v を探し，v と v に隣接する $deg_{\max}(G)$ 頂点により定まる部分グラフ $G[N_G^+(v)]$ を出力する単純な近似アルゴリズム `FindStar` を設計できる. `FindStar` により得られる部分グラフの頂点数は $deg_{\max}(G) + 1$ であり，その直径は明らかに 2 以下である. また `FindStar` の実行は線形時間で可能である. このアルゴリズムは非常に単純だが，次節以降で見るように，良い近似解を出力する.

アルゴリズム ByFindStar
入力: 連結無向グラフ $G = (V, E)$，整数 d
出力 直径 $diam(G^s)$ が d 以下であり，頂点数が最大となるような G の部分グラフ G^s
ステップ 1. PowerOfGraph($G, \lfloor d/2 \rfloor$) により，$G^{\lfloor d/2 \rfloor}$ を得る．
ステップ 2. FindStar を $G^{\lfloor d/2 \rfloor}$ に適用し，部分グラフ $G_T = (V_T, E_T)$ を得る．
ステップ 3. $G_S = (V_T, E \cap E_T)$ を出力する．

図 3 アルゴリズム ByFindStar.
Fig. 3 Algorithm ByFindStar.

PowerOfGraph と FindStar の 2 つのアルゴリズムを組み合わせることで，別のアルゴリズム ByFindStar を設計できる (図 3)．ByFindClique 中では d 次積グラフを構成したが，ByFindStar 中では $\lfloor d/2 \rfloor$ 次積グラフを構成する．ByFindStar の実行は多項式時間で可能である．

これらのアルゴリズムの近似度の解析は次節以降で行なう．

3. 一般グラフ

3.1 近似可能性

第 1 節で述べたように，MaxClique 問題に対しては，$O(n(\log\log n)^2/(\log n)^3)$-近似アルゴリズム[6] が既知の近似アルゴリズムとしては最良である．このアルゴリズムを FindClique として用いて $d \geq 2$ の場合の MaxDBS 問題に対するアルゴリズム ByFindClique (近似解を出力することになる) を設計できる．このアルゴリズムは，上記のアルゴリズムと同じ近似度を持つ：

事実 3.1 $d \geq 2$ の場合，MaxDBS 問題に対する $O(n(\log\log n)^2/(\log n)^3)$-近似アルゴリズムが存在する． □

次に，アルゴリズム FindStar の近似度について示す．

補題 3.2 $d \geq 2$ の場合，MaxDBS 問題に対する FindStar の近似度は $O(n^{1-1/d})$ である．

証明 アルゴリズム FindStar の出力する部分グラフの頂点数 $FindStar(G)$ は $deg_{\max}(G) + 1$ である．$deg_{\max}(G) \geq n^{1/d}$ の場合には，$OPT(G) \leq n$ であることから

$$\frac{OPT(G)}{FindStar(G)} \leq \frac{n}{deg_{\max}(G)+1} < n^{1-1/d}$$

となり近似度 $O(n^{1-1/d})$ を達成している．次に $deg_{\max}(G) < n^{1/d}$ の場合について考える．直径 d である部分グラフの頂点数は，高々$1 + deg_{\max}(G) + (deg_{\max}(G))^2 + \cdots + (deg_{\max}(G))^d = (deg_{\max}(G)^{d+1} - 1)/(deg_{\max}(G) - 1) = (deg_{\max}(G))^d + O(deg_{\max}(G)^{d-1})$ であるので，以下が成立し，やはり近似度 $O(n^{1-1/d})$ を達成している．

$$\begin{aligned}\frac{OPT(G)}{FindStar(G)} &\leq \frac{deg_{\max}(G)^d + O(deg_{\max}(G)^{d-1})}{deg_{\max}(G)+1} \\ &= O(deg_{\max}(G)^{d-1}) \\ &= O(n^{1-1/d}).\end{aligned}$$

□

上記の補題 3.2 により，$d = 2$ の場合は FindStar の近似度は $O(n^{1/2})$ である．FindStar は非常に単純なアルゴリズムであり，その近似度の解析も容易であるが，$d = 2$ の場合の近似度はこれ以上改善できないことが，次節で示される近似度の下界 $\Omega(n^{1/2-\varepsilon})$ (ε は任意の正の数) により分かる．さらに 補題 3.2 と PowerOfGraph を組み合わせて用いることで，偶数 d に対して近似度を与える次の定理が得られる．これも次節で示すが，任意の偶数 d に対する近似度の下界は $\Omega(n^{1/2-\varepsilon})$ であるため，この結果が最良である．

定理 3.3 d が偶数の場合， MaxDBS 問題に対して $O(n^{1/2})$-近似アルゴリズムが存在する．

証明 ByFindStar が $d \geq 4$ に対して近似度 $O(n^{1/2})$ を達成することを示す．任意の 2 頂点 u と v に対して，$dist_G(u,v) \leq d$ が成立する必要十分条件は $dist_{G^{d/2}}(u,v) \leq 2$ である．よって，入力として G と距離 d が与えられた MaxDBS 問題に対する最適解は，入力として $G^{d/2}$ と距離 2 が与えられた MaxDBS 問題の最適解と同一である．補題 3.2 より，後者の問題に対する FindStar の近似度は $O(n^{1/2})$ であるので，前者の問題に対する ByFindStar の近似度も $O(n^{1/2})$ となる． □

d が奇数の場合については，補題 3.3 と同様の議論を行なうことで次の定理が得られる．

定理 3.4 d が 3 以上の奇数である場合，MaxDBS 問題に対する $O(n^{2/3})$-近似アルゴリズムが存在する．(証明は省略．) □

3.2 近似困難性

本節では，一般グラフに対する MaxDBS 問題の近似下界について示す．$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ とい

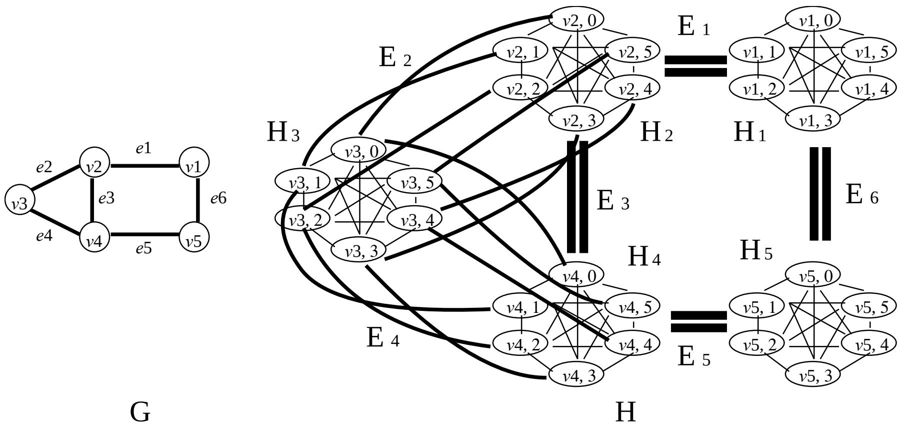

図 4 グラフ G と帰着により得られるグラフ H.
Fig. 4 A graph G and the reduced graph H from G.

う仮定の下では，MaxClique 問題 ($d = 1$ の場合の MaxDBS 問題) は $n^{1-\varepsilon}$ よりも良い近似度を持つアルゴリズムは存在しないことが既に示されている[15]．$d \geq 2$ の場合について近似下界を与えるにあたり，MaxClique 問題から MaxDBS 問題への近似度ギャップ保存帰着 (参考文献 14) の pp.307–308) を行う．まず $d = 2$ の場合について示す：

補題 3.5 $d = 2$ と任意の $\varepsilon > 0$ について，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ とすると，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/2-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない.

証明 ここでは MaxClique 問題から MaxDBS 問題 への帰着方法のみを与え，詳しい証明は省略する．これから示す帰着においては，MaxClique 問題の入力グラフ $G = (V(G), E(G))$ からグラフ $H = (V(H), E(H))$ を構成する (図 4 参照)．$OPT_1(G)$ と $OPT_2(H)$ をそれぞれ G に対する MaxClieque 問題の最適解と，H に対する MaxDBS 問題の最適解の頂点数とする．また，G 中の n 個の頂点を $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ とし，m 本の辺を $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ とする．$g(n)$ を G に関するある関数とする．次の 2 つの条件を満たす帰着を与える：(1) もし $OPT_1(G) \geq g(n)$ ならば $OPT_2(H) \geq (n+1) \times g(n)$ であり，(2) もしある正の定数 ε_1 に対して $OPT_1(G) < g(n)/n^{1-\varepsilon_1}$ ならば $OPT_2(H) < (n+1) \times g(n)/n^{1-\varepsilon_1}$ である.

グラフ H は，(i) G 中の n 頂点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ に対応する n 個の部分グラフ $H_1, H_2, \ldots, H_n$ と，(ii) G 中の m 辺 $e_1, e_2, \ldots, e_m$ に対応する m 個の辺集合 $E_1, E_2, \ldots, E_m$ を含む．各々について説明する．(i) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について，$H_i = (V(H_i), E(H_i))$ は $n+1$ 頂点と $n(n+1)/2$ 辺からなり，完全グラフを形成する．すなわち，$V(H_i) = \{v_{i,0}, v_{i,1}, \cdots, v_{i,n}\}$ であり，$E(H_i) = \{(v_{i,k}, v_{i,\ell}) \mid k \neq \ell, 0 \leq k, \ell \leq n\}$ となる．結果として，H 中には合計で $n(n+1)$ 頂点が存在する．(ii) 各 $j = 1, 2, \ldots, m$ について，$E_j = \{(v_{k,i}, v_{\ell,i}) \mid e_j = (v_k, v_\ell), i = 0, 1, \cdots, n\}$ は H_k を H_ℓ と接続する $n+1$ 本の並列な辺を含む．結果として H 中には合計で $m(n+1)$ 本の辺が存在する．以上の帰着は多項式時間で実行できる．図 4 に，グラフ G と，G からの帰着により得られるグラフ H の例を示している．図中では，6 本の辺の集合 E_1 と E_3，E_5，E_6 については 6 本の辺を描かず，2 本の太線で示している.

帰着の結果として，$|V(H)| = n^2 + n$ となるので，近似ギャップは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\Theta(|V(H)|^{1/2-\varepsilon})$ となり，補題が証明される. □

$d = 3$ の場合についても，補題 3.5 と同様の議論を行なうことで，次の補題を示すことができる.

補題 3.6 $d = 3$ と任意の $\varepsilon > 0$ について，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ とすると，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/2-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

さらに，これらの補題で利用した帰着を少し変更することで，以下の定理を示すことが出来る：

定理 3.7 $2 \leq d \leq O(\sqrt{diam(G)})$ と任意の $\varepsilon > 0$ について，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ とすると，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/2-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

4. 弦グラフ

本節では，入力グラフを弦グラフに制限した場合について考察する．以下では，MaxDBS 問題の計算複雑さは，入力される直径の値 d の偶奇に依存して，d が奇数の場合には $\mathcal{P}$ であり，d が偶数の場合には $\mathcal{APX}$-困難と変わることを示す.

定理 4.1 入力グラフ G が弦グラフの場合，奇数 d ($1 \leq d \leq diam(G)$) に対して，MaxDBS 問題は多項式時間で最適解が得られる.

証明 弦グラフに対して最大クリークを発見できる多項式時間アルゴリズムが知られている[8]．よって，$d = 1$ の場合 の MaxDBS 問題は最大クリーク問題と同一なので，$\mathcal{P}$ になる．d が 3 以上の奇数の場合，弦グラフ G の d 次積グラフ G^d も弦グラフになることが

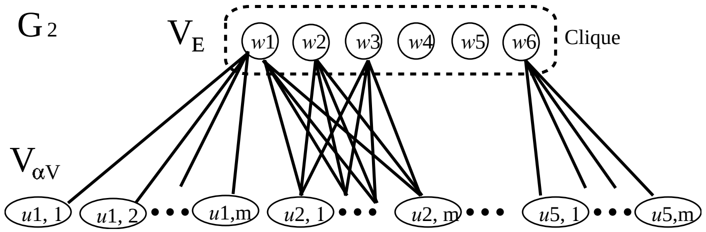

図 5 図 4 中のグラフ G から，帰着により得られる弦グラフ G_2.
Fig. 5 The reduced graph G_2 from the graph G in Fig. 4.

知られている[1),2)]．よって，8) による多項式時間アルゴリズムを FindClique として用い，ByFindClique を実行することで，MaxDBS 問題に対しても多項式時間で最適解を得ることができる． □

d が偶数の場合には，弦グラフ G の d 次積グラフが弦グラフとはならない場合がある．つまり，ByFindClique では，多項式時間で最適解を得られる保証はない．実際に以下の補題で示される近似困難性を，入力が弦グラフと $d=2$ に制限された MaxDBS 問題に対して示すことができる．

補題 4.2 $d=2$ と任意の $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを弦グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．

証明 MaxDBS 問題の近似困難性を MaxClique 問題からの近似度ギャップ保存帰着により行う．すなわち，MaxClique 問題の入力グラフ $G_1=(V_1,E_1)$ からグラフ $G_2=(V_2,E_2)$ を構成する．基本的なアイデアは定理 3.5 の証明と同じであり，ここでも証明の詳細は省略し，グラフの構成のみを与える．

G_1 の頂点集合を $V_1=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，辺集合を $E_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ としたとき，帰着グラフ G_2 を構成する．V_2 は更に 2 つの頂点集合 V_E および $V_{\alpha V}$ からなり，$V_2=V_E\cup V_{\alpha V}$ である．まず，E_1 の m 辺に対応して $V_E=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$ とする．$V_{\alpha V}$ は $n\times m$ 頂点を含み，$V_{\alpha V}=\{u_{1,1},u_{1,2},\cdots,u_{1,\alpha},u_{2,1},u_{2,2},\cdots,u_{n,m}\}$ とする．E_2 も 2 つの辺集合 E_E および $E_{\alpha E}$ からなり，$E_2=E_E\cup E_{\alpha E}$ である．E_E は $E_E=\{(w_i,w_j)\mid 1\leq i,j\leq m, i\neq j\}$ とし，V_E により誘導される部分グラフ $G[V_E]$ を完全グラフとする．$V_{\alpha V}$ と V_E の間には，$E_{\alpha E}=\{(w_\ell,u_{i,h}),(w_\ell,u_{j,h})\mid e_\ell=(u_i,u_j)\in E_1, 1\leq \ell,h\leq m\}$ を付加する．図 5 に，図 4 中のグラフ G からこの帰着により得られるグラフの例を示す．$|V_2|=|V_E|+|V_{\alpha V}|=m+m\times n$ であり，また $|E_2|=|E_E|+|E_{\alpha E}|=m(m-1)/2+m\times 2m$ であるので，この帰着は多項式時間で実行できる．ここで，得られたグラフ G_2 に関して，$G_2[V_E]$ はクリークであり，$G_2[V_{\alpha V}]$ は独立頂点グラフであり，よって G_2 はスプリットグラフである (すなわち弦グラフでもある) ことに注意されたい．

以上の構成により，(1) もし $OPT_1(G_1)\geq g(n)$ ならば，$OPT_2(G_2)\geq m\times g(n)+m$ を満たし，(2) ある定数 ε_1 に対して，$OPT_1(G_1)\leq g(n)/n^{1-\varepsilon_1}$ であるとすると，ある定数 ε_2 に対して $OPT_2(G_2)\leq m\times g(n)/|V_2|^{1/3-\varepsilon_2}+m$ を満たすことを示すことができる．これにより近似度のギャップ $\Omega(|V_2|^{1/3-\varepsilon_2})$ が得られる．ここで，任意の $v_i,v_j\in V_1$ と $u_{i,k},u_{j,h}\in V_{\alpha V}$ に対して，$dist_{G_2}(u_{i,k},u_{j,h})=2$ の必要十分条件が $dist_{G_1}(v_i,v_j)\leq 1$ であるという，帰着に関する重要な性質を証明には用いることだけをここに記し，詳細は省略する． □

$d\geq 4$ の場合については，上記の証明で構成したグラフ G_2 において，$V_{\alpha V}$ の各頂点から (図中で言うと下に) 道を追加することで，G_2 の直径を大きくできる．例えば，$d=4$ については，各 $v\in V_{\alpha V}$ に対して 1 個の頂点 v' と 1 本の辺 (v,v') を追加すると，G_2 の直径を 2 だけ増加でき，$d=2$ の場合の最適解にこれらの追加頂点と追加辺まで含めた，直径が 4 の最適解を構成できる．この帰着により，以下の定理を得ることができる．

定理 4.3 任意の $2\leq d\leq O(diam(G))$ と $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを弦グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

5. スプリットグラフ

本節では，スプリットグラフに対する MaxDBS 問題の近似可能性と近似困難性について述べる．補題 4.2 の証明の中で構成したグラフ G_2 はスプリットグラフなので，以下の系が即座に得られる．スプリットグラフの直径は高々3 であり，$d=3$ の場合は多項式時間で最適解を得られる (補題 4.1) ので，ここでの興味は $d=2$ の場合のみである．

系 5.1 $d=2$ と任意の $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフをスプリットグラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない． □

次に，$O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムについて述べる．上記の系により，近似度の下界が $\Omega(n^{1/3-\varepsilon})$ であることから，このアルゴリズムが持つ近似度は最良であることが分かる．

単純なアルゴリズムである FindStar が，スプリットグラフに対して近似度 $O(n^{1/3})$ を達成することを以下の定理で示す．

定理 5.2 入力グラフがスプリットグラフの場合，$d=2$ について，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3})$-近似アルゴリズムが存在する．

証明 入力グラフ G に対して，$FindStar(G)$ と $OPT(G)$ をそれぞれ FindStar と最適アルゴリズムで得られる解の頂点数とする．$deg_{\max}(G) \geq n^{2/3}$ の場合は，FindStar の定義より，$FindStar(G) \geq n^{2/3}+1$ である．明らかに $OPT(G) \leq n$ であることから，

$$\frac{OPT(G)}{FindStar(G)} \leq \frac{n}{n^{2/3}+1} < n^{1/3}$$

が成立し，この場合，近似度 $O(n^{1/3})$ を達成している．

$deg_{\max}(G) < n^{2/3}$ と仮定する．最適解の頂点集合 V^* を，2 個の頂点集合 C と S に分割する．すなわち $V^* = C \cup S$ かつ $C \cap S = \emptyset$ である．ただしここで，G はスプリットグラフであることから，C はクリーク集合であり，S は独立頂点集合であるものと仮定する．C の大きさ $|C|$ については，最大次数に関する仮定 $deg_{\max}(G) < n^{2/3}$ より，$|C| \leq deg_{\max}(G)+1 \leq n^{2/3}$ が成立している．簡単のために $G[V^*]$ を G^* という記号で表すことにする．任意の頂点 $v \in C$ に対して $|N(v) \cap S| \leq deg_{\max}(G^*) - (|C|-1)$ が成立しており，この値 $deg_{\max}(G^*) - (|C|-1)$ を k で表すことにする．

以下では，$|S|$ の上界を示す．2 頂点 $u, w \in S$ の組について考えると，$diam(G^*) = 2$ であり S は独立頂点集合であるから，$dist_{G^*}(u,w) \leq 2$ を満たすために，ある頂点 $v \in C$ に対して 2 本の辺 (u,v) と (v,w) が存在するはずである．ここで，この状況を "(u,v) が u のために w を覆う" と表現することにする．$|N_{G^*}(v) \cap S| \leq k$ であるから，(u,v) は u のためには S 中のたかだか k 頂点しか覆えない．すなわち，S 中のすべての頂点を u のために 1 本以上の辺で覆うには，$N(u) \geq \lceil |S|/k \rceil$ を満たすことが必要となる．同様のことが S 中のすべての頂点について成立している必要があるので，C と S の間に $\lceil |S|/k \rceil \cdot |S|$ 以上の辺が必ず存在することが分かる．C 中の頂点は，S 中のたかだか k 頂点としか隣接できないので，次の不等式が成立する (最初の不等号がこの性質によるもので，2 番目の不等号は天井関数の性質によるものである)．

$$k \cdot |C| \geq \left\lceil \frac{|S|}{k} \right\rceil \cdot |S| \geq \frac{|S|^2}{k}$$

これにより，$|S| \leq k\sqrt{|C|}$ が成立することが分かる．

以上を用いて FindStar の近似度を見積もると，

$$\frac{OPT(G)}{FindStar(G)} \leq \frac{|C|+|S|}{|C|+k} \leq \frac{|C|+k\sqrt{|C|}}{|C|+k} \leq \sqrt{|C|} \leq n^{1/3}$$

となる．ここで最初の不等号は，$FindStar(G) = deg_{\max}(G)+1 \geq deg_{\max}(G^*)+1 = |C|+k$ によるものである． □

6. 区間グラフ

区間グラフは，グラフ理論やオペレーションズリサーチの分野でよく研究されている．例えば，計算機資源の割り当て問題などが区間グラフを用いて自然に表現できる．区間グラフについては，MaxDBS 問題は容易に解ける：

定理 6.1 入力グラフが区間グラフの場合，MaxDBS 問題は多項式時間で最適解を得られる．

証明 区間グラフは弦グラフの部分クラスである．弦グラフに対しては，MaxClique 問題を多項式時間で解くことができ[8]，MaxClique 問題は $d=1$ の場合の MaxDBS 問題と同一なので，結局 $d=1$ の場合の MaxDBS 問題も多項式時間で解くことができる．$d \geq 2$ については，区間グラフ G の d 次積グラフ G^d も区間グラフになることが知られている[1]．したがって，8) のアルゴリズムを FindClique として用いた ByFindClique により，同じく多項式時間で解ける． □

7. k 部グラフ

本節では，k 部グラフに対する MaxDBS 問題の計算複雑さについて述べる．まず最初に，入力を k 部グラフに限定したとしても MaxClique 問題が $\mathcal{NP}$ 困難となることが知られている[13]．しかし，もし k が定数であるとすると，最大クリークのサイズは高々k であるため，MaxClique 問題を多項式時間で解くことができる．2 部グラフに対する MaxDBS 問題についても，$d=2$ の場合には，与えられた 2 部グラフの中から最大の完全 2 部グラフを多項式時間で求めることができるアルゴリズム [7,9] を用いることにより，多項式時間で解くことができる．一方，$d=2$ の場合にも，$k \geq 3$ の k 部グラフに対しては，MaxClique 問題からの近似度ギャップ保存帰着を与えることにより，MaxDBS 問題の $\mathcal{NP}$ 困難性，および近似困難性を示すことができる．

補題 7.1 $d=2$ と任意の $\varepsilon > 0$ について，$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを 3 部グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

k 部グラフは $(k+1)$ 部グラフの部分クラスであるので，補題 7.1 より，k 部グラフにたいして以下の定理が成り立つ．

定理 7.2 $d=2$，$k\geq 3$，および任意の $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを k 部グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない． □

証明を少し変更することにより，より大きな直径を持つ k 部グラフに対して，同じ近似困難性を示すことができる．

系 7.3 $2\leq d\leq diam(G)-1$，$k\geq 3$，および任意の $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを k 部グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

さらに，基本的には同じアイデアの近似度ギャップ保存帰着により，ある定数 $d\geq 3$ について，２部グラフに対する同じ近似困難性を示すことができる．

定理 7.4 $3\leq d\leq diam(G)-1$ と任意の $\varepsilon>0$ について，$\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ とすると，入力グラフを 2 部グラフに制限したとしても，MaxDBS 問題に対して多項式時間で動作する $O(n^{1/3-\varepsilon})$-近似アルゴリズムは存在しない．(証明は省略．) □

8. おわりに

本稿では，いくつかのグラフクラスに対して，MaxDBS 問題の近似可能性と近似困難性を示した．しかし，奇数 d について，一般グラフの MaxDBS 問題に対する $n^{2/3}$-近似可能性と $n^{1/2}$-近似困難性の間にギャップが存在する．また，現時点では，弦グラフと k 部グラフに対するタイトな近似上界を示すことができていない．今後の課題として，重み付きグラフに対する MaxDBS 問題の検討が考えられる．

謝辞 本研究の一部は，科学研究補助金 18700015 および 20500017 による．

参考文献

1) G. Agnarsson, R. Greenlaw, M. M. Halldórsson, On powers of chordal graphs and their colorings. *Congr. Numer.*, 144, pp.41–65, 2000.
2) R. Balakrishnan and P. Paulraja. Powers of chordal graphs. *Australian J. Mathematics*, Series A, 35, pp.211–217, 1983.
3) M. Bellare, O. Goldreich, and M. Sudan. Free bits, PCPs and non-approximability - Towards tight results. *SIAM J. Computing*, 27 (3), pp.804–915, 1998.
4) I.M. Bomze, M. Budinich, P.M. Pardalos, and M. Pelillo. The maximum clique problem. *Handbook of Combinatorial Optimization*, Kluwer Academic, pp.1–74, 1999.
5) A. Brandstädt, V.B. Le, J. P. Spinrad. *Graph Classes: A Survey*, SIAM, 1999.
6) U. Feige. Approximating maximum clique by removing subgraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 18, pp.219–225, 2004.
7) M.R. Garey, and D.S. Johnson. *Computers and Intractability*, 1979.
8) F. Gavril. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM Journal on Computing*, 1 (2), pp.180–187, 1972.
9) A. Goerdt and A. Lanka. An approximation hardness result for bipartite clique. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, Report No.48, 2004.
10) J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$. *Acta Mathematics*, 182 (1), pp.105–142, 1999.
11) R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, pp.85–103, 1972.
12) J. Marinček and B. Mohar. On approximating the maximum diameter ratio of graphs. *Discrete Math*, 244, pp.323–330, 2002.
13) B.S.W. Schröder. Algorithms for the fixed point property. *Theoretical Computer Science*, 217, pp.301–358, 1999.
14) V.V. Vazirani. *Approximation Algorithms*. Springer, 2003.
15) D. Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3, pp.103–128, 2007.