

反復を要しない射影変換の高精度解法

新妻 弘崇^{†1} プラサンナ・ランガラヤン^{†2}
金谷 健 ー^{†1}

2 画像の対応点から射影変換を計算する高精度な解法を提案する。最尤推定に基づく方法は理論的には最適であるが、反復を要するため誤差が大きいと収束しないことがある。提案手法は代数的解法であるため反復なしに解が求まる。代数的解法には正規化の重み行列の自由度があることに着目し、これを 2 次の偏差項まで 0 になるように定める。シミュレーションにより、これが最尤推定に匹敵する精度があり、精度の理論限界 (KCR 下界) をほぼ達成すること、および計算を簡略化する「Taubin 近似」を行っても同程度の精度であることを示す。最後に実画像によるパノラマ画像の生成を行い、提案方法によって精度のよい合成ができることを示す。

High Accuracy Homography Computation without Iterations

HIROTAKA NIITSUMA,^{†1} PRASANNA RANGARAJAN^{†2}
and KENICHI KANATANI ^{†1}

We present highly accurate least-squares (LS) alternatives to the theoretically optimal maximum likelihood (ML) estimator for homographies between two images. Unlike ML, our estimators are non-iterative and yield solutions even in the presence of large noise. By rigorous error analysis, we derive a “hyperaccurate” estimator which is unbiased up to second order noise terms. Then, we introduce a computational simplification, which we call “Taubin approximation”, without incurring a loss in accuracy. We experimentally demonstrate that our estimators have accuracy surpassing the traditional LS estimator and comparable to the ML estimator.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

^{†2} 米国南メソジスト大学電気工学科
Department of Electrical Engineering, Southern Methodist University, U.S.A.

1. ま え が き

平面あるいは無限遠方のシーンを 2 台のカメラで撮影すると画像間が射影変換で結ばれることから、2 画像の対応点から射影変換行列を計算することはコンピュータビジョンの最も基本的な処理の処理であり、パノラマ画像の生成^{2),17)}、平面パターンを用いるカメラ校正^{13),20)}、平面部分をもつ物体の 3 次元復元^{4),11)}、道路面上の障害物検出^{3),12)} など幅広い応用に利用されている (図 1)。筆者らは約 10 年前に「くりこみ法」と呼ぶ高精度な計算法を発表したが^{10),18)}、最近これを改訂し、最尤推定に基づく「多拘束 FNS 法」を発表した¹⁴⁾。しかし、くりこみ法も多拘束 FNS 法も反復による非線形最適化であり、データの誤差が大きいと反復が収束しない場合がある。また反復の初期値も適切に与える必要である。このため、反復を要しない高精度の代数的解法が望まれる。従来から用いられている代数的解法は「最小二乗法」であり、誤差がなければ 0 となる式の二乗和を最小にするものである。しかし、これは解に大きな偏差があるために精度が低いことが知られている^{10),14),18)}。

楕円当てはめや基礎行列の計算においては、高精度の代数的解法として Taubin 法¹⁹⁾ が知られている。しかし、これは楕円の方程式やエビ極線方程式のような単一の拘束式にしかな適用できない。Taubin¹⁹⁾ は空間曲線のような、それぞれ異なるパラメータを持つ代数的に独立な複数の式で記述される場合についても述べているが、同じパラメータが複数の関数で拘束される場合に拡張できるかどうか不明であった。最近、Rangarajan ら¹⁶⁾ は射影変換に対しても “Taubin 的” 方法が存在することを発見的に示したが、理論的な根拠は示していない。

一方、Al-Sharadqah ら¹⁾ や Rangarajan ら¹⁵⁾ は円の当てはめ問題において金谷⁹⁾ の高次誤差解析を用いて 2 次の偏差項までを 0 にする「超精度最小二乗法」を発表した。また岩元ら⁵⁾ はこれを楕円当てはめに拡張した。本論文では彼らの解析法を射影変換の計算に適用する。着目するのは、代数的解法には正規化の重みの自由度が存在するという事実である。本論文では解の 2 次の偏差項を厳密に 0 にするように正規化の重みを定める。まずこ

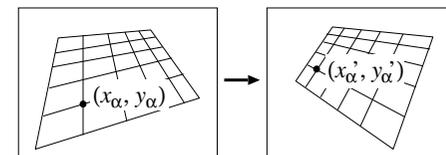


図 1 2 画像間の対応点から射影変換を計算する。

れを厳密に計算し、次にそれを簡略化した方法を導く。これが Taubin 法に対応していると解釈できるので、これを「Taubin 近似」と呼ぶ。

結論を先に述べると、問題は N 組の対応点 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ から射影変換を定める 9 次元ベクトル h を求めることである。まず 9×9 行列 N , M を次のように定義する。ただし f_0 はスケール定数である (詳細は後述)。

$$N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + f_0^2 & x_\alpha y_\alpha & f_0 x_\alpha & -x'_\alpha y'_\alpha & 0 & 0 & -f_0 x'_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 + y_\alpha^2 + f_0^2 & f_0 y_\alpha & 0 & -x'_\alpha y'_\alpha & 0 & 0 & -f_0 x'_\alpha & 0 \\ f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x'_\alpha y'_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha^2 + x_\alpha^2 + f_0^2 & x_\alpha y_\alpha & f_0 x_\alpha & -f_0 y'_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -x'_\alpha y'_\alpha & 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 + x_\alpha^2 + f_0^2 & f_0 y_\alpha & 0 & -f_0 y'_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0 x'_\alpha & 0 & 0 & -f_0 y'_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha^2 + x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & 2x_\alpha y_\alpha & 2f_0 x_\alpha \\ 0 & -f_0 x'_\alpha & 0 & 0 & -f_0 y'_\alpha & 0 & 2x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 + x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & 2f_0 y_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2f_0 x_\alpha & 2f_0 y_\alpha & 2f_0^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_\alpha^2 (f_0^2 + y_\alpha^2) & x_\alpha y_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & f_0 x_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & -x_\alpha^2 x'_\alpha y'_\alpha & -x_\alpha y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha \\ x_\alpha y_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & y_\alpha^2 (f_0^2 + y_\alpha^2) & f_0 y_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & -x_\alpha y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -y_\alpha^2 x'_\alpha y'_\alpha \\ f_0 x_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & f_0 y_\alpha (f_0^2 + y_\alpha^2) & f_0^2 (f_0^2 + y_\alpha^2) & -f_0 x_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0 y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha \\ -x_\alpha^2 x'_\alpha y'_\alpha & -x_\alpha y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0 x_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & x_\alpha^2 (f_0^2 + x_\alpha^2) & x_\alpha y_\alpha (f_0^2 + x_\alpha^2) \\ -f_0 x_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0 y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0^2 x'_\alpha y'_\alpha & x_\alpha y_\alpha (f_0^2 + x_\alpha^2) & y_\alpha^2 (f_0^2 + x_\alpha^2) \\ -f_0 x_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0 y_\alpha x'_\alpha y'_\alpha & -f_0^2 x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x_\alpha (f_0^2 + x_\alpha^2) & f_0 y_\alpha (f_0^2 + x_\alpha^2) \\ -f_0 x_\alpha^2 x'_\alpha & -f_0 x_\alpha y_\alpha x'_\alpha & -f_0^2 x_\alpha x'_\alpha & -f_0 x_\alpha^2 y'_\alpha & -f_0 x_\alpha y_\alpha y'_\alpha \\ -f_0 x_\alpha y_\alpha x'_\alpha & -f_0 y_\alpha^2 x'_\alpha & -f_0^2 y_\alpha x'_\alpha & -f_0 x_\alpha y_\alpha y'_\alpha & -f_0 y_\alpha^2 y'_\alpha \\ -f_0^2 x_\alpha x'_\alpha & -f_0^2 y_\alpha x'_\alpha & -f_0^3 x'_\alpha & -f_0^2 x_\alpha y'_\alpha & -f_0^2 y_\alpha y'_\alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

本論文の結論は高精度の解 h が次の一般固有値問題の絶対値最大の一般固有値 μ に対する一般固有ベクトルとして得られるということである。

$$Nh = \mu Mh \quad (3)$$

そして、シミュレーションを行い、これが最小二乗法をはるかに上回る精度であり、前報¹⁴⁾

で示した最尤推定に基づく最適解法に匹敵し、精度の理論限界 (KCR 下界⁸⁾) にほとんど到達することを示す。最後に実画像によるパノラマ画像の生成の実験例を示す。

2. 射影変換

「射影変換」は次式で表される画像上の変換である。

$$x' = f_0 \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0}, \quad y' = f_0 \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0} \quad (4)$$

ここに f_0 は係数 h_{ij} のオーダーをそろえるためのほぼ画像サイズの大きさの任意定数であり (実験では $f_0 = 600$ (画素) とした), これがないと数値計算の精度が低下する。式 (4) は次のようにも書き直せる。点 (x, y) , (x', y') をスケール定数 f_0 によって各成分のオーダーをそろえた 3 次元ベクトル x , x' で表し、式 (4) の係数 h_{ij} を 3×3 行列 H で表す。

$$x = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (5)$$

これらを用いると式 (4) は次のように書ける。

$$x' = Z[Hx] \quad (6)$$

ただし $Z[\cdot]$ は第 3 成分を 1 とする正規化を表す。これはベクトル x' , Hx が平行であることを表すので、次のように書いても等価である。

$$x' \times Hx = 0 \quad (7)$$

9 次元ベクトル h , $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ を

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_0 x \\ -f_0 y \\ -f_0^2 \\ xy' \\ yy' \\ f_0 y' \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0 x \\ f_0 y \\ f_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -xx' \\ -yx' \\ -f_0 x' \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} -xy' \\ -yy' \\ -f_0 y' \\ xx' \\ yx' \\ f_0 x' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と定義すると、式 (7) の 3 成分を取り出して f_0^2 倍して次の拘束式を得る。

$$(\xi^{(1)}, h) = 0, \quad (\xi^{(2)}, h) = 0, \quad (\xi^{(3)}, h) = 0 \quad (9)$$

以下、ベクトル a , b の内積を (a, b) と書く。 N 組の対応点 (x_α, y_α) , (x'_α, y'_α) , $\alpha = 1, \dots$,

N が与えられたとき、問題はそれらの間の射影変換 H をなるべく精度よく推定することである。データを代入した式 (8) のベクトル $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$ をそれぞれ $\xi_\alpha^{(1)}, \xi_\alpha^{(2)}, \xi_\alpha^{(3)}$ と書くと、この問題は $(\xi_\alpha^{(1)}, h) \approx 0, (\xi_\alpha^{(2)}, h) \approx 0, (\xi_\alpha^{(3)}, h) \approx 0, \alpha = 1, \dots, N$ となる h の計算に帰着する。

3. 代数的解法

「代数的解法」とは式 (9) の 3 式の二乗和（「代数的距離」）

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\xi_\alpha^{(k)}, h)^2 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 h^\top \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(k)\top} h = (h, Mh) \quad (10)$$

を最小にする h を計算するものであり、「最小二乗法」とも呼ばれる。ただし、 M を次のように置いた（要素で書いたものが式 (2) である）。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(k)\top} \quad (11)$$

式 (10) を最小化するには h （すなわち H ）に何らかのスケールの正規化が必要である。そうでないと式 (10) は明らかに $h = 0$ で最小値 0 をとる。式 (4) や式 (7) から明らかなように、射影変換 H にはスケールの不定性がある。よく行われる正規化は $h_{33} = 1$ であり、 $\sum_{i,j=1}^3 h_{ij}^2 = 1$ もよく用いられる。これら以外にも種々の正規化が考えられるが、代数的解法の問題点は、どの正規化を用いるかによって式 (10) を最小にする解が異なることである。Al-Sharadqah ら¹⁾ や Rangarajan ら¹⁵⁾ は円の当てはめにおいて、金谷⁹⁾ の高次誤差解析を用いて解の精度が最も高くなるような正規化を導出した。岩元⁵⁾ は楕円当てはめにおいて同様の解析を行った。本論文ではこれを式 (10) について行う。正規化の形としては、Al-Sharadqah ら¹⁾、Rangarajan ら¹⁵⁾、岩元⁵⁾ と同様に、ある対称行列 N を用いた次の形を考える。

$$(h, Nh) = (\text{一定}) \quad (12)$$

例えば $N = I$ （単位行列）とすると、これは $\|h\| = (\text{一定})$ を意味する。以下ではこの場合を「標準最小二乗法」あるいは単に「最小二乗法」と呼ぶ。従来は N を正値または半正値対称行列としていた。このとき、式 (12) の右辺は正である（0 の場合は考慮しなくてよい）。したがって、式 (12) の右辺を 1 と置いても一般性は失わない。しかし、本論文では Al-Sharadqah ら¹⁾、Rangarajan ら¹⁵⁾、岩元⁵⁾ と同様に、 N を正値または半正値に

限定せず、一般の対称行列を候補とする。そして、得られる解が高い精度を持つような N を求める。そのような N が得られれば、式 (12) のもとで式 (10) を最小化するにはよく知られているように、一般固有値問題

$$Mh = \lambda Nh \quad (13)$$

を解けばよい。 N が正値または半正値なら λ は正であり、解は最小一般固有値 λ に対する一般固有ベクトル h であるが、 N が一般の場合は λ は正とは限らない。以下では $Mh \approx 0$ と仮定し、 λ を微小量として解析するので、解は式 (13) の絶対値最小の一般固有値 λ に対する一般固有ベクトル h となる。ただし、一般固有ベクトル h のノルムは不定であるから以下、解 h は単位ベクトル ($\|h\| = 1$) とする。

4. 誤差解析

各点 $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ は真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$ に期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従う誤差 $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$ が加わると仮定する。このとき $\xi_\alpha^{(k)}$ は式 (8) より次のように書ける。

$$\xi_\alpha^{(k)} = \bar{\xi}_\alpha^{(k)} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)} \quad (14)$$

ただし、 $\bar{\xi}_\alpha^{(k)}$ は誤差がないときの値であり、 $\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)}, \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}$ はそれぞれ誤差に関して 1 次と 2 次の項を表す。9 × 4 ヤコビ行列 $T_\alpha^{(k)}$ を次のように定義する。

$$T_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & \bar{x}_\alpha \\ 0 & \bar{y}'_\alpha & 0 & \bar{y}_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{x}'_\alpha & 0 & -\bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & -\bar{x}'_\alpha & -\bar{y}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -\bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & -\bar{x}_\alpha \\ 0 & -\bar{y}'_\alpha & 0 & -\bar{y}_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -f_0 \\ \bar{x}'_\alpha & 0 & \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}'_\alpha & \bar{y}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

すると 1 次の誤差項 $\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)}$ は次のように書ける。

$$\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} = T_\alpha^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta x_\alpha \\ \Delta y_\alpha \\ \Delta x'_\alpha \\ \Delta y'_\alpha \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (16)$$

$\xi_\alpha^{(k)}$ の共分散行列は次のように書ける ($E[\cdot]$ は期待値を表す) .

$$E[\Delta\xi_\alpha^{(k)} \Delta\xi_\alpha^{(l)}] = \mathbf{T}_\alpha^{(k)} E \left[\begin{pmatrix} \Delta x_\alpha^2 & \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta x_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta x_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta y_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta y_\alpha^2 & \Delta y_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta y_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta x'^2_\alpha & \Delta x'_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta y'_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta y'_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta y'_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta y'^2_\alpha \end{pmatrix} \right] \mathbf{T}_\alpha^{(l)\top} \quad (17)$$

$$= \mathbf{T}_\alpha^{(k)} (\sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{T}_\alpha^{(l)\top} = \sigma^2 \mathbf{T}_\alpha^{(k)} \mathbf{T}_\alpha^{(l)\top} = \sigma^2 V_0^{(kl)} [\xi_\alpha]$$

ただし $V_0^{(kl)} [\xi_\alpha]$ (「正規化共分散行列」と呼ぶ) を次のように定義する .

$$V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \equiv \mathbf{T}_\alpha^{(k)} \mathbf{T}_\alpha^{(l)\top} \quad (18)$$

一方, 2 次の誤差項 $\Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}$ は次のようになる .

$$\Delta_2 \xi_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta x_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta y_\alpha \Delta x'_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 \xi_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha \\ -\Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 \xi_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -\Delta y'_\alpha \Delta x_\alpha \\ -\Delta y'_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \\ \Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha \\ \Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

5. 摂動解析

式 (14) を式 (11) に代入すると次のようになる .

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}) (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)})^\top \quad (20)$$

$$= \bar{\mathbf{M}} + \Delta_1 \mathbf{M} + \Delta_2 \mathbf{M} + \dots$$

ただし, \dots は誤差の 3 次以上の項であり, $\bar{\mathbf{M}}, \Delta_1 \mathbf{M}, \Delta_2 \mathbf{M}$ をそれぞれ次のように定義する .

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top} \quad (21)$$

$$\Delta_1 \mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top}) \quad (22)$$

$$\Delta_2 \mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\bar{\xi}_\alpha^{(k)} \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)\top} + \Delta_2 \xi_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top}) \quad (23)$$

そして, 式 (3) の解 \mathbf{h}, λ を次のように展開する .

$$\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} + \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_2 \mathbf{h} + \dots, \quad \lambda = \bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots \quad (24)$$

いずれもバーがついたものは誤差がないときの値であり, Δ_1, Δ_2 は誤差の 1 次および 2 次の項を表す . 式 (20), (24) を式 (3) に代入すると次のようになる .

$$(\bar{\mathbf{M}} + \Delta_1 \mathbf{M} + \Delta_2 \mathbf{M} + \dots) (\bar{\mathbf{h}} + \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_2 \mathbf{h} + \dots) = (\bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots) \mathbf{N} (\bar{\mathbf{h}} + \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_2 \mathbf{h} + \dots) \quad (25)$$

両辺を展開して誤差の 0 次, 1 次, 2 次の項を等値すると次式を得る .

$$\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{h}} = \bar{\lambda} \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}}, \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{M}} \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}} = \bar{\lambda} \mathbf{N} \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_1 \lambda \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}}, \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{M}} \Delta_2 \mathbf{h} + \Delta_1 \mathbf{M} \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}} = \bar{\lambda} \mathbf{N} \Delta_2 \mathbf{h} + \Delta_1 \lambda \mathbf{N} \Delta_1 \mathbf{h} + \Delta_2 \lambda \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} \quad (28)$$

誤差がない場合は式 (9) が成り立つから $(\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{\mathbf{h}}) = 0$ であり, 式 (21) より $\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ である . したがって式 (26) より $\bar{\lambda} = 0$ である . また, 式 (22) より $(\bar{\mathbf{h}}, \Delta_1 \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{h}}) = 0$ であるから, 式 (27) の両辺と $\bar{\mathbf{h}}$ との内積をとると, $\Delta_1 \lambda = 0$ となる . そして式 (27) の左から一般逆行列 $\bar{\mathbf{M}}^-$ を掛けると次式が得られる .

$$\Delta_1 \mathbf{h} = -\bar{\mathbf{M}}^- \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}} \quad (29)$$

ここで $\bar{\mathbf{M}} \bar{\theta} = \mathbf{0}$ より一般逆行列の定義から $\bar{\mathbf{M}}^- \bar{\mathbf{M}} (\equiv \mathbf{P}_{\bar{\theta}})$ が $\bar{\theta}$ に直交する方向への射影行列になること, および $\|\bar{\theta} + \Delta_1 \theta + \Delta_2 \theta + \dots\|^2 = 1$ を展開して誤差 1 次の項を比較して $(\bar{\theta}, \Delta_1 \theta) = 0$, すなわち $\Delta_1 \theta$ が $\bar{\theta}$ に直交していることを用いた . 式 (29) を式 (28) に代入して, 両辺と $\bar{\mathbf{h}}$ との内積をとると $\Delta_2 \lambda$ が次のように求まる .

$$\Delta_2 \lambda = \frac{(\bar{\mathbf{h}}, \Delta_2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}}) - (\bar{\mathbf{h}}, \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{M}}^- \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}})}{(\bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}})} = \frac{(\bar{\mathbf{h}}, \mathbf{T} \bar{\mathbf{h}})}{(\bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}})} \quad (30)$$

ただし, 次のように置いた .

$$\mathbf{T} = \Delta_2 \mathbf{M} - \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{M}}^- \Delta_1 \mathbf{M} \quad (31)$$

次に 2 次の誤差 $\Delta_2 \mathbf{h}$ を考える . $\bar{\mathbf{h}}$ は伸縮しないから, 誤差として関心があるのは $\bar{\mathbf{h}}$ に直交する成分である . そこで $\Delta_2 \mathbf{h}$ の $\bar{\mathbf{h}}$ に直交する成分を次のように置く .

$$\Delta_2 \mathbf{h}^\perp = \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{h}}}^- \Delta_2 \mathbf{h} (= \bar{\mathbf{M}}^- \bar{\mathbf{M}} \Delta_2 \mathbf{h}) \quad (32)$$

式 (28) の両辺に左から \bar{M}^{-1} を掛けて式 (29) を代入すると次の結果を得る .

$$\begin{aligned}\Delta_2 \mathbf{h}^\perp &= \Delta_2 \lambda \bar{M}^{-1} \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} + \bar{M}^{-1} \Delta_1 \mathbf{M} \bar{M}^{-1} \Delta_1 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}} - \bar{M}^{-1} \Delta_2 \mathbf{M} \bar{\mathbf{h}} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{T} \bar{\mathbf{h}} \\ \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} \end{pmatrix} \bar{M}^{-1} \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} - \bar{M}^{-1} \mathbf{T} \bar{\mathbf{h}}\end{aligned}\quad (33)$$

6. 解の共分散と偏差

式 (29) より, 解 \mathbf{h} の変動を評価する共分散行列の主要項が次のようになる .

$$\begin{aligned}V[\mathbf{h}] &= E[\Delta_1 \mathbf{h} \Delta_1 \mathbf{h}^\top] = \frac{1}{N^2} \bar{M}^{-1} E[(\Delta_1 \mathbf{M} \mathbf{h})(\Delta_1 \mathbf{M} \mathbf{h})^\top] \bar{M}^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2} \bar{M}^{-1} E \left[\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\Delta \xi_\alpha^{(k)}, \mathbf{h}) \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^N \sum_{l=1}^3 (\Delta \xi_\beta^{(l)}, \mathbf{h}) \bar{\xi}_\beta^{(l)\top} \right] \bar{M}^{-1} \\ &= \frac{1}{N^2} \bar{M}^{-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{k, l=1}^3 (\mathbf{h}, E[\Delta \xi_\alpha^{(k)} \Delta \xi_\beta^{(l)\top}] \mathbf{h}) \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\beta^{(l)\top} \bar{M}^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{N^2} \bar{M}^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 (\mathbf{h}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{h}) \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top} \right) \bar{M}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \bar{M}' \bar{M}^{-1} \bar{M}'\end{aligned}\quad (34)$$

ただし \bar{M}' を次のように定義する .

$$\bar{M}' = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 (\bar{\mathbf{h}}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{h}) \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top}\quad (35)$$

式 (34) の導出では ξ_α の誤差が各 α ごとに独立であり, $E[\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\beta^{(l)\top}] = \delta_{\alpha\beta} \sigma^2 V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]$ ($\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタ) となることを用いた .

式 (34) から分かることは, 共分散行列 $V[\mathbf{h}]$ が正規化の重み N に依存しないことである . したがって, N を調節して $V[\mathbf{h}]$ を減らすことはできない . そこで解の偏差に着目する . 1 次の偏差項は $E[\Delta_1 \mathbf{h}] = \mathbf{0}$ であるから, 2 次の偏差項 $E[\Delta_2 \mathbf{h}^\perp]$ を評価する . そのために, 式 (31) の \mathbf{T} の期待値を計算する . 式 (23) より $E[\Delta_2 \mathbf{M}]$ は次のようになる .

$$\begin{aligned}E[\Delta_2 \mathbf{M}] &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \left(\bar{\xi}_\alpha^{(k)} E[\Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}]^\top + E[\Delta_1 \xi_\alpha^{(k)} \Delta_1 \xi_\alpha^{(k)\top}] + E[\Delta_2 \xi_\alpha^{(k)}] \bar{\xi}_\alpha^{(k)\top} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 V_0^{(kk)}[\xi_\alpha] = \sigma^2 \mathbf{N}_T\end{aligned}\quad (36)$$

ただし, 次のように置いた .

$$\mathbf{N}_T = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^3 V_0^{(kk)}[\xi_\alpha]\quad (37)$$

一方, $E[\Delta_1 \mathbf{M} \bar{M}^{-1} \Delta_1 \mathbf{M}]$ は次のようになる (付録) .

$$\begin{aligned}E[\Delta_1 \mathbf{M} \bar{M}^{-1} \Delta_1 \mathbf{M}] &= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(l)}) V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] + 2S[V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top}] \right)\end{aligned}\quad (38)$$

ただし $\text{tr}[\cdot]$ は行列のトレースであり, 記号 $S[\cdot]$ は対称化作用素である ($S[\mathbf{A}] = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)/2$) . 式 (36), (38) より式 (31) の \mathbf{T} の期待値が次のように書ける .

$$\begin{aligned}E[\mathbf{T}] &= \sigma^2 \left(\mathbf{N}_T - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(l)}) V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] + 2S[V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top}] \right) \right)\end{aligned}\quad (39)$$

これを用いると, 式 (33) の $\Delta_2 \mathbf{h}^\perp$ の期待値は次のようになる .

$$E[\Delta_2 \mathbf{h}^\perp] = \bar{M}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}, E[\mathbf{T}] \bar{\mathbf{h}} \\ \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} \end{pmatrix} \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} - E[\mathbf{T}] \bar{\mathbf{h}} \right)\quad (40)$$

7. 高精度代数的解法

本論文の提案は正規化の重み N を次のように選ぶことである .

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{N}_T - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0^{(kl)}[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top} + (\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(l)}) V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \right. \\ &\quad \left. + 2S[V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha^{(k)} \bar{\xi}_\alpha^{(l)\top}] \right)\end{aligned}\quad (41)$$

こうすると式 (39) より $E[\mathbf{T}] = \sigma^2 \mathbf{N}$ であり, 式 (40) は次のようになる .

$$E[\Delta_2 \mathbf{h}^\perp] = \sigma^2 \bar{M}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} \\ \bar{\mathbf{h}}, \mathbf{N} \bar{\mathbf{h}} \end{pmatrix} \mathbf{N} - \mathbf{N} \right) \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{0}\quad (42)$$

式 (41) の重み N は真の値 $\bar{\xi}_\alpha$, \bar{M} を含んでいるが, それらの定義式の中の真の位置 ($\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha$) をデータ (x_α, y_α) で代用する . 注目すべきことは, 式 (25) 中の重み N を $\bar{N} + \Delta_1 N + \Delta_2 N + \dots$ に置き換えても, 式 (25) の右辺そのものが $O(\sigma^2)$ なので, 以下の解析には $\Delta_1 N$, $\Delta_2 N$ が現れないことである . たとえ式 (40) の括弧中に誤差が生じて, 誤差の奇数次の項の期待値は 0 であるから, 全体で $E[\Delta_2 \mathbf{h}^\perp]$ は $O(\sigma^4)$ であり, 2 次の偏差は厳密に 0 になる . この方法を Al-Sharadqah ら¹⁾, Rangarajan ら¹⁵⁾, 岩元ら⁵⁾ にならって「超精度最小二乗法」

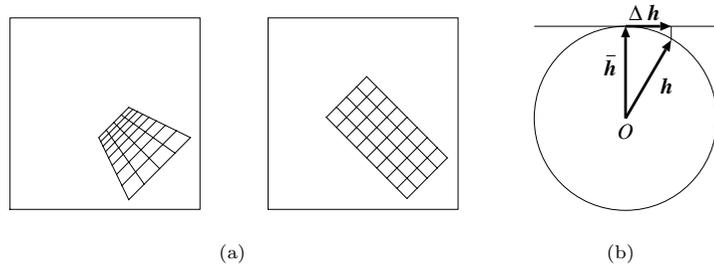


図 2 (a) 平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 . (b) 計算値 h の真の値 \bar{h} に垂直な成分 Δh .

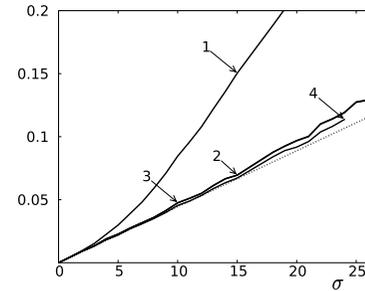


図 3 計算した射影変換の RMS 誤差 . 横軸は加えた誤差の標準偏差 σ . 1. 最小二乗法 . 2. 超精度最小二乗法 . 3. Taubin 近似 . 4. 多拘束 FNS 法 . 多拘束 FNS 法のプロットが途切れているのは、それ以上の誤差では収束しなかったことを示す . 点線は KCR 下界 .

と呼ぶ .

式 (13) の一般固有値問題を解く通常のライブラリツールでは右辺の N が正値対称行列と仮定されているが、式 (41) の N は正値対称行列ではなく、負の固有値を持つ . しかし、式 (13) は次のように書き直せる .

$$Nh = (1/\lambda)Mh \quad (43)$$

式 (11) の行列 M は誤差のあるデータに対しては正値対称行列であるから (誤差がないときのみ最小固有値が 0 となる) , これを解くことによって一般固有ベクトル h が求まる .

式 (41) の右辺第 2 項は $O(1/N)$ であり、 N が大きくなるにつれて小さくなる . そこでこれを省略して $N = N_T$ と置くものを、Taubin 法¹⁹⁾ との類推で「Taubin 近似」と呼ぶ (N_T の要素を具体的に書いたものが式 (1) である) . 円や楕円では Taubin 近似を行うと精度がやや低下する^{1),5),15)} . それに対して射影変換の場合は、以下の実験で示すように Taubin 近似を行っても精度は低下しない . これは、円や楕円の方程式が 2 次多項式であり x^2, y^2 の項を含むために偏差が大きいのに対して、射影変換の式 (4) は分母を払うと x, y, x', y' の双 1 次式であることから偏差が少ないための考えられる .

8. 実 験

図 2(a) は平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 (800 × 800 画素) である . 焦点距離は $f = 600$ (画素) とした . 第 1 画像から第 2 画像への射影変換行列 \bar{H} は次のようになる .

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0.431 & 0.260 & -0.433 \\ 0.260 & 0.431 & -0.433 \\ 0.209 & 0.209 & -0.178 \end{pmatrix} \quad (44)$$

画像中の格子点を特徴点とし、 x, y 座標に独立に期待値 0、標準偏差 σ (画素) の正規乱数誤差を加えてデータとした . そして、計算した射影変換行列 $H = (h_{ij})$ を式 (8) の単位ベクトル h の形に表す . 真の値を \bar{h} 、計算値を \hat{h} とするとき、誤差 Δh を次のように定義する .

$$\Delta h = P_{\bar{h}} \hat{h}, \quad P_{\bar{h}} \equiv I - \bar{h}\bar{h}^T \quad (45)$$

$P_{\bar{h}}$ は \bar{h} に直交する方向に射影した成分を得る射影行列である . 式 (45) は、 \hat{h} が単位ベクトルであって単位球面上に真値 \bar{h} の周りに分布することから、誤差を評価するには \bar{h} に垂直な方向、すなわち球面上の \bar{h} における接平面上で評価すればよいという意味である (図 4(b)) .

各 σ で誤差を変えて 1000 回試行し、その RMS (平方二乗平均) 誤差を次のように評価した .

$$E = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} \|\Delta h^{(a)}\|^2} \quad (46)$$

ただし $\Delta h^{(a)}$ は誤差 Δh の a 回目の試行の値である . 図 3 は横軸に σ をとって最小二乗法、超精度最小二乗法 . その Taubin 近似、および前報¹⁴⁾ で導いた多拘束 FNS 法 (初期値は最小二乗法) の RMS 誤差 E をプロットしたものである . 点線は前報¹⁴⁾ で述べた KCR 下



図 4 パノラマ画像生成の例。(a) 平面を撮影した 2 画像と抽出した対応点。(b) 正しいパノラマ画像。(c) 最小二乗法で計算した射影変換による生成。(d) 多拘束 FNS 法で計算した射影変換による生成。(e) 超精度最小二乗法で計算した射影変換による生成。(f) Taubin 近似によって計算した射影変換による生成。表は射影変換行列の誤差の比較。

界である^{6),7)}。最小二乗法は非常に精度が低く、多拘束 FNS 法の精度が高いことは既に前報¹⁴⁾で示したが、プロットが途中で途切れているのはそれ以上の σ で反復が終了しなかったことを意味する。このように最適推定は反復を要するので収束しないことがあるが、代数的解法は反復を必要としないので常に解が得られる。そして、図 3 から分かるように、超精度最小二乗法とその Taubin 近似は多拘束 FNS 法に匹敵する精度があり、ともに精度の理論限界にほぼ到達していることがわかる。

図 4(a) は平面シーンを異なる方向から撮影した実画像である。図 4(b) は“正解”パノラマ画像であり、両画像から手動で対応点を 26 点を注意深く選び、左画像から右画像への射影変換を多拘束 FNS 法で計算して、OpenCV の cvWarpPerspective ツール^{*1} で合成したものである。画像中の 7 個のマークは autopano-sift ツール^{*2}で抽出した対応点であり、図 4(c) はこれから最小 2 乗法で計算した射影変換によって合成したパノラマ画像である。図 4(d), (e), (f) はそれぞれ超精度最小二乗法, Taubin 近似, および多拘束 FNS 法を用いた結果である。表は図 4(b) に対する値 h を真値とみなして式 (45) の Δh を計算し、 $\|\Delta h\|$ の値を示したものである。この例では最小二乗法は精度が低く、多拘束 FNS 法, 超精度最小二乗法, および Taubin 近似はほぼ同じ精度である。

9. まとめ

本論文では 2 画像の対応点からその射影変換を計算する高精度な代数的解法を提案した^{*3}。理論的には前報¹⁴⁾に発表した最尤推定に基づく多拘束 FNS 法が最適であるが、反復解法であるため、誤差が大きいと収束しないことがある。しかし、提案手法は代数的解法であるため反復なしに解が求まる。代数的解法はすべて同一の共分散行列をもつが、偏差が手法によって異なる。本論文で導いた超精度最小二乗法は正規化の重み行列を 2 次の偏差項まで 0 にするように定めるものである。そして、シミュレーションにより、これが多拘束 FNS と同程度の精度があり、精度の理論限界 (KCR 下界) をほぼ達成すること、および計算を簡略化した Taubin 近似もほぼ同じ精度であることを示した。最後に実画像によるパノラマ画像の生成を行い、提案方法によって精度のよい合成ができることを示した。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 21500172) の助成による。

参考文献

- 1) A. Al-Sharadqah and N. Chernov, Error analysis for circle fitting algorithms, *Electronic J. Statistics*, **3** (2009-8), 886–911.
- 2) 千葉直樹, 蚊野 浩, 美濃導彦, 安田昌司, 画像特徴に基づくイメージモザイクング, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J82-D-II-10** (1999-10), 1581–1589.
- 3) 船本将平, 金澤 靖, 複数の射影変換行列を用いた単眼移動カメラによるシーンの 3 次元復元, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-166-15 (2009-3), 97–104.
- 4) 伊藤吉弘, 金澤 靖, 画像から求めた複数のゆがみ分布による重みを用いた RANSAC に

*1 <http://user.cs.tu-berlin.de/~nowozin/autopano-sift/>

*2 <http://user.cs.tu-berlin.de/~nowozin/autopano-sift>

*3 プログラムを Web 上に公開している。 <http://www.suri.cs.okayama-u.ac.jp/program.html>

- よる画像間の対応付け, 電子情報通信学会論文誌 D, **J89-D-12** (2006-12), 2710–2720.
- 5) 岩元祐輝, P. Rangarajan, 金谷 健一, 楢岡当てはめの超精度最小二乗法, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-168-14 (2009-9), 1–8.
 - 6) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
 - 7) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-88** (1995-8), 1865–1873.
 - 8) 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
 - 9) 金谷 健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.
 - 10) 金澤靖, 太田直哉, 金谷健一, 射影変換行列の最適計算によるモザイク生成, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-116-2 (1999-5), 9–16.
 - 11) 川上裕司, 伊藤吉弘, 金澤 靖, 特徴点の位置分布に基づくランダムサンプリングによる平面領域のロバストな検出法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J88-D-II-2** (2005-2), 313–324.
 - 12) 木山 真伸, 太田 直哉, 金谷 健一, 2 台のカメラと射影変換を用いた侵入者検出, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-118-8 (1999-9), 53–58.
 - 13) 松永力, 金谷健一, 平面パターンを用いる移動カメラのキャリブレーション, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-116-1 (1999-5), 1–8.
 - 14) 新妻弘崇, 金谷 健一, 菅谷 保之, 最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-169-** (2009-11), 1–8.
 - 15) P. Rangarajan and K. Kanatani, Improved algebraic methods for circle fitting, *Elec. J. Stat.*, **3** (2009), 1075–1082.
 - 16) P. Rangarajan and P. Papamichalis, Estimating homographies without normalization, *Poc. Int. Conf. Image Process.*, November 2009, Cairo, Egypt, pp. 3517–3520.
 - 17) 坂本雅俊, 金谷健一, 自由に撮影した画像からの全周疑似ビデオ表示, 情報処理学会研究報告 2008-CVIM-161-14 (2008-1), 87–94.
 - 18) 清水慶行, 太田直哉, 金谷健一, 信頼性評価を備えた最適な射影変換の計算プログラム, 情報処理学会研究報告 98-CVIM-111-5 (1998-5), 33–40.
 - 19) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.
 - 20) 植芝俊夫, 富田文明, 平面パターンを用いた複数カメラシステムのキャリブレーション, 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, **44-SIG17** (2003-12), 89–99.

付録. 式 (38) の導出

$E[\Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M]$ は次のようになる .

$$\begin{aligned}
 E[\Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \left(\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)\top} + \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)\top} \right) \bar{M}^{-1}\right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{N} \sum_{\beta=1}^N \sum_{l=1}^3 \left(\bar{\xi}_{\beta}^{(l)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top} + \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{k, l=1}^3 E[\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)\top} \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top} + \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)\top} \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \\
 &\quad + \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)\top} \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top} + \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)\top} \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top}] \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{k, l=1}^3 E[(\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)}) \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top} + (\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)}) \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \\
 &\quad + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)}) \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top} + \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} (\bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)}, \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}) \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top}] \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \bar{M}^{-1} E[\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top}] \right. \\
 &\quad \left. + \text{tr}[\bar{M}^{-1} E[\Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)} \Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)\top}]] \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)}) E[\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top}] \right. \\
 &\quad \left. + E[\Delta_1 \xi_{\alpha}^{(k)} \Delta_1 \xi_{\beta}^{(l)\top}] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \bar{M}^{-1} \delta_{\alpha\beta} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] + \text{tr}[\bar{M}^{-1} \delta_{\alpha\beta} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}]] \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)}) \delta_{\alpha\beta} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] + \delta_{\alpha\beta} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\beta}^{(l)\top} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} \bar{M}^{-1} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] + \text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}]] \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)}) V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] + V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k, l=1}^3 \left(\text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}]] \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top} + (\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)}) V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \right. \\
 &\quad \left. + 2S[V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_{\alpha}^{(k)} \bar{\xi}_{\alpha}^{(l)\top}] \right) \tag{47}
 \end{aligned}$$