


 入選論文

3次元自由形状設計制御理論とその手法†

穂坂 衛^{††} 木村 文彦^{†††}

本論文は、3次元自由形状の一貫した設計手法の確立を目的として、新しい形状表現式を導入し、それを用いて自由形状を含む対象の幾何モデルを作るための手法について、論じたものである。

まず、制御点列が作る凸体の中に、生成される形状が存在するという仮定のもとに、形状表現式の生成関数を導出する。これは簡潔な形式をもち、数学的に取扱いやすいため、従来扱いにくかった曲線や曲面の曲率、傾斜、接触平面などが簡単に導き出せ、かつ視覚化でき、制御の対象ともなし得た。

形状を合成する技術として、全体から細部に至る変形、独立な要素の結合、枠組をきめて面をはる方法など、各種の方法を考える。そのために、形状セグメントの分割、制御点の増加、面の結合条件の詳細な検討と、その利用の仕方の開発を行った。特に形状設計は平凡でない形を取扱えることが重要であるため、本論文では不規則な4辺形セグメントの結合、非4辺形セグメントの結合などを可能とし、また具体的に入力データとして与えられない諸量を、与えられたデータより得るための内挿式の導出など、従来の理論では触れられなかった重要な問題を解決した。これらにより、前述の目的をほぼ達成できた。

1. ま え が き

この論文は、CADにおける永年の課題であった3次元自由形状の一貫した設計手法の確立を目的とし、形状の幾何学的諸特性の視覚化と制御の容易な形状表現式の導入、ならびにその利用法について記述する。これは、コンピュータを用いて、人の3次元イメージの創造を促進し、それを明確に定義し、形状に関する計算のためのデータや、工業製品としての製造制御のデータを発生できる幾何モデルを作る方法を与えるものである。

自由形状表現にコンピュータを導入することは、60年代から始まり、多くの研究がなされてきたが¹⁾、未だ完全な幾何モデルを作る設計手法がなく、部分的にしか表現式は用いられなかった。形状表現に関数近似の手法を用いることは、座標系に依存し、形状の制御性が悪く、しかも作られた形状は美しさ(fairness——曲率の分布形に関係しているようである)に欠けるので不適切である。60年代には、曲面パッチの数式化に努力が注がれ、Coons²⁾や穂坂³⁾の方法が生れた。しかしそれらは、パッチの接続に強い制限がつくことと、実用のためには多量の計算を必要とすることのため、特定の産業しか利用できなかった。Bézier⁴⁾はこれとは別に、パッチ接続の問題を避けて、多角形辺に

よる曲線制御の方法を考案し、形状表現に新しい道を開いた。その後Riesenfeld⁵⁾はBスプラインの節点を制御点とする方法を提案し、接続問題を表面にもち出さないようにした。これらによって形状制御の概念が明確になってきたが、総合的な設計方法論がないため、現実に必要なとする多様な特徴のある自由形状には適用できず、いくつもの未解決の問題が指摘されていた^{6),7)}。

近年になって、競争の激化と計算コストの低下のため、自由形状の設計製作の合理化は、工業の多くの分野から要望される問題となった。我々はこの要求に答えるためには、自由形状設計全般に適用できる一貫した手法を確立する必要を認め、そのための理論の開発を行った。我々の方法の特徴をあげると次のようになる。

(1) 形状表現式の簡潔化。従来のは複雑な数式となるため見通しを失い、必要な関係が導けなかった。これを反省し、我々は形状は制御点列が凸体をなすとき、その内部に存在するという条件だけから、形状表現式を生成する関数を導き、それを表現式としたため、式が簡潔となり、問題の取扱いが極めて容易となった。

(2) 形状の幾何学的特性量の算出、視覚化と制御への利用。曲線の曲率、傾斜、接触平面、曲面の接平面、曲面の曲率等の量は、従来の表現式では複雑のため考慮の対象にすらなり得なかった。我々の場合はこれらを直観的に導出もできるし、制御の対象ともなし得た。

† A Theory and Methods for 3 Dimensional Free Form Shape Construction by MAMORU HOSAKA (Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo) and FUMIHIKO KIMURA (Faculty of Engineering, University of Tokyo).

†† 東京大学宇宙航空研究所

††† 東京大学工学部精密機械工学科

(3) 形状合成, 制御手法の多様化. 従来のものは合成手段が単一であり, 人のもつイメージ生成能力に対応していない. 我々の場合は, top-down 的設計にも, 異種の module よりの合成にも, 形状枠組規定にも, 種々な方法が利用できるだけでなく, 一部の変更は, 他への影響を限定できるし, 形状の fairness は保たれるし制御できる.

(4) 特徴ある形状の重視. 自由形状を作る目的は特徴あるものを目指すのであって, 平凡な形を作るためではない. 従来の方法は平凡な形状にしか適用できないという欠点をもっていた. 我々の理論が曲率や振率を重視し, 大きくひずんだ不等辺の4辺形や非4辺形の曲面パッチに対する手法をもっているのもこのためである.

(5) 有効な内挿式をもつこと. 従来の理論は, 与えられたデータより形状を規定していくのに, パラメータで微分する量といった現実に捕えにくいデータを隅に与える必要や, またはそれを無視するため形状を規則正しく細分化したデータを与えるといった犠牲を払う必要があった. 我々の場合は理論より導き出される内挿式を用い, 不足の情報を補うため遙かに合理的かつ実用的である.

(6) 幾何モデルとして完全であること. 従来のものは形状の一部しか表現できず, 利用には人手を介させる必要があった. 我々の対象記述は全体に及び, 我々のもつ幾何モデル生成処理システム⁶⁾の要素となるため, モデルより干渉や切断, カッターパスその他各種の計算や表示に必要な幾何学的なデータがとり出せる.

このように我々の理論と手法は内容が豊富であり, 形状設計を人が図式で取扱うにしても, コンピュータを利用するにしても, それぞれの操作に適している. この論文は紙数が限定されているのに, かなりのことが書け, 説明図がフリーハンドで簡単に書けるのも, 理論の単純明解さによる.

2. 制御点列と形状方程式

形状セグメントを表現するために, 曲線では制御点列 $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ (以下 $\{P_i\}_0^n$ と書く)* と, その各点が形状の各部に影響を与える割合を示す影響関数列 $\{f_i(t)\}_0^n$ を考え, 曲線を

$$R(t) = \sum_{i=0}^n P_i \cdot f_i(t) \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

* 以下, 空間ベクトルは太字で表わし, その絶対値は細字とする.

で表わす. t はパラメータ変数で, 0 から 1 に動くとき曲線形状 $R(t)$ を与える. 曲面のときは制御格子点 $\{P_{ij}\}_0^m$ と影響関数マトリックス $\{f_{ij}(u, v)\}_0^m$ を考えて

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} \cdot f_{ij}(u, v) \quad u, v \in [0, 1] \quad (2)$$

で形状を表わす.

形状を制御点によりスムーズに変化させようとするならば, 影響関数は領域内で単峰であり, 正値をとる必要がある. さらに制御点列が凸多角形, あるいは凸体を形成するとき, 曲線, 曲面はその内側に存在するという条件をつける. これより制御点が直線分や平面分内にあるか, あるいは1点に集まると, 生成される形状も同様な性質をもつことになる. そのためには t, u, v の値に関係なく次式が成立しなければならぬ.

$$\sum_{i=0}^n f_i(t) \equiv 1, \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij}(u, v) \equiv 1 \quad (3)$$

これは形状表現が座標変換に関係しない条件でもある. 当然, f_i, f_{ij} などは制御点の個数の関数でもある.

n 個の制御点列 $\{P_i\}_0^{n-1}$ と $\{P_i\}_1^n$ より作られる2つの曲線のパラメータの同じ値で定まる2点を結ぶ直線上に, $n+1$ 個の制御点列 $\{P_i\}_0^n$ で作られる曲線の同じパラメータの値の点があるように規定すれば, 凸体の内部にあるという性質をもつ曲線群は得られるはずである. これを利用して影響関数を生成する関数を導く.

まず制御点列の添字の取扱いを便利するために, $P_{i+1} = EP_i$, $P_{i+1, j} = EP_{i, j}$, $P_{i, j+1} = FP_{i, j}$ のように添字の移動を支配するシフト演算子 E, F を導入する. それらは整数のべき法則 ($E^i \cdot E^j = E^{i+j}$, $E \cdot E^{-1} = 1$) に従うことより, 代数定数として取扱う. 同一の制御点列の要素の線形結合された式に対してこの演算子が作用することは, 各要素ごとに演算子が作用することとする. 別の点列が共存するときには演算子に添字をつけてそれぞれを区別する.

n 個の制御点列より定まる曲線をオーダ n とする. オーダ1の曲線は1点, すなわち制御点 P_i そのものである. オーダ2では, P_i と P_{i+1} を結ぶ直線であり, パラメータ表示では t の1次式となる. これを $R_i(t: 1)$ と書く.

$$R_i(t: 1) = P_i \cdot (1-t) + P_{i+1} \cdot t = (1-t+tE)P_i \quad (4)$$

P_i を t の0次の曲線とみて $P_i = R_i(t: 0)$ と書くとき,

$$\mathbf{R}_i(t:1) = (1-t+tE)\mathbf{R}_i(t:0) \quad (5)$$

上式は0次曲線から1次曲線を作る式であるが、これにならって $n-1$ 次曲線から n 次曲線を作る式を

$$\mathbf{R}_i(t:n) = (1-t+tE)\mathbf{R}_i(t:n-1) \quad (6)$$

と書く。オーダ $n+1$ (t の次数 n) の曲線上の点は、オーダ n の2つの曲線 \mathbf{R}_i と $E\mathbf{R}_i$ の対応点を結んだ直線を $t:1-t$ に分割した点である。あるいは、 $\mathbf{R}_i(t:n-1)$ に $1-t+tE$ が作用して $\mathbf{R}_i(t:n)$ が作られるといってもよい。

オーダ n の曲線が生成されるプロセスをみると、オーダが上がるにつれ新しい制御点が取込まれて、曲線の範囲が広がるが、その中間部分は制御点の影響が平均化されていることになり、次数が上がると次第に曲線の変動が少なくなっていくことがわかる。

(5), (6) より $\{\mathbf{P}_i\}_0^n$ を用いたオーダ $n+1$ の曲線は

$$\mathbf{R}_0(t:n) = (1-t+tE)^n \mathbf{P}_0 \quad (7)$$

となる。(1) と比べてみると

$$f_i(t) = {}_n C_i \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (8)$$

としていることになる。これは前述の $f_i(t)$ の満たすべき条件を備えている。(7) を他の端点 \mathbf{P}_n で表わせれば

$$\mathbf{R}_0(t:n) = \{(1-t)E^{-1} + t\}^n \mathbf{P}_n \quad (9)$$

となる。(1) と比べてみると $(1-t+tE)^n$ が求めようとしていた生成関数である。

曲線 $\mathbf{R}_0(t:n)$ は Bézier が制御多角形の辺 $\{\mathbf{a}_i\}_1^n$ ($\mathbf{a}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}$) に影響関数をかけて別の考え方により導いた曲線式⁴⁾

$$\mathbf{R}_0(t:n) = \mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{(-t)^i}{i!} \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \left\{ \frac{(1-t)^{n-1}}{t} \right\} \cdot \mathbf{a}_i \quad (10)$$

と同じであることは(7)を変形して(10)を求めることで示される。しかし(10)は複雑すぎて見通しが悪く、計算も複雑になり、次節以下に述べる有用な結果はほとんど得られなかった。

制御格子点 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}_0^n$ をもつ曲面の方程式は曲線の場合と同様な方法で得られて次式となる。

$$\mathbf{S}_{00}(u, v: m, n) = (1-u+uE)^m \cdot (1-v+vF)^n \mathbf{P}_{00} \quad (11)$$

\mathbf{P}_{00} の代りに他の端点を用いても同様な式が得られる(式(9)参照)。

また3辺形格子 $\{\mathbf{P}_{i,j}\}_0^{n-1}$ で作られる曲面は、図1に示す面積座標系パラメータ u, v, w を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{00}(u, v, w: n) \\ = (u+vE+wF)^n \mathbf{P}_{00}, \quad u+v+w=1 \end{aligned} \quad (12)$$

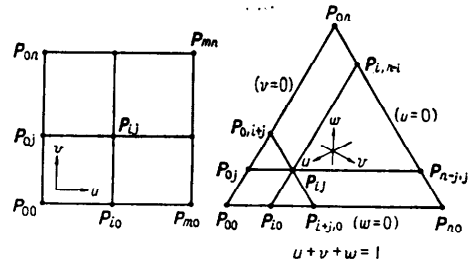


図1 曲面の制御格子点とパラメータ
Fig. 1 Control points and parametric variables of rectangular and triangular patches.

となる。

以下、 $\mathbf{R}_i(t:n)$, $\mathbf{S}_{ij}(u, v: m, n)$, $\mathbf{T}_{ij}(u, v, w: n)$ において添字やパラメータなどは自明のときは省略する。 \mathbf{S} や \mathbf{T} も \mathbf{R} と同様、低次のものの線形内挿より合成され、高次のものほど制御点の影響が平均化された曲面になる。上式は位置ベクトルについて制御点との関係を示したものであるが、一般にこの形式の生成関数を用いたベクトル関数をH形式ということにし、制御点の代りに制御ベクトルと呼び、要素を並べて $\{ \}$ でくくって示す。

3. 微係数や幾何学的諸量と制御点

曲線、曲面式より制御ベクトルと微係数や幾何学的特性量との関係を求める。曲線式 $\mathbf{R}_0(t:n)$ を t で微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} &= (1-t+tE)^{n-1} \cdot (E-1)\mathbf{P}_0 \\ &= \mathbf{R}_1(t:n-1) - \mathbf{R}_0(t:n-1) \end{aligned} \quad (13)$$

これはH形式で、制御ベクトルは辺ベクトル $\{\mathbf{a}_i\}_1^n$ である。また、 $\mathbf{R}_0(t:n)$ を生成するための $\mathbf{R}_1(t:n-1)$ と $\mathbf{R}_0(t:n-1)$ の対応点を結ぶ直線は、 $\mathbf{R}_0(t:n)$ の接線でもあることを示している。

同様なことは \mathbf{S}, \mathbf{T} についてもいえる。例えば、 $\mathbf{S}_{00}(u, v: m, n)$ 上の一点における面の振れ $\partial^2 \mathbf{S} / \partial u \partial v$ は、 $(m-1, n-1)$ 次の $\mathbf{S}_{00}, \mathbf{S}_{11}$ の対応点の midpoint、および $\mathbf{S}_{01}, \mathbf{S}_{10}$ の対応点の midpoint とを結ぶベクトルに比例する。また n 次の \mathbf{T}_{00} の接平面は、 $n-1$ 次の $\mathbf{T}_{00}, \mathbf{T}_{01}, \mathbf{T}_{10}$ の対応点で作られる平面である。以上のことは容易に証明できる。

高次の微係数は次式のようにになる。

$$\frac{(n-j)!}{n!} \cdot \frac{d^j \mathbf{R}_0}{dt^j} = (1-t+tE)^{n-j} (E-1)^j \mathbf{P}_0 \quad (14)$$

これもH形式で表わされるし、そのときの制御ベクトル

は $(E-1)^j P_0$ の形式で、これは $\{P_i\}$ について j 階の前進階差である。高次微係数の端点における値は、 $t=0, t=1$ とおけばよく、制御ベクトル $\{P_i\}$ の始めと終りの各々 $j+1$ 個の要素で表わされる。

これとは逆に、制御点 P_i あるいは P_{n-i} は、曲線の始点あるいは終点での微係数で表わされる。これは次のようにして求められる。

$$P_i = (1+E-1)^i P_0 = \sum_{j=0}^i C_j (E-1)^j P_0 \quad (15)$$

(14) より $(E-1)^j P_0$ は $R_0^{(j)}(0:n) \cdot (n-j)!/n!$ であるから、 P_i は求まる。以上のことは S, T についてもそのままあてはまる。式を求めるのは容易である。

次に曲線や曲面の幾何学的諸量と制御辺ベクトルとの関係を求める。曲線や曲面上の任意の一点は、後節で述べるように制御点列や格子点の端点とすることができ、対応する制御点列や辺ベクトルは定められるので、端点における辺ベクトルを用いて幾何学的諸量を求める。これは非常に単純な表現であり、物理的意味も明確に捕えられるので、形状の解釈や合成に有用である。

位置以外に曲線の形状を特徴づける量として、接線、曲率、接触平面、振率などがある。これらは端点の制御辺ベクトル $\{a_1, a_2, a_3\}$ を用いると次のように表わすことができる。

$$\text{接線単位ベクトル: } \hat{e} = \frac{a_1}{a_1} \quad (16)$$

接触平面: a_1, a_2 で規定される面

(この面内で a_1 に垂直な単位ベクトルを \hat{d} 、
この面に垂直な単位ベクトルを β とする。)

$$\text{曲率: } \frac{1}{\rho} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_2 \cdot \hat{d}}{a_1^2} \quad (17)$$

$$\text{振率: } \frac{1}{\rho_i} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{a_3 \cdot \beta}{(a_2 \cdot \hat{d}) \cdot a_1} \quad (18)$$

曲率は、 a_1 だけ進んだとき、直線よりはずれる角度 $(a_2 \cdot \hat{d})/a_1$ 、振率は、横に曲る角度 $(a_3 \cdot \beta)/(a_2 \cdot \hat{d})$ をそれぞれ a_1 で割ったものである。曲率半径、振率半径は、 a_1, a_2, a_3 より図式にも求めることが可能である。

また、曲面において、隣接する制御格子点間のベクトルを、 u 方向を a_{1i} 、 v 方向を b_{1i} と書く。接平面は a_{10}, b_{01} で規定される面である。その面に垂直なベクトルを \hat{d} とすると、法線は P_{00} を通り、 \hat{d} の方向である。 a_{10} と b_{01} のなす角度を θ とする。 a_{10} と $a_{20} \cdot \hat{d}$ で作る曲率を $1/\rho_1$ 、 b_{01} と $b_{02} \cdot \hat{d}$ で作る曲率を $1/\rho_2$ 、 P_{11} と接平面との距離を δ とすれば、曲面の振率に相

当する量は

$$\frac{1}{\rho_{12}} = \frac{\delta}{a_{10} \cdot b_{01}}$$

となる。端点におけるガウス曲率は

$$K = \left(\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_{12}^2} \right) \text{cosec}^2 \theta \quad (19)$$

平均曲率は

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} - 2 \cos \theta \cdot \frac{1}{\rho_{12}} \right) \text{cosec}^2 \theta \quad (20)$$

で表わせる。これらの式は、その量的算定はもとより、制御ベクトルにより視覚化することも容易であり、図式計算でもできる。これらと微分幾何学の教科書に載っている公式とを比較すれば、その難易の差は一目瞭然である。

4. 形状の分割とオーダの変更

曲線、曲面を分割したり、オーダを上げて、制御点を増加させるための基礎理論を以下に述べる。

4.1 形状の分割

曲線、曲面のセグメントはパラメータ t, u, v, w などが 0 より 1 の間で定義され、形状のオーダに対応した数の制御点が定められている。これらの形状の一部もやはり同じ次数の曲線、曲面であるから、その部分のパラメータを 0 と 1 の間に正規化すれば、これらの形状の一部もやはりその次数に対応した数の制御点をもつのは当然である。

曲線の分割部分に対する制御点の定め方を示す。いま、 $R(t)$ において、 $t=t_0$ で曲線は $R^I(t_1)$ と $R^{II}(t_2)$ に分割されたとする。ここに、 t_1, t_2 は共に $[0, 1]$ を動く。それぞれの制御ベクトルを $\{P_i^I\}_0^n$ 、 $\{P_i^{II}\}_0^n$ とする。それぞれに対する E を E_1, E_2 と書く。 $0 \leq t \leq t_0$ に対して

$$(1-t_1+t_1E_1)^n P_0^I = (1-t+tE)^n P_0$$

である。 $t_1=t/t_0$ であるから上式の右辺は

$$\{1-t_1+t_1 \cdot (1-t_0+t_0E)\}^n P_0$$

となり、これより

$$P_i^I = (1-t_0+t_0E)^i P_0 \quad (21)$$

が得られる。同様に $R^{II}(t_2)$ に対しては

$$P_{n-i}^{II} = \{(1-t_0)E^{-1}+t_0\}^i P_n \quad (22)$$

が得られる (図 2 参照)。

このように、 $n+1$ 個の制御点列 $\{P_i\}_0^n$ で作られていた曲線は、 $2n+1$ 個の制御点列 $\{P_i^I\}_0^n$ 、 $\{P_i^{II}\}_0^n$ をもつようになる。さらにこれは増加させることができる。接合点においては、 t については n 次の微係数

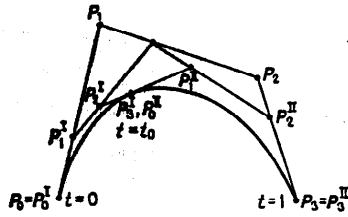


図2 曲線の分割と制御点
Fig. 2 Generation of new control points by curve segmentation.

まで連続であるが、 t_1, t_2 についての微係数は、当然のことながら分割によるスケール比だけ異なる。接合部における結合の条件をゆるめるならば、接合部以外で曲線形状を変更することが可能である (図6参照)。

以上、曲線の分割を述べたが、曲面Sについても、 u を u_0 において u_1, u_2 の変数に、 v を v_0 において v_1, v_2 の変数に分割すると、4つの曲面分 $S^I(u_1, v_1)$, $S^{II}(u_1, v_2)$, $S^{III}(u_2, v_1)$, $S^{IV}(u_2, v_2)$ になる (図3参照)。

$$S^I(u_1, v_1) = (1-u_1+u_1E_1)^u \cdot (1-v_1+v_1F_1)^v \cdot P_{00}^I \quad (23)$$

$$P_{ij}^I = (1-u_0+u_0E)^i \cdot (1-v_0+v_0F)^j \cdot P_{00} \quad (24)$$

他の面分についても同様の式が求まる。曲面を分割し

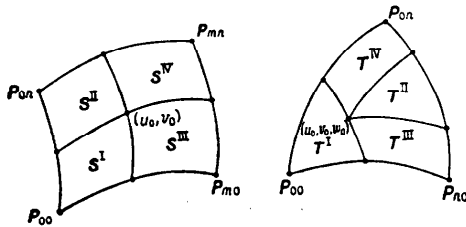


図3 曲面の分割
Fig. 3 Segmentation of rectangular and triangular patches.

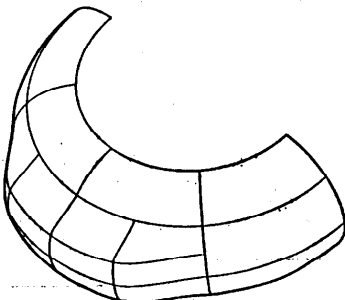


図4 分割とオフセットによる曲面形状制御の一例
Fig. 4 An example of surface synthesis with segmentation and offset.

て形状制御した例を図4に示す。

3辺形曲面Tの場合には、図3に示すような (u_0, v_0, w_0) 点での分割に対し、曲面 T^I, T^{II} は次式のようなになる。

$$T^I(u_1, v_1, w_1) = (u_1+v_1E_1+w_1F_1)^u \cdot P_{00}^I \quad (25)$$

$$T^{II}(u_2, v_2, w_2) = (u_2+v_2E_2+w_2F_2)^u \cdot P_{00}^{II}$$

それぞれの制御点は

$$P_{ij}^I = \{u_0 + (1-u_0)E\}^i \cdot \{u_0 + (1-u_0)F\}^j \cdot P_{00}$$

$$P_{ij}^{II} = \{(1-w_0) + w_0E^{-1}F\}^i \cdot \{(1-v_0) + v_0EF^{-1}\}^j \cdot \{u_0 + v_0E + w_0F\}^{n-i-j} \cdot P_{ij} \quad (26)$$

で与えられる。これらは、

$$u_1 = \frac{u-u_0}{1-u_0}, \quad v_1 = \frac{v}{1-u_0}, \quad w_1 = \frac{w}{1-u_0}$$

$$u_2 = \frac{u}{u_0}, \quad v_2 = \frac{v-v_0}{u_0}, \quad w_2 = \frac{w-w_0}{u_0}$$

とおき、 $T(u, v, w)$ に代入して整理することで求められる。残りの領域III, IVについても同様の式を導くことができる。

4.2 形状のオーダ増加

制御点列 $\{P_i\}_0^n$ より作られる n 次の曲線を見かけ上の次数 $n+1$ 次で表わしたいときには、新しく制御点 $\{Q_i\}_0^{n+1}$ を次式により定めなければならない。

$$(1-t+tE)^n \cdot P_0 = (1-t+tE)^{n+1} \cdot Q_0 \quad (27)$$

上式の左辺に $(1-t)+t$ をかけると、次数は見かけ上 $n+1$ となる。

$$(1-t+tE)^n \cdot \{(1-t)+t\} P_0$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^n {}_n C_i (tE)^i (1-t)^{n+1-i} \right. \\ \left. + E^{-1} \sum_{i=0}^n {}_n C_i (tE)^{i+1} (1-t)^{n-i} \right\} P_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \frac{n+1-i}{n+1} + \frac{i}{n+1} E^{-1} \right\} \\ \cdot {}_{n+1} C_i (tE)^i (1-t)^{n+1-i} P_0 \quad (28)$$

ここで

$$Q_i = \left(\frac{n+1-i}{n+1} + \frac{i}{n+1} E^{-1} \right) P_i \quad (29)$$

のように Q_i をとれば、(28)から $(1-t+tE)^{n+1} Q_0$ が得られる (図5参照)。新しい制御点は P_{i-1} と P_i の間を $n+1-i:i$ に分割する点である。したがって、 a_i 上に必ず Q_i があり、 Q_0, Q_{n+1} は P_0, P_n に一致する。新しい制御辺ベクトルは、前の隣接する辺ベクトルより内側にある。したがって n を増大していけば、辺多角形は曲線に限りなく近づいていく。制御点を増

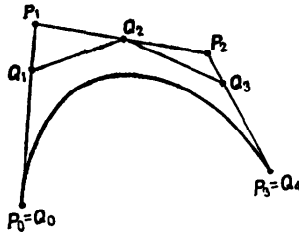
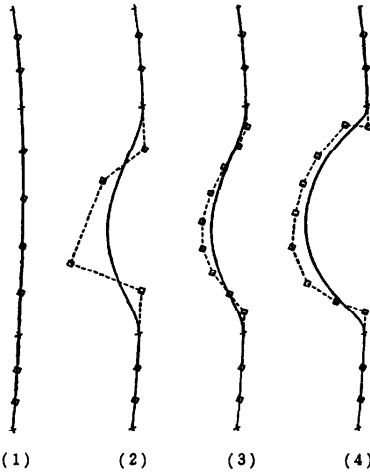


図5 見かけの次数の増加と制御点
Fig. 5 Generation of new control points by order raising.



× 曲線の接続点
□ 曲線の制御点
(1) 中央部分を3次から5次に変更し, (2) 制御点を移動し, (3) 更に10次へ上げ, (4) 制御点を動かす.

図6 分割と高次化による曲線形状制御の一例
Fig. 6 An example of curve synthesis with segmentation and order raising.

加した状態で、それを移動させれば、形状制御が容易になる。単一の3次曲線を分割と高次化により制御した一例を図6に示す。

S および T についても、次数を1だけ増加したときの新制御点は次式で定められる。

$$S: Q_{i,j} = \frac{1}{m+1} \cdot (m+1-i+iE^{-1}) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (n+1-j+jF^{-1}) P_{i,j} \quad (30)$$

$$T: Q_{i,j} = \frac{1}{n+1} \cdot \{(n+1-i-j) + iE^{-1} + jF^{-1}\} P_{i,j}$$

(27)の左辺に $\{(1-t)+t\}^k$ を掛ければ、見かけ上 $n+k$ 次の制御点を定めることができる。高次化による曲面制御の一例を図7に示す。

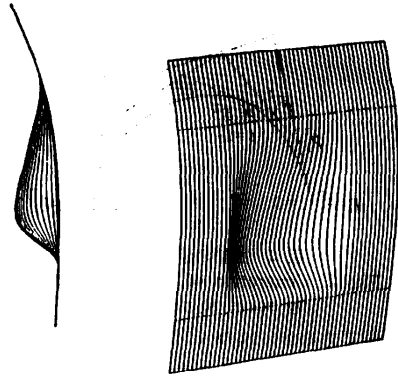


図7 分割と高次化による曲面形状制御の一例
Fig. 7 An example of surface synthesis with segmentation and order raising.

5. 曲線、曲面セグメントの接続

単一のセグメントを、前節までに述べた方法で制御点を増加させ変形させても、目的とする形状に到達するには労力がある。そのため目的とする形状を分割して作り、それらを結合して目的の形にする方法を確立する必要がある。曲線の接続では曲率まで連続であれば実用上十分であろう。曲面の接続においては、2面の境界線上で接平面が連続で実用上十分と思われるが、3面以上の面が交わる所ではガウスあるいは平均曲率の連続性を確保する方がよい。なぜなら2面の境界線ではすでに境界線方向についての曲率は連続になっているが、3面以上が交わる所では、どの方向の曲率も不連続であることは、結合して作られた曲面の質を低下させるからである。

5.1 曲線の生成と結合

曲線の結合では、両者同じ次数としてよい。両者は結合部で曲率までの連続性を確保させる。制御ベクトル、辺ベクトルの間に次の関係がある (図8参照)。

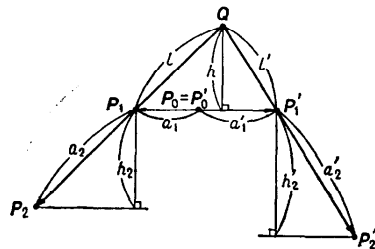


図8 曲率連続なる曲線の接続
Fig. 8 Connection of space curves with tangent and curvature continuity.

$$P_0 = P_0'$$

$$a_1 = -k \cdot a_1' \quad (31)$$

$$\frac{a_2 \cdot \hat{b}}{a_1^2} = \frac{a_2' \cdot \hat{b}}{a_1'^2} \quad \text{: 曲率連続の条件}$$

a_2' と a_2' の延長は接触平面内の点 Q で交わる. Q 点より a_1 への垂線の長さを h とする. 図8より

$$k = \frac{a_1}{a_1'}, \quad k_a \equiv \frac{a_2}{l} = \frac{h_2}{h}, \quad k_b \equiv \frac{l'}{a_2'} = \frac{h}{h_2'} \quad (32)$$

これと(31)より

$$k = \frac{a_1}{a_1'} = \sqrt{\frac{h_2}{h_2'}} = \sqrt{k_a \cdot k_b} \quad (33)$$

このような関係をもたせれば, 曲率連続で曲線は接続できる. 曲線を3次とすると, 新しく Q を制御点と考へて, 点列 $\{Q_i\}$ を作り, 各辺を3分割し, 一つの頂点について $\overline{P_i P_i'}$ を(33)の関係に従い $k:1$ に分割して P_0 を定めれば, P_0 において曲率 $(2/3) \cdot (h_2/a_1^2)$ で $\overline{P_1 P_1'}$ に接して結合する曲線が得られる.

簡単のため, $k_a = k_b$ とすれば, それは k に等しい. この条件のもとで図9に示すような割合で各辺を3分割する. 新制御点 Q_i に対応して曲線の結合点を P_i とすれば, P_i と Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1} との間に次の関係がある.

$$\frac{Q_{i-1} + k_i \cdot (1 + k_{i-1}) \cdot Q_i}{1 + k_i \cdot (1 + k_{i-1})} + \frac{k_i \cdot (1 + k_{i+1}) \cdot Q_i + k_i^2 \cdot k_{i+1} \cdot Q_{i+1}}{1 + k_{i+1} \cdot (1 + k_i)}$$

$$= (1 + k_i) \cdot P_i \quad (34)$$

(34)で k_i がすべて1の場合は次式のように単純になる.

$$Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1} = 6P_i \quad (35)$$

(34)あるいは(35)の用途の一つは Q_i などから P_i を出すことである. Q_i の移動によって影響を受けるの

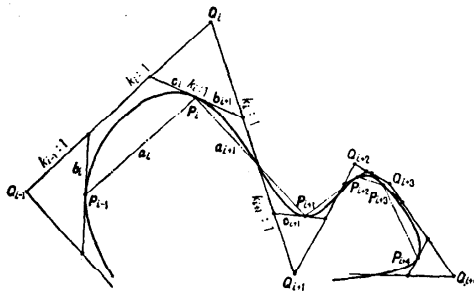


図9 曲率連続なる曲線の生成と新制御点 Q_i
Fig. 9 Generation of a smooth curve with new control points Q_i 's.

は P_{i-1}, P_i, P_{i+1} までであるから, 曲線の形状に及ぼす影響も4つのセグメントに限定され, しかも連続性には影響を与えない. これは形状の局所的制御に好都合である. いわゆるパラメトリックのBスプラインはこの $k_i=1$ の場合である.

また, (34)あるいは(35)は $\{P_i\}$ が与えられていて, それから $\{Q_i\}$ を定め, $\{P_i\}$ を通る連続な曲線を求めるのに有効である. (34), (35) を3次曲線セグメントの制御辺ベクトルで表わす. 式を簡単にするため, ここでは従来の $a_1, a_2, a_1 + a_2 + a_3$ の代りに新しく b, c, a を用い, これに添字をつけて各セグメントを区別する. a は弦ベクトルである. (34)に対して,

$$b_i + 2k_i \cdot (1 + k_i) \cdot b_{i+1} + k_i^2 \cdot c_{i+1} = a_i + k_i^2 \cdot a_{i+1}$$

$$c_i = k_i \cdot b_{i+1} \quad (36)$$

(35)に対して

$$b_i + 4b_{i+1} + b_{i+2} = a_i + a_{i+1} \quad (37)$$

が得られる. 両端点での曲率を0とするならば, 次式が境界条件として与えられる.

$$2b_1 + c_1 = a_1$$

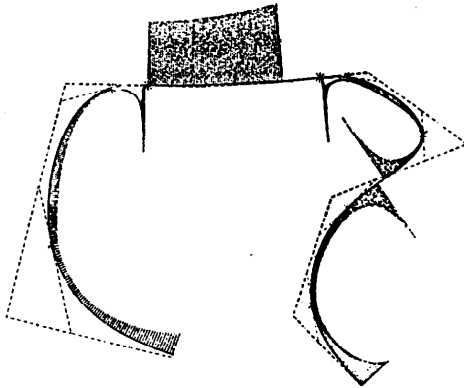
$$b_n + 2c_n = a_n \quad (38)$$

この連立方程式を解いて曲線の各セグメントを作ることができる. 式(36)は空間の弦ベクトル $\{a_i\}$ を与えて $\{P_i\}$ を通る曲線を求める式であるが, a_i は空間の弦ベクトルである必要はない. これは一般のベクトルの内挿式として利用できる. これらの式はすでに穂坂の以前の論文³⁾で別の方法で導かれ, 我が国の自動車企業などで最もよい内挿式として利用されている.

ここで問題になるのは k_i である. k_i の値は Q_i の作る多角形の形と P_i の作る多角形の形の関係を支配している (図9参照). 弦 a_i と a_{i+1} の大きさが極端に異なるところでも k_i の大きさを1にとることは極めて不自然であることは形を描いてみればすぐ理解できるから, k_i は a_i/a_{i+1} (これを r_i とおく) の関数とすべきであろう. ここでは $\omega > 0$ として

$$k_i = \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^\omega = r_i^\omega \quad (39)$$

とする. 多くの実験によれば, $\omega=0$ は具合が悪く, 工業界では $\omega=1$ や $\omega=1/2$ が用いられている. 両者の差が曲線形状へ及ぼす影響はわずかであるが, どちらがよいかは人の主観によるようである. なお, 曲面接続の場合の便宜と, $\omega=1$ と $1/2$ の妥協を考へて, 以下の式を用いるのがよいと思われる.



* 接続点

(曲線に沿って曲率半径の $1/20$ の長さを表示している。
曲率半径がある程度より大きいときは表示しない。)

図 10 接続点が不等間隔で与えられたときの曲線生成例
Fig. 10 An example of a smooth curve passing through arbitrarily specified points with curvature distribution.

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_i < \frac{2}{3} & k_i = \frac{3}{2} r_i \\ \frac{2}{3} \leq r_i \leq \frac{3}{2} & k_i = 1 \\ r_i > \frac{3}{2} & k_i = \frac{2}{3} r_i \end{array} \right. \quad (40)$$

1 と大きく異なる k_i が存在する場合の曲線生成例を曲率半径の分布と共に図 10 に示す。

5.2 曲面の生成と結合

(34) あるいは (35) において点列 $\{Q_i\}$ と、比の列 $\{k_i\}$ を与えれば、それより連続な曲線が発生できる。 $\{Q_i\}, \{k_i\}$ がさらに別のパラメータの値によって変化するものとすれば、これにより曲面が生成される。 Q_i の動きは $\{Q_{ij}\}_{j=0}^n$ という点列で規定できる。 k_i は変化しないとすると、 Q_{ij} はこの曲面に対する制御点と考えてよい。このようにして作られた曲面は、曲面セグメントが接続され、その連続性を保証する諸条件は自動的に満たされている。この代償として、接続の境界線などの条件を直接に指定できず、方程式(34)を解いて逆に $\{Q_{ij}\}$ を求めなければならない。

このように曲線の制御点の移動によって面を張る場合は考えやすいが、面の境界線が与えられて面を作ることは幾分面倒である。その理由は、与えられた境界線をもつ面を定めることは容易であるが、境界線上で隣の面と同一の接平面をもたすことと、いくつもの面が同一点に集まった点での捩れの量を決定することなどが発生するからである。

図 11 のように面 S^{II} に S^I と S^{III} が P 点を共有し

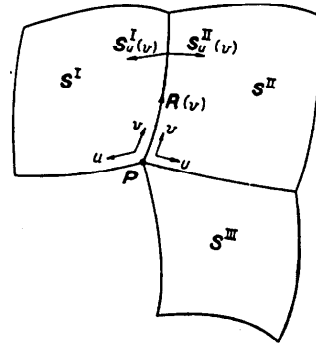


図 11 曲面の接続

Fig. 11 Smooth connection of surface patches.

て接している。面 S^I と S^{II} の共有境界線 $R(v)$ に沿って接平面を共通にするためには、その上の各点での両曲面の u 方向の接線ベクトル (これを以後第 1 接線ベクトルという) の和が v 方向を規定する境界線の接線ベクトル (以後第 2 接線ベクトルという) に等しくなっていればよいのであるから、 λ, μ, ν を v のスカラー関数として次式が成立する必要がある。

$$\lambda(v) \cdot S_u^I(v) + \mu(v) \cdot S_u^{II}(v) = \nu(v) \cdot \dot{R}(v) \quad (41)$$

この各項を同一次数の H 形式とすることはできるから、それらの成分ベクトルの間の式が得られる。それより接線 S_u^I, S_u^{II} の制御辺ベクトル $\{a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}\}$ の間の関係が定まる。次に S^{II} と S^{III} との共有境界線においても同様な関係が得られて、 $\{b_{01}, b_{11}, \dots, b_{n1}\}$ の間の関係が定まる。ここで面 S^{II} については、 u 方向と v 方向の接線が制御点 P_{11} を共有することより

$$b_{11} - a_{11} = b_{01} - a_{10} \quad (42)$$

の関係が必要となる。 P 点のまわりのすべての面に対して、 P 点での接平面共有以外に、それぞれの面の a_{11}, b_{11} の間に (42) のような関係が満たされる必要がある。

5.2.1 各ノードにおける接線ベクトル比が等しい場合の曲面接続

図 12 のように境界線が網を作り、各ノードにおける u 方向、 v 方向の境界線はそれぞれ曲率まで連続とし、接線ベクトルの大きさの比は u 方向、 v 方向各々一定で k_1, k_2 であるとする。曲面の接線ベクトルは $u=0$ あるいは $v=0$ の境界線上で次式のように表わされる。

$$S_u(v) = 3 \cdot (1-v+vF)^3 \cdot a_{10} \quad (43)$$

$$S_v(u) = 3 \cdot (1-u+uE)^3 \cdot b_{01} \quad (44)$$

各面が接平面連続で接続するためには、境界線をはさんで両面の対応する $\{a_{11}\}, \{b_{11}\}$ について次式が成立

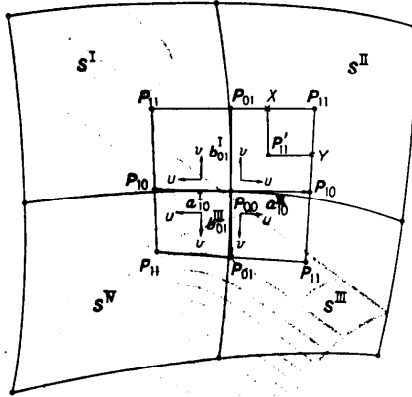


図 12 格子状境界線をもつ曲面の接続
Fig. 12 Smooth connection of surface patches with regular-mesh boundary.

すれば十分である。

$$\begin{aligned} k_1 \cdot a_{11}^I &= -a_{11}^{II} \\ k_2 \cdot b_{11}^{III} &= -b_{11}^{II}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (45)$$

また(42)の条件は面I, 面IIIについては満たされているものとする, 面II, 面IVについては次式が成立しなければならぬ。

$$\begin{aligned} k_2 \cdot b_{11}^{III} - k_1 \cdot a_{11}^I &= k_2 \cdot b_{01}^{III} - k_1 \cdot a_{10}^I \\ \frac{1}{k_2} \cdot b_{11}^I - \frac{1}{k_1} \cdot a_{11}^{III} &= \frac{1}{k_2} \cdot b_{01}^I - \frac{1}{k_1} \cdot a_{10}^{III} \end{aligned} \quad (46)$$

この条件のもとでは, 各 P_{11} を順次に結ぶ空間4辺形の各辺は必ず P_{10} が P_{01} を通過することが証明できる。次に与えられた境界線メッシュより各 P_{11} を求める方法を述べる。 v 方向の境界線の各ノードにおける u 方向境界線の接線ベクトル S_u が与えられているので, 内挿方程式(36)において a の代りに隣り合うノードにおける S_u 間の相対ベクトルを用いれば, 同式の b の代りに S_{uv} が求まる。同様に u 方向の各ノードにおける S_v の値を用いて, 内挿式により S_{uv} が得られる。この両者の平均を用い, 次式より P_{11} が得られる。

$$\begin{aligned} P_{11} &= EFP_{00} \\ &= P_{00} + (E-1)P_{00} + (F-1)P_{00} + \frac{1}{n^2} \cdot S_{uv} \end{aligned} \quad (47)$$

一つの面に対する P_{11} が求まれば, 他の P_{11} は(45)より定まる。

5.2.2 各ノードにおける接線ベクトル比が異なる場合の曲面接続

このときは, 面II, 面IVは, 境界は3次であるが, 内部は 5×5 次の面とする。面IIについて, $3 \times$

3次としたときの $\overline{P_{01}P_{11}}$ と $\overline{P_{10}P_{11}}$ をそれぞれ 9:16 に分割した点 (X, Y) より b_{01}, a_{10} に平行な直線を引くと, その交点が 5×5 次の面の P_{11}' となる。面I と面IIの接続条件を求めるには, (41)で

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= k_1 \cdot (1-v)^2 + k_1' \cdot v^2 \\ \mu &= 1 \end{aligned} \quad (48)$$

$$v(v) = \eta_1 \cdot v \cdot (1-v)^2 + \eta_1' \cdot v^2 \cdot (1-v)$$

とおけばよく, k_1 は $v=0$ の端点における接線ベクトル比, η_1 は図12で $\overline{XP_{11}'} = (8/25) \cdot \eta_1 \cdot b_{01}$ なる量である。 k_1', η_1' は $v=1$ の端点における同様な量である。これらの量を用いて面IIの $\{a_{11}\}_5$ を面Iの $\{a_{11}\}_3$ で表わすことができる。

5.2.2 は非常に一般的な形状に対して適用できる方法である。5.2.1, 5.2.2 とともにノードにおける曲面の曲率は連続である。

5.3 非4辺形パッチの生成

4辺形セグメントを結合することによって, 各種の非4辺形のパッチを合成することができる。その方法は前節の曲面の接続の手法を用いばよいのである。ここでは多角形パッチを, 4辺形および3辺形セグメントをそれぞれ中心点のまわりに対称的に結合して生成する場合, 3辺形と4辺形セグメントを結合する場合とを述べる。

5.3.1 4辺形セグメントの結合

中心点 O を4辺形セグメントの1つの端点とし, そのまわりに n 個の4辺形セグメントを図13のように配置するものとする。各境界線の第2制御点 P_i は第1制御点 O と共に接平面上にある。簡単のために第2

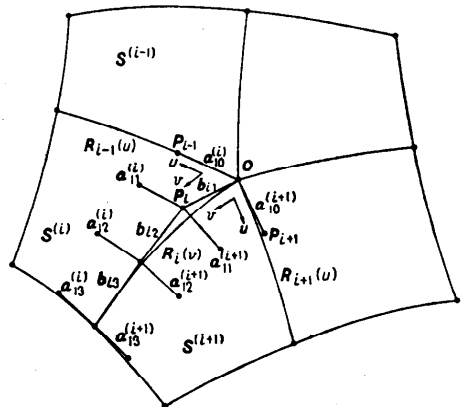


図 13 4辺形セグメントの結合による多角形パッチの生成
Fig. 13 Connection of rectangular surface segments.

制御点は正 \$n\$ 角形の頂点であるとする。境界線 \$R_i(t)\$ を3次とし、その制御辺ベクトルを \$\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \mathbf{b}_{i3}\$ と書く。境界線の接線ベクトル \$\dot{R}_i(t)\$ に \$\nu \cdot (1-t)\$ を乗じたものを3次のH形式にすると、その制御ベクトルは

$$\left\{ \nu \cdot \mathbf{b}_{i1}, \frac{2}{3} \cdot \nu \cdot \mathbf{b}_{i2}, \frac{1}{3} \cdot \nu \cdot \mathbf{b}_{i3}, 0 \right\} \quad (49)$$

である。いま面 \$i\$ と \$i+1\$ の境界を \$u=0\$ として \$R_i(v)\$ と書く。境界 \$R_{i-1}, R_{i+1}\$ はそれぞれ \$v=0\$ で \$R_{i-1}(u), R_{i+1}(u)\$ であるとする。境界 \$R_i\$ の上で次式を成立させる。

$$S_i^{(i)} + S_i^{(i+1)} = \nu \cdot (1-v) \cdot \dot{R}_i(v) \quad (50)$$

(49)を用いて制御ベクトルの関係を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{10}^{(i)} + \mathbf{a}_{10}^{(i+1)} &= \nu \cdot \mathbf{b}_{i1} \\ \mathbf{a}_{11}^{(i)} + \mathbf{a}_{11}^{(i+1)} &= \frac{2}{3} \cdot \nu \cdot \mathbf{b}_{i2} \\ \mathbf{a}_{12}^{(i)} + \mathbf{a}_{12}^{(i+1)} &= \frac{1}{3} \cdot \nu \cdot \mathbf{b}_{i3} \\ \mathbf{a}_{13}^{(i)} + \mathbf{a}_{13}^{(i+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (51)$$

また記号の定義により、次の関係がある。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{10}^{(i)} &= \mathbf{b}_{i-1,1} \\ \mathbf{a}_{10}^{(i+1)} &= \mathbf{b}_{i+1,1} \end{aligned} \quad (52)$$

この関係と(51)の第1式より \$\nu = 2 \cdot \cos(2\pi/n)\$ となる。第2式は各面の \$P_{11}\$ を定めるもので、面 \$i\$ と面 \$i+1\$ の \$P_{11}\$ はベクトル \$\mathbf{b}_{i2}\$ に関して対称の位置にある。もし \$\mathbf{b}_{i2}\$ 自身が点 \$O\$ を通る接平面の法線に関して回転対称の位置にあれば、各 \$P_{11}\$ は容易に定まる。第3, 第4の式は \$P_{21}, P_{31}, P_{12}, P_{13}\$ を定めるもので、特別の他の条件はなく求まる。残りの \$P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{33}\$ は任意である。もし2次であれば、任意のものは \$P_{22}\$ だけになる。

3辺形や5辺形パッチは通常、立体の隅のところに現れる。この方法で作られたパッチを用いれば、4辺形パッチだけで取扱うことになり、機械で扱うには便利である。図14に6辺形の一例を示す。

5.3.2 3辺形セグメントの結合

3辺形セグメントを

$$T = (u + vE + wF)^3 P_{00} \quad (53)$$

として、図15のように \$P_{00}\$ のまわりに境界線を共有して3辺形セグメントを配置する。境界を \$w=0\$ で合う。その境界線の制御辺ベクトルを \$\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}\$ とする。\$w\$ 方向の接線は

$$\frac{dT}{dw} = \frac{\partial T}{\partial w} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial v} \right)$$

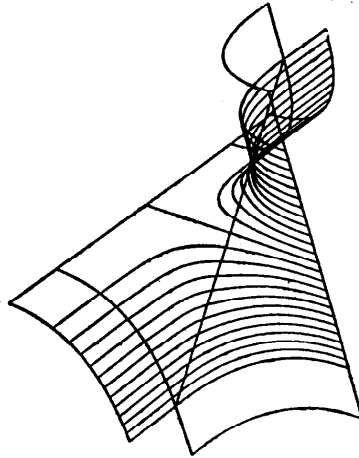


図14 4辺形セグメントの結合による多角形パッチの生成例(曲面の等高線も示す)
Fig. 14 An example of a hexagonal patch made of rectangular surface segments.

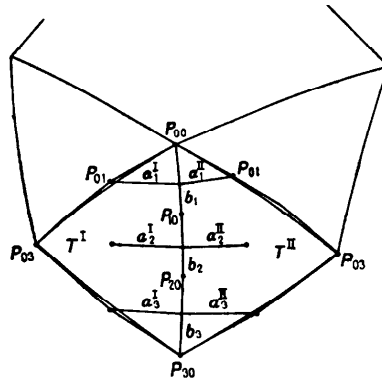


図15 3辺形セグメントの結合による多角形パッチの生成
Fig. 15 Connection of triangular surface segments.

$$= 3 \cdot \left\{ F - \frac{1}{2}(1 + E) \right\} \cdot (u + vE)^2 P_{00} \quad (54)$$

であるから、面 I と面 II が接平面連続であるためには、

$$\mathbf{a}_i = P_{i-1,1} - \frac{1}{2} \cdot (P_{i-1,0} + P_{i0}) \quad (55)$$

とおくと

$$\lambda \cdot \mathbf{a}_i^I + \mu \cdot \mathbf{a}_i^{II} = \nu \cdot \mathbf{b}_i \quad (56)$$

の関係が成立するように \$P_{i-1,1}\$ を定めていけばよい。頂点 \$P_{00}\$ に集まるすべての面について、\$P_{00}, P_{01}, P_{10}\$ は同一平面上にあり、それは接平面である。いま各面の \$P_{10}, P_{01}\$ が正 \$n\$ 角形をなすようにとり、\$\theta\$ を \$\mathbf{a}_1\$ と \$\mathbf{b}_1\$ のなす角度とすれば、\$\lambda = \mu = 1, \nu = 2 \cdot \cos \theta\$ と

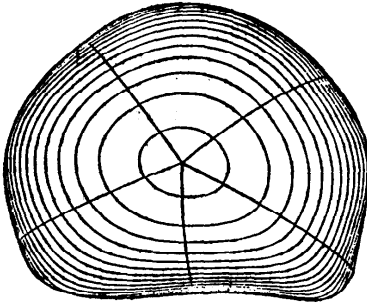


図 16 3 辺形セグメントの結合による多角形パッチの生成例。等高線も示す
Fig. 16 An example of a pentagonal patch made of triangular surface segments.

なる。各面の P_{11} は各 b_2 に対称性があれば定めるのは容易であるが、そうでなければより複雑である。 $i=3$ に関しては、他と干渉がないから、 P_{21}, P_{12} は容易に決められる。

この種の面の生成例として 5 辺形パッチを図 16 に示す。

5.3.3 4 辺形セグメントと 3 辺形セグメントの結合

3 辺形セグメントだけで形状を作ることは一般にはなく、4 辺形が入りこんでくるから、その接続方法をしておく必要がある。

図 17 に示すように、 T の $w=0$ の境界に 3 次 S が接平面連続で接続し、両側の境界線も連続になるようにする場合を考える。 T の $w=0$ の境界に沿っての第 1 接線ベクトルを求める。その境界の端点では $v=0$ と $u=0$ の境界線の接線ベクトルに一致するためには、次の形の微分が必要である。

$$\frac{d}{dw} = \frac{\partial}{\partial w} - (1-v) \cdot \frac{\partial}{\partial u} - v \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

これを用いて、 $w=0$ の辺では

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dw} &= 3 \cdot \{F - (1-v) - E \cdot v\} (u+vE)^2 P_{00} \\ &= 3 \cdot \{(u+vE)^2 F - (u+vE)^3\} P_{00} \end{aligned} \quad (57)$$

第 1 項を 3 次になおすと、制御点は

$$\begin{aligned} \{P_{0i}'\} &= \left\{ P_{01}, P_{01} + \frac{2}{3}(P_{11} - P_{01}), P_{21} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3}(P_{11} - P_{21}), P_{21} \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

となる。この $\{P_{0i}'\}$ を用いると 3 辺形セグメントは 4 辺形セグメントとみなせる。この接線方向は $3 \cdot (1-v+vE)^3 \cdot (P_{01}' - P_{00})$ であり、この擬似 4 辺形セグメントと境界線を共有する 4 辺形セグメントの接続を

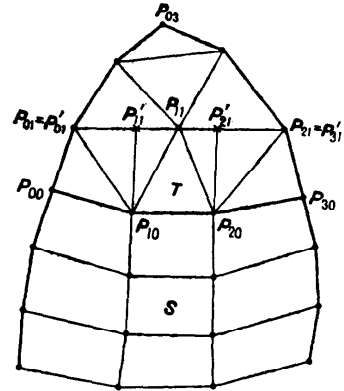


図 17 3 辺形セグメントと 4 辺形セグメントの結合
Fig. 17 Connection of triangular and rectangular surface segments.

考えればよい。これは 5.2.1 に述べた。 T の $u=0$, $v=0$ の境界線を通して 4 辺形セグメントが同様に接続できる。

6. むすび

我々の幾何モデル生成処理システムの要素として自由形状を取入れるために、一貫してそれを取扱える設計制御の理論を開発し、まえばきに述べた特徴をもつことを目指し、その目的を達成できた。この理論や手法の今後の展開や応用は多いが、基本理論と手法は完成したとみてよいであろう。

かつて著者の一人はコンピュータグラフィックスを取扱い始めたとき、曲面に関する Coons 理論の不備に気づき、独自に理論を展開し、それが実用になったため、この問題から離れた。74 年になって Bézier の理論が欧州でもはやされていることを知り、制御多角形の考えに感心し、また B スプラインもその頃知ったが、結局、これらも不十分であることがわかり、特徴ある形状表現を含めた設計制御のための手法を考え直すことが必要であると思っていた。近年、工業界の要求が次第に強くなったので、新理論の展開と設計方法論の確立を積極的にすすめた。その間、著者の他の一人は、理論を適用し、具体的に長所や欠点を確かめ、理論や手法開発へのフィードバックを行った。この他、岐阜大学工学部黒田満氏は詳細な討論によってこの仕事の開発に貢献した。また、企業は、実際に手法を適用し、その情報を著者にもどした。これら関係者に厚く感謝する。

参考文献

- 1) Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F. (ed.): Computer Aided Geometric Design, Academic Press, New York (1974).
- 2) Coons, S. A.: Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms, MIT Project MAC TR-41 (1967).
- 3) 穂坂 衛: 曲線, 曲面の合成および平滑化理論, 情報処理, Vol. 10, No. 3, pp. 121-131 (1969).
- 4) Bézier, P. E.: Numerical Control—Mathematics and Applications, John Wiley and Sons, London (1972).
- 5) Riesenfeld, R. F.: Applications of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, Univ. of Utah, UTEC-CSc-73-126 (1973).
- 6) Forrest, A. R.: Computational Geometry—Achievements and Problems, in (1), pp. 17-44.
- 7) Forrest, A. R.: Recent Trends in Computer-Aided Geometric Design, Proc. Conf. Interactive Techniques in Computer Aided Design, pp. 141-146, 78 CH 1289-8 C, IEEE, New York (1978).
- 8) Hosaka, M. and Kimura, F.: An Interactive Geometrical Design System with Handwriting Input, Information Processing 77, pp. 167-172, North-Holland, Amsterdam (1977).

(昭和54年8月31日受付)