


 入選論文

## リーマン面上のグリーン関数の重ね合せによる 二次元ラプラス方程式の近似解法†

村島 定行<sup>††</sup> 久原 秀夫<sup>†††</sup>

ラプラス方程式の近似解法として、近年一部で用いられてきた代用電荷法を紹介し、適用不可能と考えられていた曲線弧を境界として持つ領域に対する適用法を示した。

代用電荷法はラプラス方程式のグリーン関数の重畳法であり、境界法、選点法というものに相当する。グリーン関数の特異性の影響があるので境界から離して、極を配置しなければ誤差が大きくなってしまふ。したがって曲線弧を境界として有するような領域に対して事実上適用できない。この困難に対し、 $z=1/2(t+1/t)$ の構成するリーマン面を考え、リーマン面の二枚の分枝のうち一枚を境界値問題を考えている面とし、カットを厚みのない曲線弧に一致させる。他のもう一枚の分枝上にグリーン関数の極を配置し、カットを通して、他の分枝上に与える影響を重ね合わせることによって問題を解析する。

具体例として平行板コンデンサおよび変形平行板コンデンサの解析を行った。従来のどの方法によっても不可能であった高精度が容易に得られた。この手法は厚みのない曲線弧がいくつあっても、どのような形をしていても適用可能であり、静電気学、流体力学等の広い範囲での応用が考えられる。

### 1. ま え が き

ラプラス方程式は代表的な偏微分方程式として、過去数百年にわたって、多くの学者によって研究がなされてきた。数多くの成果が得られ、他の分野へさまざまな刺激を与えてきた。数百年の歴史を持つ特殊関数を使う方法<sup>1),2)</sup>、差分法や有限要素法<sup>3)</sup>などの離散的解法、計算機の機能を十分利用したモンテカルロ法<sup>4)</sup>など多くの方法が開発されているが、まだ十分とはいえない。ラプラス方程式に関する境界値問題では、曲線弧を境界として持つ領域の問題は特別に困難な問題として知られている。曲線弧が任意の形をしていれば、適当な方法は何一つないといってよい。この論文では曲線弧を境界としてもつ領域の問題を高精度で解く方法を提案する。

この方法は数年前から、一部で使われている代用電荷法というラプラス方程式の近似解法の研究から生まれた。代用電荷法はラプラス方程式のグリーン関数の重畳法であり、境界法、選点法<sup>7),8)</sup>というものに相当する。1969年 H. Steinbigler<sup>9)</sup>が高電圧装置の電界計

算に用いたのが最初で、70年代に入って、日本と西独で主として、応用に関した論文<sup>9)-15),25)</sup>が発表されている。この方法にはグリーン関数の極の配置を試行錯誤で決めなければならないなどすっきりしない面がある反面、誤差に調和性があり、誤差評価が容易<sup>16)</sup>であるなどの取扱いやすい面もある。特に複雑な形状でなければ簡単に高い精度が得られるのは大きな長所である。

代用電荷法の明らかな欠点の一つは、厚みのうすい領域の外部問題で、誤差が大きくなる点である<sup>9)</sup>。

代用電荷法では、グリーン関数の極を境界から離れた位置に置いて、その特異性の影響を緩和するが、せまい領域だと、境界の近くに極を配置せねばならず、特異性の影響で大きな誤差を生ずる。したがって幅のせまい領域や、厚みのない領域の外部問題に対して事実上適用できない。

曲線弧を境界としてもつ領域の問題の場合、その曲線弧をカットとするリーマン面を考え、リーマン面の一方の分枝に極を配置し、他方の分枝に与える影響の重ね合せでラプラス方程式を解くことができる。

具体的には二価の写像関数  $z=1/2(t+1/t)$  の作るリーマン面を利用する。このリーマン面の一枚の分枝を内部、他の分枝を外部と考え、カットは両者をわける境界と考える。つまり通常の面としてみれば厚みのないカットでも、リーマン面を導入すると充分広い内部があり、境界上に極を配置しないですむ。

以下、厚みのない領域を含む系でも、広い面積をも

† An Approximate Method to Solve Two-Dimensional Laplace's Equation by Means of Superposition of Green's Functions on Riemann Surface by SADAYUKI MURASHIMA (Department of Electronics, Faculty of Engineering, Kagoshima University) and HIDEO KUHARA (Department of Information and Electronic Engineering, Yatsushiro National College of Technology).

†† 鹿児島大学工学部電子工学科

††† 八代工業高等専門学校情報電子工学科

領域に対する代用電荷法と同じように高精度で解析できることを示す。

まず第2章で代用電荷法の原理および誤差評価の特色などを簡単に説明する。第3章ではリーマン面の構造とその上でのグリーン関数を示し、代用電荷法として応用する方法を述べる。第4章では数値計算上の二、三の問題とその解決法を説明する。第5章では具体的な例題として平行板コンデンサおよび変形平行板コンデンサを取り上げ、グリーン関数の数や極の位置への誤差の依存性を示す。第6章では我々の方法の評価と他の分野への応用を論じる。

この論文では電気工学の用語を何度か使ってしまった。ここにより一般的と考えられる同意語をかかげておく。

- 電荷：グリーン関数の極（厳密には同じではない）。
- 電位関数：ポテンシャル関数。
- 単位電荷の電位関数：グリーン関数。
- 電荷点：グリーン関数の極の位置。
- 電荷量：グリーン関数にかかる重み。

## 2. 代用電荷法について

### 2.1 代用電荷法

図1に示す領域Dに対するラプラス方程式のディリクレ問題を考える。便宜上二次元問題とする。

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

$$\phi(x, y)|_{\Gamma} = f(s), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

ここでΓは境界で、f(s)は境界上の点sでの境界値である。領域外の適当な位置に代用電荷を配置し、その電位関数の重ね合せとして、一般解φ(x, y)を表わす。

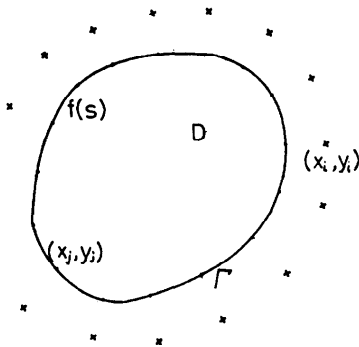


図1 ディリクレ型のポテンシャル問題と電荷、拘束点の配置

Fig. 1 Arrangement of charges and contour points for the calculation of the potential problem of Dirichlet type.

す。

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i G(x, y; x_i, y_i) \quad (3)$$

ここでQiは重みあるいは電荷量といわれる未定係数である。G(x, y; xi, yi)は点(xi, yi)にある単位電荷による点(x, y)の電位関数（すなわちグリーン関数）であり、二次元の場合は、

$$G(x, y; x_i, y_i) = \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (4)$$

を使う。点(xi, yi)はDの外部にあるので、(4)式はD内で調和、したがって(3)式は(1)式を満足している。

境界Γ上に電荷数に等しい数の点（拘束点という）を選び、その点で境界条件を満足させる。すなわち、

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n Q_i G(x_i, y_i; x_i, y_i) = f(s_i), \quad (5)$$

ここで(xi, yi)は拘束点の座標で、siも拘束点を示す。(xi, yi)と(xi, yi)は一致することはないとする。未知数Qiに関するn元連立一次方程式(5)を解いてQiを決定する。Qiを(3)式に代入すると代用電荷法の解が得られる。

### 2.2 誤差の性質<sup>16)</sup>について

真の解をψ(x, y)、代用電荷法による解をφ(x, y)とし誤差をe(x, y)とする、すなわち、

$$e(x, y) = \psi(x, y) - \phi(x, y) \quad (6)$$

φ(x, y)は(1)、(2)を満たし、φ(x, y)は領域内でラプラシアンをとるとゼロになるので次の関係が得られる。

$$\nabla^2 e(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D \quad (7)$$

$$e(x, y)|_{\Gamma} = f(s) - \phi|_{\Gamma}, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (8)$$

(8)式の右辺のφr(x, y)は代用電荷法による解の境界上の値なので既知である。したがって誤差e(x, y)は境界条件がf(s)−φr(x, y)の第一種境界値問題の解ということになる。つまり誤差もポテンシャルの性質を持っている。したがって代用電荷法では境界上の誤差だけ調べておけば最大誤差を知ることができる<sup>17)</sup>。図2に三次元軸対称の問題(x=0の平面上で0, r<sup>2</sup>+(Z-3)<sup>2</sup>=1の球面上で1の条件が課されている)の誤差分布例を示す。図中の8, -9の等高線は+10<sup>-8</sup>, -10<sup>-9</sup>をそれぞれ意味する。電荷数N=7にもかかわらず、高精度である。誤差は境界(球)のまわりに偏在していることがよくわかる。

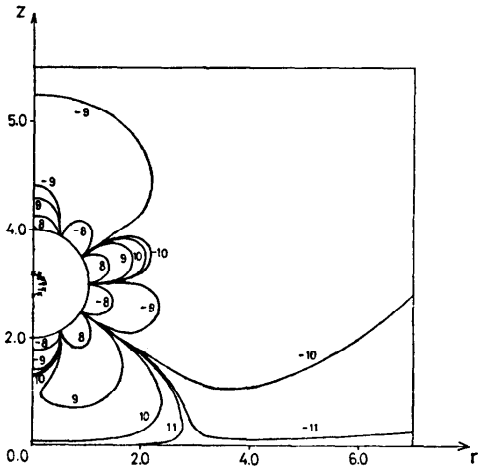


図2 代用電荷法の代表的な誤差分布例  
Fig. 2 Error distribution of the calculation of the sphere-plane electrode.

2.3 電荷配置および拘束点の取り方について

代用電荷の位置と拘束点をどのように取るべきかについては任意性があすぎて、ほとんど研究がなされていない。ここでは筆者の経験をもとに実用的な電荷配置を提案しておく。

図3のような滑らかな境界の外部問題の場合、まず境界をほぼ等間隔に切り、拘束点とする。次にこの閉曲線の内部に適当な点を選び、この点を中心として閉曲線を縮小率  $R$  で縮小する。この時、拘束点の移る位置を電荷点とする。  $R$  が 1 に近いと、境界に近く、  $R$  が 0 に近いと境界から遠ざかることを意味する。内部問題の場合は閉曲線の外部に配置しなければならない。その場合は拡大率  $E$  で閉曲線を拡大し、拘束点の移る位置を電荷点とする。  $R=1/E$  と置換すると、同

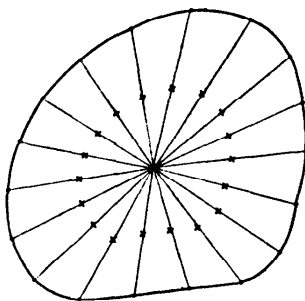


図3 滑らかな境界に対する拘束点と電荷の配置  
Fig. 3 Typical arrangement of contour points and charges for smooth closed curve.

一の形式のパラメータとなる。

3. リーマン面を利用した代用電荷法

3.1 等角写像の利用について

代用電荷法で重ね合わせる(4)式は  $z=x+iy$ ,  $z_i=x_i+iy_i$  とすると、次式の実部である、

$$G(z; z_i) = \frac{1}{2\pi} \log(z - z_i). \tag{9}$$

(9)式は  $z=z_i$  と  $z=\infty$  を除いて調和であり、さらに等角写像を調和関数にほどくとしても、その調和性は保たれる。無限空間のグリーン関数(9)式を有限領域に写像したのも調和なので、代用電荷法に利用できる。

筆者等の一人は有限領域のグリーン関数を等角写像で求め、電荷数減のために利用した<sup>18)</sup>。この論文の基本の考えは、無限空間を二枚の分枝をもつリーマン面へ写像し、その面上の複素グリーン関数の分枝1または分枝2での形を利用することである<sup>19)</sup>。リーマン面上のグリーン関数もラプラス方程式の解である。

3.2 等角写像  $z=1/2(t+1/t)$  の性質

等角写像  $z=1/2(t+1/t)$  は数値解析上しばしば利用<sup>20)</sup>される。逆変換を求めると、

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{10}$$

$$t = z - \sqrt{z^2 - 1} \tag{11}$$

となる。ここで  $\sqrt{z^2 - 1}$  は複素関数で  $z=2$  の時  $\sqrt{3}$  になるものとする。この二つの変換式でリーマン面上の  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  とを結ぶ任意の曲線は、  $t$  平面上の閉曲線に写像される。図4に  $z$  平面上の曲線が  $t$  平面上の閉曲線に写像される様子を示す。閉曲線の外部に写像される  $z$  平面をリーマン面の分枝1、内部に写

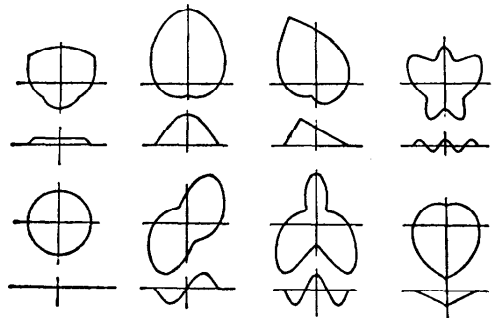


図4  $z=1/2(t+1/t)$  による曲線カットの閉曲線への変換  
Fig. 4 Transformation of curved cut to a closed curve by  $z=1/2(t+1/t)$ .

像される  $z$  平面を分枝 2 とする。リーマン面のカットは  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  を結ぶ任意の形にとってよく領域の形に応じて選ぶ。

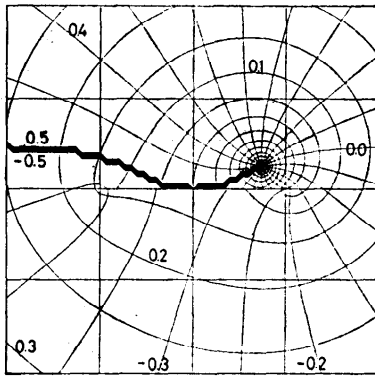
便益上、カットの写像される閉曲線を先端が写像される点によって二つにわけ、閉曲線の上半分は分枝 1、下半分は分枝 2 が写像されたものとする。

3.3 リーマン面上のグリーン関数

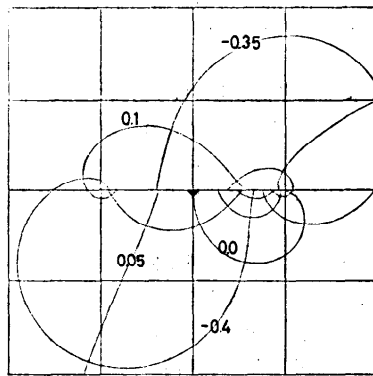
$t$  平面上の複素グリーン関数  $1/2\pi \log(t-t_i)$  を考え、 $t$  と  $t_i$  を上の二つの変換式で置換すると次の 4 通りの複素グリーン関数が得られる。

$$G(z; z_i) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \log(z + \sqrt{z^2 - 1} - z_i - \sqrt{z_i^2 - 1}), & z, z_i \in \text{分枝 1} & (a) \\ \log(z - \sqrt{z^2 - 1} - z_i - \sqrt{z_i^2 - 1}), & z \in \text{分枝 2}, z_i \in \text{分枝 1} & (b) \\ \log(z + \sqrt{z^2 - 1} - z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}), & z \in \text{分枝 1}, z_i \in \text{分枝 2} & (c) \\ \log(z - \sqrt{z^2 - 1} - z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}), & z, z_i \in \text{分枝 2}, & (d) \end{cases} \quad (12)$$

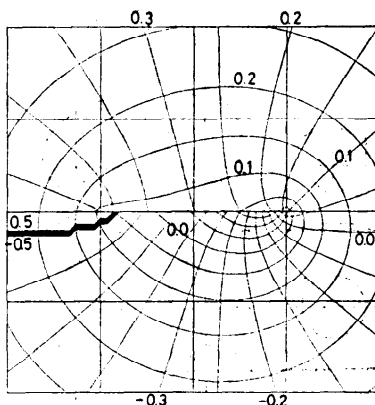
ここで (a) と (b) は極が分枝 1 上にある場合のグリーン関数の分枝 1 と分枝 2 での表現である。同様に (c) と (d) は極が分枝 2 上にある場合の表現である。



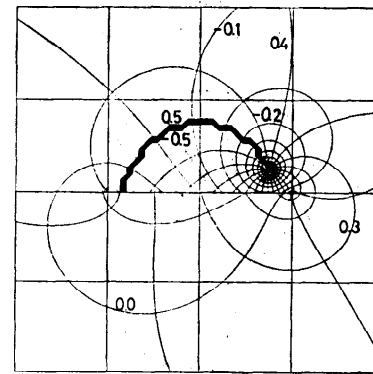
(a)  $z, z_i \in R-1$



(b)  $z \in R-2, z_i \in R-1$



(c)  $z \in R-1, z_i \in R-2$



(d)  $z, z_i \in R-2$

図 5 リーマン面上のグリーン関数 (直線カット)

Fig. 5 Green's functions on Riemann's surface with straight cut ( $z_i = 0.75 + 0.25i$ ).

図5に  $z_i = 0.75 + 0.25i$  とした場合の複素グリーン関数の実部と虚部の等高線を示す。図5(a), (b), (c), (d)は(12)式の(a), (b), (c), (d)をグラフにしたものである。この図は直線カットの場合で、等高線は  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  を結ぶ直線上で切れているように見えるが、(a)と(b), (c)と(d)の直線カットの部分を重ね合せて見れば、連続していることがわかる。

対数関数は無限多価関数であり偏角には  $2\pi$  の整数倍の任意性がある。ここでは  $-\pi < \arg Z \leq \pi$  の範囲に制限して使用する。

各分枝上でのグリーン関数はカットの形を指定しなければ最終的に確定しない。図6に非直線カットの場合のグリーン関数を示す。(a), (b), (c), (d)は図5の(a), (b), (c), (d)とカットの形を除いて同じである。図5に示す関数から図6に示す関数へは解析接続の考えで移ることができる。

図5と図6の  $I_m[G] = \pm 0.5$  の不連続線が階段状に

なっている。これは作図用プログラムで手を抜いたため、本来は一本の滑らかな線になるべきものである。

分枝1上の境界値問題を解くため分枝2上に電荷を配置するのが我々の考えであるから上の4式のうち(c),

$$G(z; z_i) = \frac{1}{2\pi} \log \{ z + \sqrt{z^2 - 1} - z_i + \sqrt{z_i^2 - 1} \} \quad (13)$$

が重要である。他の(a), (b), (d)の三つのグリーン関数も調和関数だから代用電荷法で使うことができるが、効果があるかどうか不明である。複素数のままが理論は簡単になるし、プログラムもすっきりした形になるので、複素グリーン関数の形で示したが、実際に使うのは複素グリーン関数の実部である、

$$g(x, y) = R_e \{ G(z; z_i) \}, \quad (14)$$

ここで  $R_e \{ A \}$  はAの実部である。x方向とy方向の勾配が必要な時には、次式を利用する。

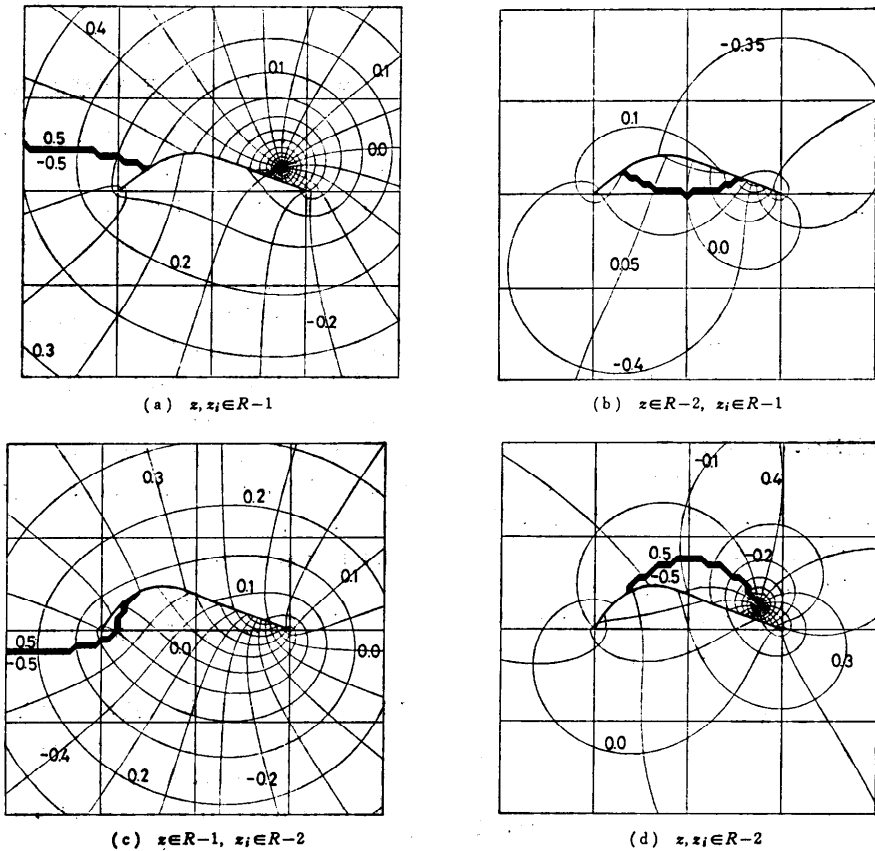


図6 リーマン面上のグリーン関数 (非直線カット)

Fig. 6 Green's functions on Riemann's surface with curved cut ( $z_i = 0.75 + 0.25i$ ).

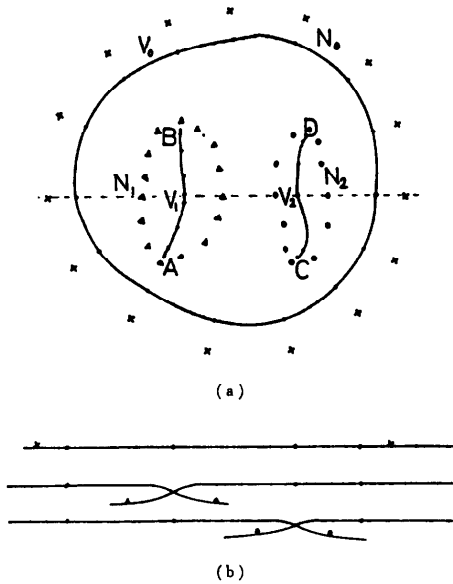


図7 実際問題でのグリーン関数の使用法  
Fig. 7 How to use Green's function for a practical problem.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = R_s \left\{ \frac{\partial G}{\partial z} \right\}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -I_m \left\{ \frac{\partial G}{\partial z} \right\}, \tag{16}$$

ここで

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}}{z + \sqrt{z^2 - 1} - z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}} \tag{17}$$

である。

### 3.4 実際問題への適用について

図7(a)に示すように曲線弧を境界としてもつ領域の境界値問題を考えよう。境界値は外部境界上で  $V_0$ 、内部の二つの曲線弧上でそれぞれ  $V_1, V_2$  と仮定する。

電荷はそれぞれの境界の近くに配置するが、図に示すように  $\times, \Delta, \circ$  の三群に分け、各々の個数を  $N_0, N_1, N_2$  とする。グリーン関数を以下のように使いわける、

- $\times$ : 通常のグリーン関数
- $\Delta$ :  $A, B$  を端点とするリーマン面上のグリーン関数
- $\circ$ :  $C, D$  を端点とするリーマン面上のグリーン関数。

具体的に式で書くと  $N = N_0 + N_1 + N_2$ , として

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^N Q_i R_s \{ G(x; z_i) \} \tag{18}$$

を一般解として採用する、ここで、

$$G(x; z_i) = \frac{1}{2\pi} \times \begin{cases} \log(z - z_i), & N_0 \geq i \geq 1, \\ \log\{z + \sqrt{(z-A)(z-B)} - z_i \\ + \sqrt{(z_i-A)(z_i-B)}\}, \\ & N_1 + N_0 \geq i \geq N_0 + 1, \\ \log\{z + \sqrt{(z-C)(z-D)} - z_i \\ + \sqrt{(z_i-C)(z_i-D)}\}, \\ & N \geq i \geq N_1 + N_0 + 1. \end{cases} \tag{19}$$

である。図7(b)にリーマン面の断面を模式的に示した。 $\times$ 印の電荷は通常の面上に、 $\Delta$ と $\circ$ 印の電荷はカットを異にするリーマン面の分枝2上にある。

この使用法は曲線弧状の境界がいくつあっても同じように処理できる。厚みはあるが非常にせまい領域の場合、面積を持っているが部分的に厚みがない場合などに適用するのに何の困難もない。

### 4. 数値計算上の二、三の問題について

前章までの話だけでは数値計算には移れない。数値計算上解決すべき問題が残っている。

#### 4.1 複素関数 $\sqrt{z^2 - 1}$ の計算

$z$  平面上の点を  $t$  平面上の点に変換する際に複素関数  $\sqrt{z^2 - 1}$  が必要になる。 $\sqrt{z^2 - 1}$  は  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  とを結ぶ曲線をカットとする関数で、カット以外で不連続であってはならない。計算機に組込まれている標準関数 CSQRT を使って、単純に CSQRT ( $z * z - 1.0$ ) を計算してみると  $\sqrt{z^2 - 1}$  と部分的に符号が反対になっている。必要とする  $\sqrt{z^2 - 1}$  を作るためには CSQRT ( $z * z - 1.0$ ) に以下のような符号処理\*を加えればよい。

##### 4.1.1 直線カット

$$\sqrt{z^2 - 1} = \begin{cases} \text{CSQRT}(z * z - 1.0), & (x, y) \in E_1 \\ -\text{CSQRT}(z * z - 1.0), & (x, y) \in E_2 \end{cases} \tag{20}$$

ここで  $z = x + jy$  で  $E_1$  は図8に示すように  $x \geq 0, y \geq 0$  と  $x > 0, y < 0$  と  $y = 0, -1 \leq x < 0$  の三領域の和領域である。 $E_2$  は  $E_1$  に含まれない部分をさす。(20)式は  $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  とを結ぶ直線カットのみで

\* 計算結果の符号がすべての計算機で共通であるとは限らないが、鹿児島大学 Facom 230-45S と東京大学大型計算機センター HITAC 8800 ではうまくいった。

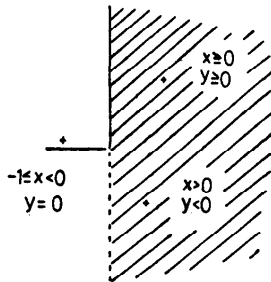


図 8 直線カットを持つ複素関数  $\sqrt{z^2-1}$  の計算で使う領域  $E_1$   
 Fig. 8 Area  $E_1$  used for the calculation of  $\sqrt{z^2-1}$  with a straight cut.

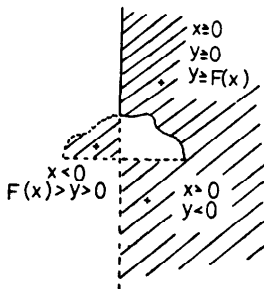


図 9 非直線カットを持つ複素関数  $\sqrt{z^2-1}$  の計算で使う領域  $E_2$   
 Fig. 9 Area  $E_2$  used for the calculation of  $\sqrt{z^2-1}$  with a curved cut.

不連続になり、カット上の値はその上部の値と連続に選ばれている。

4.1.2 非直線カット

非直線カットの形を  $y=F(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  で  $x = \pm 1$  の時、 $y=0$  になると仮定する。この場合は、

$$\sqrt{z^2-1} = \begin{cases} \text{CSQRT}(z * z - 1, 0), & (x, y) \in E_2 \\ -\text{CSQRT}(z * z - 1, 0), & (x, y) \in E_2 \end{cases} \quad (21)$$

となる、ここで  $E_2$  は  $x \geq 0, y \geq 0, y \geq F(x)$  と  $x > 0, y < 0$  および  $x < 0, F(x) > y > 0$  の三つの領域を合せた領域である (図 9 参照)。(21)式はカット上で不連続で、カット上の値はその上部の値と連続に選ばれている。

4.1.3 もっと複雑なカットの場合

分枝点  $(-1, 0)$  および  $(1, 0)$  とを曲がりくねって結ぶ図 10 (a) のような複雑なカットの場合、符号処理も複雑になってくる。この場合、虚軸、 $(-1, 0)$  と  $(1, 0)$  とを結ぶ直線およびカットで区切られる領域のうち、図 10 (b) の斜線をほどこした領域で + 符号を

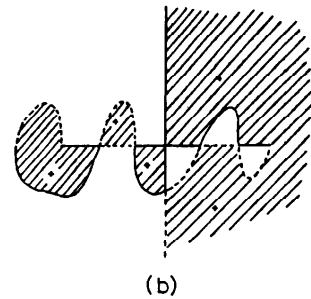
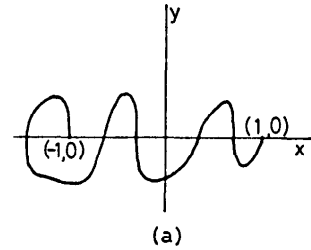


図 10 もっと複雑なカットの場合  
 Fig. 10 The case of more complicated cut.

とり、それ以外で - 符号をとる。図 10 (b) の実線境界は + の領域に含み、破線境界は + の領域に含めないことを意味する。

4.2 カットはどちらの分枝に属するか

カットは分枝 1 と分枝 2 の接続部分である。ではカットはどちらの分枝に属すると考えるべきだろうか。

カットは両方の分枝に属している。換言すると分枝 1 に属しているカットと分枝 2 に属しているカットが合体したものと考えるのが正しい。こうすると分枝 1 のカットは  $z$  平面上に写像された時、閉曲線の上半分になり、分枝 2 のカットは閉曲線の下半分になって閉曲線が完成する。

したがってカット上にとった拘束点、検査点にはどちらの分枝に属するかデータの入れる配列を用意しなければならない。これは通常の代用電荷法ではないことである。

境界値問題は分枝 1 上にとっているから、分枝 1 と指定してポテンシャルを計算する。カット (曲線弧) だけは分枝 1 と分枝 2 の場合がある。それぞれ、両側からカットへ近づいた場合のポテンシャルの極限值になっている。この指標の使い方は曲線弧が複数個存在する時は複雑になる。電荷が存在するリーマン面のカット上のポテンシャルを計算する場合のみ、分枝 2 という指標は生きる。他のリーマン面上にある電荷によるポテンシャルを計算する場合は、分枝

1, 分枝 2 の区別はなく, すべて分枝 1 になる (図 7(b) 参照).

5. 数値例

5.1 平行板コンデンサ

図 11 に平行板コンデンサを示す. 幅 2 の無限に長い平板導体が距離  $2D$  をへだてて, 平行に置かれている. それぞれ  $+1, -1$  の電位に保たれている.

$t$  平面での拘束点は図 12(a) のように  $t$  平面上の半径 1 の円を  $N$  等分して決めた. この単位円を縮小率  $R$  で縮小した時, 拘束点のくる位置を電荷点とする.

データ (拘束点, 電荷点) は常に  $z$  平面上の値として与えることにしている. 上述のデータは  $z$  平面に写さねばならない. 拘束点は  $(-1, D)$  と  $(1, D)$  とを結ぶ直線上にきて, 電荷点は  $(-1, D)$  と  $(1, D)$  を焦点とする楕円上にくる.  $R$  を 1 に近づけると電荷は導体の近くなり,  $R$  を 0 へ近づけると, 導体から遠ざかり, ほぼ円形に電荷を配置したことになる. 拘束点は平板中央で疎, 端近くで密に分布する形になった (図 12(b) 参照).

平行板コンデンサの問題は上下対称性を利用して, 未知数の数を半分に減じている.

左右の対称性は非対称の問題も扱えるようにプログラムを作ったため, 利用していない.

図 13 にコンデンサの導体板上の誤差分布を示す. 拘束点で誤差が零になり, その間で誤差は正負に振れている. 破線で示したのは誤差評価値  $F$  で, 境界上の誤差の 2 乗平均の平方根である. 拘束点の間にいくつ

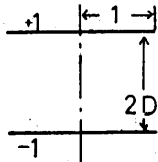


図 11 二次元の平行板コンデンサ

Fig. 11 Parallel plate condenser in two dimensions.

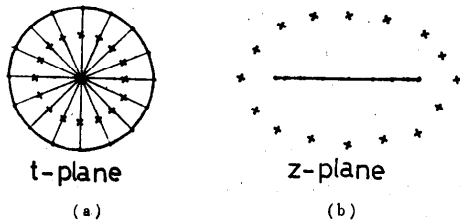


図 12 平行板コンデンサに対する拘束点と電荷の配置

Fig. 12 Arrangement of contour points and charges for the parallel plate condenser.

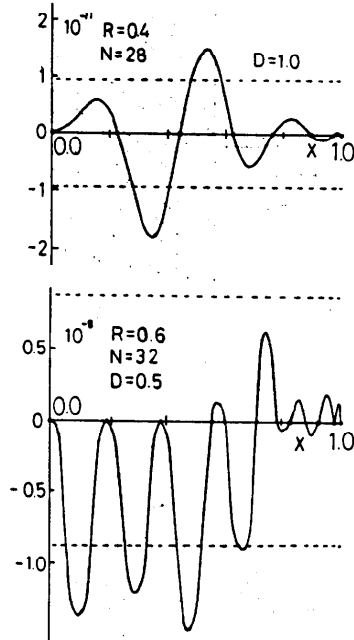


図 13 電極 (境界) 上の誤差分布例

Fig. 13 Examples of error distribution on the electrode.

かの (ここでは三個, 中央に一個でもよい) 検査点を取り, 各検査点の誤差を  $E_i$  とすると次式で  $F$  が得られる,

$$F = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n E_i^2}{n}} \tag{22}$$

ここで  $n$  は検査点の数である. 境界上の最大誤差は図 13 から  $F$  の 1.5 倍程度であり, 大部分の境界上で  $F$  以下であることがわかる. ここで横軸は  $x$  座標で,  $x=0$  は導体中央,  $x=1$  は導体先端である.

電荷の位置  $R$  と電荷数  $N$  によって境界上の誤差がどのように変化するか調べた. 図 14~17 に結果を示す<sup>21)</sup>. 横軸は  $R$  で縦軸は誤差評価値  $F$  である.  $R$  が 1 に近い時, 誤差が大きい.  $R$  が 1 から離れるにつれ誤差が小になり,  $R$  をさらに小にすると直接法でも解けなくなる. 解けなくなる直前の  $R$  では桁落ちのため誤差が大きくなる. この場合は直接法で二, 三回, 連立方程式を解いて, 桁落ちを補正<sup>22)</sup>しなければならない.

図 14~17 中の破線は単精度計算で得られる限度を示す. この破線より右上が達成可能である. 倍精度計算の限度は一点鎖線で示す. 通常の丸め誤差を示す限度の他に, 行列式が解けないことによる限度がある.

$R$  が大きいところでは  $N$  が大きいと精度がよい. 直



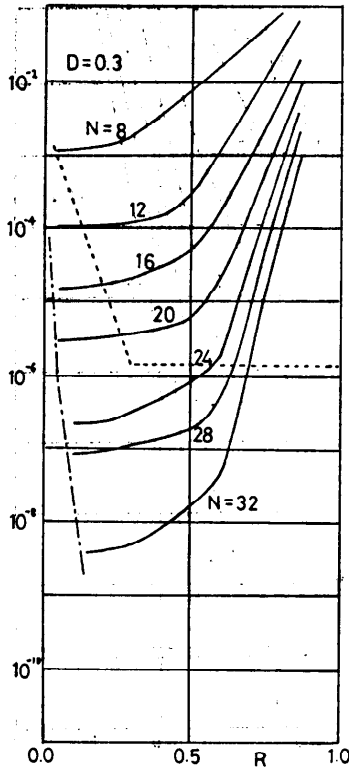


図 14 コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $D=0.3$ )  
Fig. 14 Average error on the electrode of the condenser ( $D=0.3$ ).

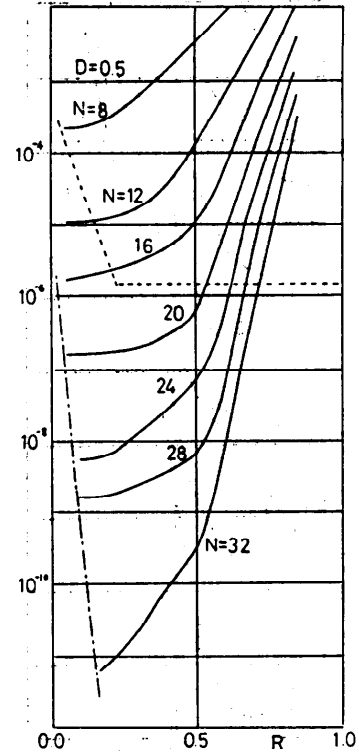


図 15 コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $D=0.5$ )  
Fig. 15 Average error on the electrode of the condenser ( $D=0.5$ ).

接法を一回だけ使って得た解は、 $R$ が小さいところで逆転する。 $N$ が大きいほど桁落ちの程度が大きいからである。図 14~17 は桁落ちを補正したもので逆転はなくなる。

図 13 の誤差分布曲線は最良近似の誤差分布曲線と大きく違っているので、拘束点や電荷点を工夫するともっと精度が上がることが予想される。それを詳しく検討するのはこの論文の目的ではない。最初に思いついた電荷配置でも図に示すような高精度が容易に得られることを示すのが目的である。

$D$ が小さくなると全体的に解の精度が落ちるが、電荷数を増して、ある程度精度をあげることができる。

図 18 には  $D=0.5$  の場合の高電圧導体の上面と下面の電荷分布を任意目盛で示す。厚みのない導体のはずなのに、電荷が上面と下面にわけて分布するのは奇妙かもしれないが、分枝 1 (分枝 2) と指定して、導体上の電界強度を求めると、上向き (下向き) の電界強度が計算できて、電荷分布が得られる。

5.2 変形平行板コンデンサ

厚みのない領域は前節の例題のような直線だけではなく、任意の形でもよい。図 19 に示す変形平行板コンデンサを取扱う。2枚の導体板は半径  $R1$  と半径  $R2$  の同心円の  $1/4$  を切り出した形をしている。拘束点はカットを  $\epsilon$  平面に写像した閉曲線の最上点と最下点の中心に点を取り、その点から閉曲線を望んだ角度が等しくなるように選んだ。この方式では拘束点間の距離は等しくならないが、閉曲線が円に近いことを考えると大きく違っていない。先程の点を中心として縮小率  $R$  で閉曲線を縮小した時の拘束点の位置を電荷点とした。図 20 の  $\epsilon$  平面の図から明らかであるが、拘束点は閉曲線の上半分 (実線部分) が下半分 (破線部分) より多く分布する。したがって  $\epsilon$  平面上でも上面 (分枝 1) に下面 (分枝 2) より多く拘束点を取することを意味する。このように分布させてはじめて上面と下面との誤差が同じ程度になる。もし上面と下面に同じ数の拘束点をとると、上面の誤差が大きくなる。この例題では上面と下面は分枝 1 または分枝 2 と指定することで区別されるが、物理的には導体板に上から

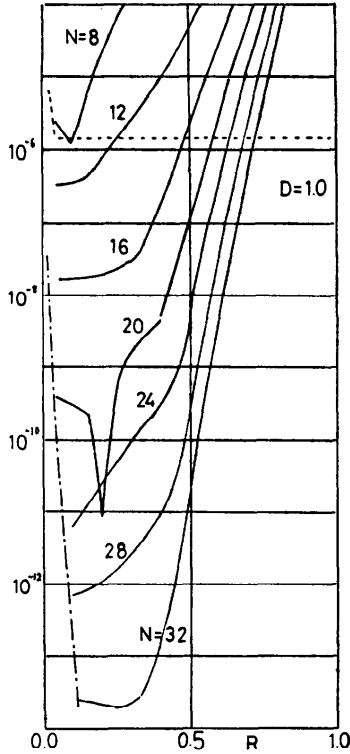


図 16 コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $D=1.0$ )  
 Fig. 16 Average error on the electrode of the condenser ( $D=1.0$ ).

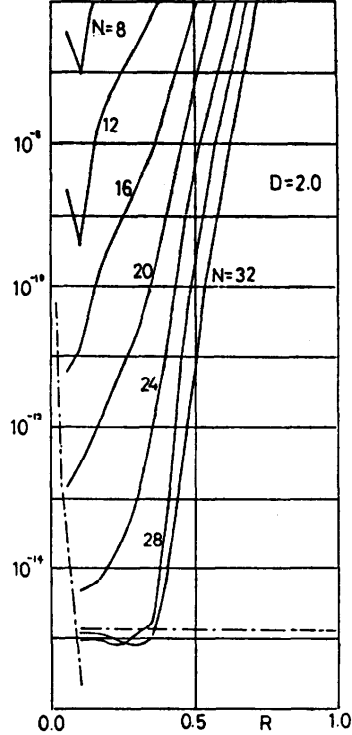


図 17 コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $D=2.0$ )  
 Fig. 17 Average error on the electrode of the condenser ( $D=2.0$ ).

近づいた極限と下から近づいた極限を意味する。

$R_1$  を 1.0 に固定し,  $R_2$  を 1.5, 3.0, 5.0 とした場合の結果を 図 21 ~ 23 に示す. 前の例題と同様に左右の対称性を利用していないので図中の未知数  $N$  は半分に減らすことができる. 誤差  $F$  と電荷の位置  $R$  との関係は簡単ではない.  $N$  を大きくすると誤差が減少し,  $R$  が 1.0 から小さくなるにつれ, 0.5 近くまで対数的に誤差は減少する. 一般的には  $F$  に極値が存在するといえるが,  $R_2=3.0, N=80$  の例は単調減少であり極値はあらわれていない.  $R$  が小さいところで増大する誤差は, 倍精度計算の桁落ちのレベルよりはるかに大きく, 桁落ちの補正をしてもなくなる.

$R_2$  が小さくなり  $R_1$  に近づく (導体板間隔がせまくなる) と全体的に解の精度が落ちるのは前の例題と同様である. さらに導体板間隔がせまくなると連立方程式が直接法で解ける範囲もせまくなる.

### 6. 検 討

曲線弧を境界として持つ領域の問題は代用電荷法だ

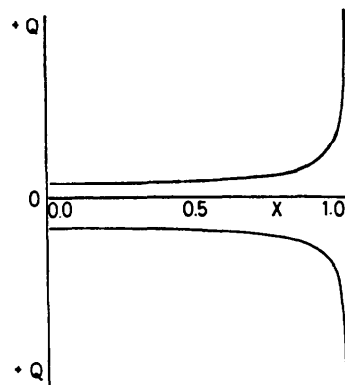


図 18 電極の上側と下側の電荷密度 (境界における解の法線方向の微係数)  
 Fig. 18 Charge density on upper side and lower side of higher electrode.

けでなく, 他のどんな方法にとっても, 解析困難な問題である. ここで扱った例題では最大誤差  $10^{-6}$  の高精度が容易に得られた. 数値補間を必要とする離散解法では望むべくもない高精度である. 特筆すべきは曲

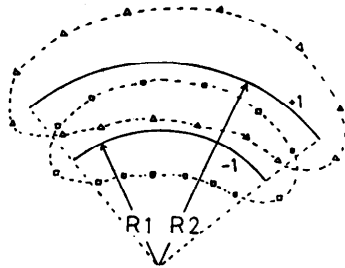


図 19 変形平行板コンデンサ  
Fig. 19 Curved parallel plate condenser.

線弧の先端付近の場が他の部分と同じ高精度である点である。曲線弧の先端は  $t$  平面上では閉曲線の滑らかな部分に写像されるので、特異点でなくなる。滑らかな境界であれば代用電荷法で簡単に高精度で解析ができる。

この手法は角度 0 の尖点（板縁）の特異性の解消法としての意義にとどまらず、広く曲線弧を多数境界としてもつ領域の問題の解法として一般性を有する点に意義がある。カットの処理法を含めて、複素関数  $\sqrt{z^2-1}$  の計算法が示してあるので、全方位の  $z$  に関して、同一のアルゴリズムで必要な数値を得ることができる。これは計算手順の簡素化と汎用性を高めるのに役立っている。

流体力学の分野では速度ポテンシャルに関するノイマン問題が一般的である。この問題を流れ関数に関するディリクレ問題にかえ、通常の代用電荷法で解き、得られた電荷量とグリーン関数の虚数部との積和で速度ポテンシャルを表わす。いわゆる代用うず法<sup>23)</sup>がある。法線方向の微係数を計算する必要がない反面、虚数部を重ね合わせるため、不連続線が領域内部に入っていないように工夫しなければならない点があるが、法線方向の微係数を計算する通常の方法より、かなりよい精度が得られる<sup>24)</sup>。

以上の方法はリーマン面を利用した我々の方法でも利用できる。厚みのない曲った板のまわりの理想流体の流れ解析はリーマン面を利用した手法と代用うず法とを併用して、高精度に効率よく実行できる。

さらに等角写像を利用したものとして、最初から境界条件の一部を満しているグリーン関数を重ね合わせて大幅に未知数の数を減少させ、計算時間の短縮と精度の向上をはかる手法がある<sup>18)</sup>。この手法も我々のリーマン面を利用した手法に使うことができる。

角度がゼロでない尖点（くさびの先端）をいくつか含んでいる問題の特異点の解消には我々の方法は適し

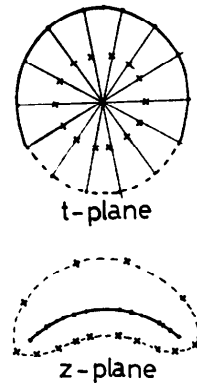


図 20 変形コンデンサに対する拘束点と電荷の配置  
Fig. 20 Arrangement of contour points and charges for the curved condenser.

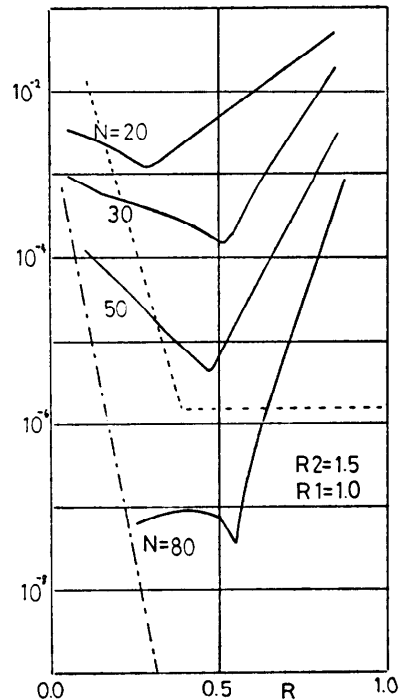


図 21 変形コンデンサ電極（境界）上の平均誤差  
( $R_1=1.0, R_2=1.5$ )  
Fig. 21 Average error on the electrode of the curved condenser ( $R_1=1.0, R_2=1.5$ ).

ていない。これは尖点の角度を  $180^\circ$  に写像する等角写像を利用した代用電荷法で解決されると考える。

以上リーマン面を利用した手法を含めた代用電荷法は適用範囲も広く、高精度で効率的である。ここで扱ったようなラプラス方程式を解く場合、有限要素法等

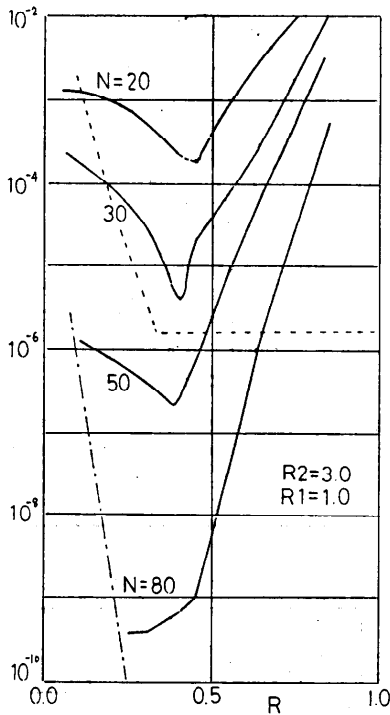


図 22 変形コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $R1=1.0, R2=3.0$ )

Fig. 22 Average error on the electrode of the curved condenser ( $R1=1.0, R2=3.0$ ).

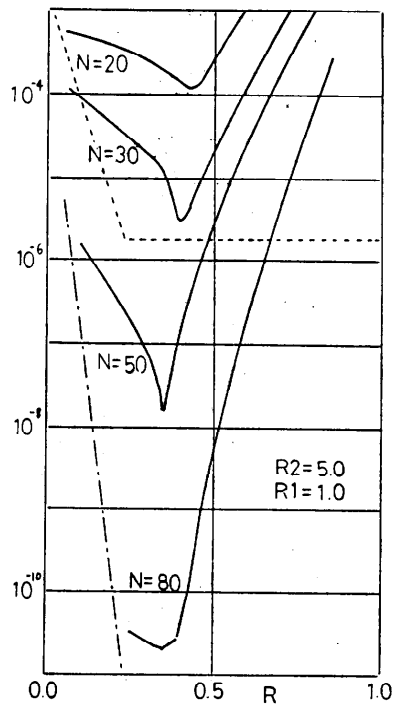


図 23 変形コンデンサ電極 (境界) 上の平均誤差 ( $R1=1.0, R2=5.0$ )

Fig. 23 Average error on the electrode of the curved condenser ( $R1=1.0, R2=5.0$ ).

の離散的解法より、はるかにすぐれている。

計算機の能力に眩惑されて、我々は従来の解析的なやり方から完全に数値的方向へと行きすぎたように思う。だが計算機の出現は大きな革命であり、それ以前への完全な復帰は考えられない。真に有効な計算機の利用を考えるべき時期に来ているように思える。

## 7. むすび

ラプラス方程式の近似解法として、近年一部で用いられてきた代用電荷法を紹介し、適用不可能と考えられていた、曲線弧を境界としてもつ領域に対する適用法を示した。等角写像  $z=1/2(t+1/t)$  の逆写像により、厚みのない曲線弧を面積を持つ閉領域に写像し、代用電荷法を適用できるようにするものである。

この方法は厚みのない曲線弧がいくつあっても、どのような形をしていても適用できて、通常の代用電荷法と同じ高精度が容易に得られる。

この論文がここに述べた半解析的解法ともいうべき技法の発展への一つの刺激になれば幸いである。

## 参考文献

- 1) 寺沢寛一: 数学概論, 応用編, 岩波書店 (1960).
- 2) 清野 武: 電気磁気学 I, オーム社 (1962).
- 3) 加川幸雄: 有限要素法入門, オーム社 (1977).
- 4) 津田孝夫: モンテカルロ法とシミュレーション, 培風館 (1969).
- 5) Steinbigler, H.: Anfangsfeldstärken und Ausnutzungsfactoren rotationssymmetrischer Elektrodenanordnungen, Dissertation, T.H. Munchen (1969).
- 6) Singer, H., Steinbigler, H. and Weiss, P.: A charge simulation method for the calculation of high voltage fields, IEEE, PAS-93, p. 1660 (1974).
- 7) Finlayson, B.A., 鷲津, 山本, 川井共訳: 重みつき残差法と変分原理, 培風館 (1972).
- 8) 川井忠彦: 重みつき残差法, 有限要素法の応用に関するシンポジウム, 東大大型計算機センタ (1975).
- 9) 電気学会技術報告書 “最近の電界計算法” 1980年発行予定.
- 10) 増田, 松本: 代用電荷法による定在波電界の計算, 電気学会論文誌 A, Vol. 93-A, p. 305 (1973).

- 11) 増田, 上村: 進行波不平等電界の近似計算法について, 電気学会論文誌 A, Vol. 96-A, p. 63 (1976).
- 12) 青山, 増田: 二重配列型および三重配列型定在波電界カーテンの論理特性, 電気学会論文誌 A, Vol. 95-A, p. 66 (1975).
- 13) Weis, P.: Berechnung von Zweistoffdielektrika, ETZ-A, Vol. 90, p. 693 (1969).
- 14) Singer, H.: Das elektrische Feld von Gitterelektroden, ETZ-A, Vol. 90, p. 682 (1969).
- 15) Utmishi, D.: Berechnung dreidimensionaler Hochspannungsfelder, ETZ-A, Vol. 99, p. 83 (1978).
- 16) 村島, 加藤, 宮近: 代用電荷法における誤差の性質について, 電気学会論文誌 A, Vol. 98, p. 39 (1978).
- 17) 宇野, 洪: ポテンシャル, 培風館 (1957).
- 18) 村島: 等角写像の代用電荷法への応用, 放電・電力技術合同研究会, ED-79-3 (1979).
- 19) 久原: リーマン面上の代用電荷法, 昭和 54 年電気学会全国大会 (1979).
- 20) 森 正武: 数値解析と複素関数論, 筑摩書房 (1975).
- 21) 村島, 久原: リーマン面上のグリーン関数を利用した代用電荷法, 情報処理学会第 20 回全国大会 (1979).
- 22) McCalla, T. R., 三浦, 田尾訳: 数値計算法概論, サイエンス社 (1972).
- 23) 増田, 松本: 代用電荷法による流れ場の計算について, 電気学会論文誌 A, Vol. 96-A, p. 1 (1976).
- 24) 加藤, 村島: 代用電荷法のノイマン問題への適用について, 鹿児島大学工学部研究報告, Vol. 21 (1979).
- 25) 村島: ポアソン方程式への代用電荷法の応用, 静電気学会誌, Vol. 4, p. 38 (1980).

(昭和 54 年 8 月 31 日受付)