Vol.2009-MPS-76 No.6
Vol.2009-BIO-19 No.6
2009/12/17

ランダム行列の劣化画像における雑音強度推定への応用

山中 杏奈
お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科

本研究では, 画像の各点に独立正規雑音が加えられた劣化画像に対し, データ共分散行列の固有値分布の性質を利用して, 正規雑音の強度推定を行う手法を提案する．また, 推定された雑音強度を利用して, 雑音除去フィルターとして使われている平滑化フィルター, メジアンフィルター, ウィーナーフィルターの有効性についての比較を試みる．

An application of random matrix theory to an estimation of image noise variance

Anna Yamanaka

Ochanomizu University
Graduate school of Humanitics and Science

In this study, we propose a method of an estimation of image noise variance as an application of random matrix theory on Wishart matrices. We also compare the efficiencies of noise reduction filters (smoothing, median, and Winner filters) by using our estimated variace.

1 はじめに

FAX や衛星などの通信機器を利用し得られる画像データのほとんどはノイズを含んでいる．その雑音強度を推定することは, 画像の復元をするために重要な事柄のひとつである．本研究では, それら雑音強度の推定にランダム行列の固有値分布の性質を利用した手法を提案する．

ランダム行列の固有値がどのような確率分布に従うかという問題は, 情報理論, 統計学においてしばしば登場しており, 考察している問題が理論的に解析できるかどうかを決定する鍵となる役割を果たしている．行列のサイズが無限に近づくとき, 固有値の分布は元の確率変数には依存せず, ある普遍性を持つことが知られている．

また, 雑音強度を推定した後に, 3 つのノイズ除去フィルターについて雑音強度を利用して検証を行う．雑音を含んだ画像がどの程度復元できたかを評価する基準の一つに, 平均二乗誤差 (MSE) などがある．しかし, 平均二乗誤差で評価する場合には雑音を含んでいない元画像の情報が必要となる．本研究の提案手法で推定された雑音強度を利用することにより, 元画像のデータが存在しなくとも, 復元の度合いを評価することが可能となる．

2 Wishart 行列

2.1 Wishart 行列の固有値分布の性質

Wishart 行列は最も歴史の古いランダム行列であり，多変量正規分布に従う確率変数の共分散行列を記述するために導入された．

$p \times n$ の行列 $X \in R^{p\times n}$ とする．X の各成分は確率変数であり, X が独立に標準正規分布に従うとき, $\frac{1}{n}X^TX$ を Wishart 行列とよぶ．またこのとき, $\frac{1}{n}X^TX$ は自由度 n, p 次元の Wishart 分布に従う．$\lambda = p/n$ を一定とし, $n, p \to \infty$ とした時, Wishart 行列 $\frac{1}{n}X^TX$ の固有値経験分布の密度関数は, 以下

のような関数に収束することが知られている.

$$\lambda_{min}^{max} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{p}{n}}\right)^2$$

$$\rho(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2p\pi}\dfrac{\sqrt{-(t-\lambda_{max})(t-\lambda_{min})}}{t} \\ \qquad\qquad (\lambda_{min} < t < \lambda_{max}) \\ 0 \qquad\qquad (otherwise) \end{cases} \quad (1)$$

$p = n = 256, \lambda = 1$ の標準正規分布の確率密度関数に従うランダム行列を数値的に生成し，その固有値のヒストグラムを図 1 に示す.

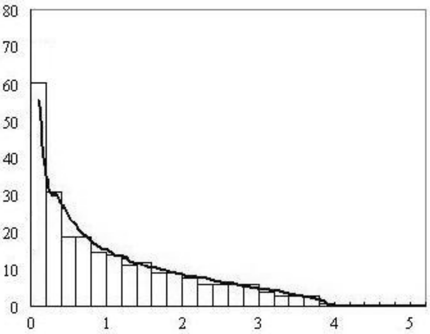


図 1: ランダム行列の固有値分布

$\lambda_{max} = 4,\ \lambda_{min} = 0$ となり, 図 1 の実線は (1) で与えられる理論値である.

2.2　提案する強度推定の手法

実際に強度推定を行う際, データの上にノイズが含まれているため, まず元画像のデータとノイズを分ける必要がある. 256×256 の単純な画像の各点に, 標準正規分布に従うノイズを加えた場合の $\frac{1}{n}X^TX$ の固有値のヒストグラムを図 2 に示す. 図 1 のノイズのみの固有値のヒストグラムと見比べてみると, 固有値のいくつかが 5 以上に増えていることが見てとれる. よって, 5 以上の固有値に原画像の情報が多く含まれているであろうと言える. 値が 5 以上の固有値を除き, 残りの固有値で雑音強度の推定を行うのが適当であろう. 画像の情報が含まれているとされる固有値が, 大きいものから順に m 番目までであるとすると, 全ての固有値 (今 l 個とする) から m 個を引いた $l-m$ 個で強度推定を行うことになる.

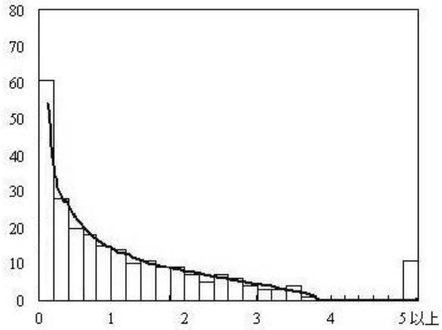


図 2: 単純な画像の各点に標準正規分布に従うノイズを加えた場合の固有値分布

強度推定には, (1) の Wishart 行列 $\frac{1}{n}X^TX$ の固有値密度関数を利用する. Wishart 行列の固有値密度関数に従う確率変数を W とすると, 各成分が分散 σ^2 の正規分布であるような Wishart 型ランダム行列の固有値密度関数に従う確率変数 V は $V = \sigma^2 W$ を満たす. すなわち, 先の伊藤の場合の $Y = aX + b$ の $b = 0$ の場合にあたる. $a = \sigma^2$ の dialation だけを考えることになるので (1) より V の確率密度関数の台の最大値, 最小値は

$$\acute{\lambda}_{min}^{max} = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{p}{n}}\right)^2$$

となる. この a の値が推定したい分散 σ^2 に他ならない.

3　雑音強度の推定実験例

3.1　実験概要

以下のようなデータを用意し, ノイズを加えた画像の雑音強度の推定を行う.

- 各ピクセルは階調値 0〜255 をとるものとする
- 縦 256, 横 256 の正方形 (ピクセル数は 65536)
- 各ピクセルに正規分布の確率密度関数に従う乱数を独立に加える
- ノイズ加えても階調値が 0 未満, 255 超えをしないように元のデータを設定

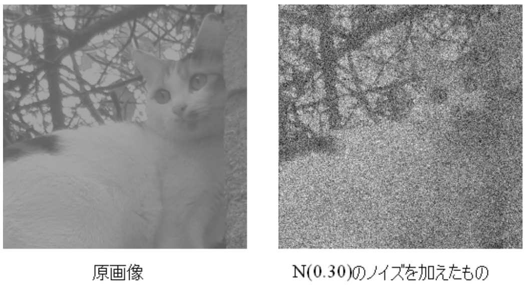


図 3: 元画像とそれにノイズを加えたもの

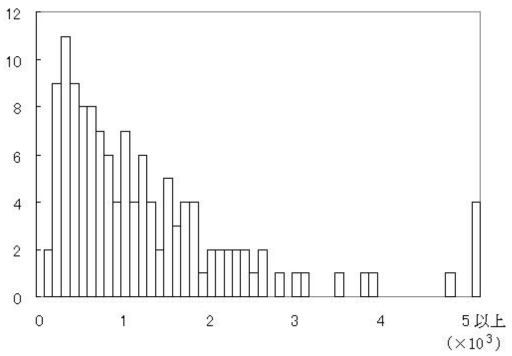


図 4: 実験画像の固有値分布

3.2 実験結果

固有値分布のヒストグラムから, 元の画像のデータは固有値 4×10^3 以上に含まれていると判断し, それ以下の固有値から雑音強度の推定を行う. 推定された雑音強度は 32.75^2 であった.

4 ノイズ除去フィルターの比較

4.1 基本的なフィルターの紹介

ノイズ除去の基本的なフィルターとして, 平滑化フィルター・メジアンフィルター・ウィーナーフィルターなどが知られている. 以下簡単にそれらを紹介し, 各フィルターの雑音強度推定の比較を行う.

4.1.1 平滑化フィルター

平滑化フィルターは, 注目画素と周りの参照点の階調値の合計を出し, その平均を注目画素の階調値とするフィルターであり, $(2n+1) \times (2n+1)$ の平滑化フィルターは以下のように与えられる.

$$f_{x,y} = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{x'=x-n}^{x+n} \sum_{y'=y-n}^{y+n} g_{x',y'}$$

4.1.2 メジアンフィルター

メジアンフィルターは, 注目画素と周りの参照点の階調値の中央値を, 注目画素の階調値とするフィルターである. $(2n+1) \times (2n+1)$ のメジアンフィルターは

$$\begin{aligned} f_{x,y} &= \mathrm{Median}\{\mathrm{g_{x',y'}}\} \\ &\qquad (x-n \le x' \le x+n,\ y-n \le y' \le y+n) \end{aligned}$$

で与えられる.

4.1.3 ウィーナーフィルター

元画像 f に対する確率密度関数を $p(F=f)$ により表すことにすると, 元画像 f と劣化画像 g に対する結合確率密度関数は

$$p(F=f, G=g) = p(G=g|F=f)p(F=f)$$

により与えられる. 劣化画像 g から $\hat{f} = Kg$ とおく. よって得られた元画像の推定値 $\hat{f}$ について,

$$E(||F-KG||^2) = \iint ||f-Kg||^2 p(F=f, G=g) dgdf$$

が最小になるように行列 K を構成しようというのが, デジタル信号処理における一般的な線形フィルターの構成法である. これにより構成されるフィルターはウィーナーフィルターまたは最小二乗フィルターと呼ばれる. ウィーナーフィルターは以下の式で与えられる.

$$\hat{f}_{x,y} = a_{x,y} + \frac{b_{x,y} - v}{b_{x,y}} (g_{x,y} - a_{x,y})$$

$$\begin{cases} a_{x,y} = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \displaystyle\sum_{x'=x-n}^{x+n} \sum_{y'=y-n}^{y+n} g_{x',y'} \\ b_{x,y} \equiv \dfrac{1}{(2n+1)^2} \displaystyle\sum_{x'=x-n}^{x+n} \sum_{y'=y-n}^{y+n} (g_{x',y'} - a_{x',y'})^2 \\ v \equiv \dfrac{1}{MN} \displaystyle\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} b_{x,y} \end{cases}$$

4.2 検証実験

4.2.1 実験概要

劣化画像がどのくらい復元されたか評価する方法として, 平均二乗誤差 (MSE) や信号対雑音比 (通常 SN 比と呼ばれる) がある. どちらも劣化画像と元画像の差に対して, 復元画像と元画像の差を比べる方法であり, 元画像が分からない場合は有効ではない. しかし本研究で推定された雑音強度を利用し, 復元画像と劣化画像の MSE 値を比べることにより, 基本的な 3 つのフィルターの比較を行う.

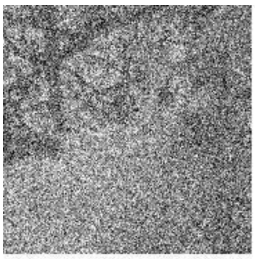
4.2.2 実験結果

3 つのフィルターで図 3 のデータをフィルタリングした場合の軽減された雑音強度は図 5 の通りである.

	標準偏差
推定された雑音強度	32.75
平滑化フィルター(3×3)	28.38
平滑化フィルター(5×5)	29.86
メジアンフィルター(3×3)	29.2
メジアンフィルター(5×5)	32.7
ウィーナーフィルター(3×3)	32.08
ウィーナーフィルター(5×5)	31.04

図 5: 3 つのフィルターのノイズ軽減量

雑音強度や図柄を変えた画像に対して, 3 つのフィルターを使用した時のノイズ軽減量の結果は図 6, 図 7 の通りである.



	標準偏差
推定された雑音強度	51.59
平滑化フィルター(3×3)	46.9
平滑化フィルター(5×5)	49.01
メジアンフィルター(3×3)	48.35
メジアンフィルター(5×5)	49.27
ウィーナーフィルター(3×3)	52.95
ウィーナーフィルター(5×5)	51.82

図 6: 標準偏差 50 のノイズを加えた劣化画像に対して, フィルターを使用した時のノイズ軽減量

どの雑音強度に対してもメジアンフィルター (5 × 5) であれば, 加算した分散と同程度の雑音強度が軽減できていることが分かる. 3 つのフィルターの内

	標準偏差
推定された雑音強度	33.34
平滑化フィルター(3×3)	28.5
平滑化フィルター(5×5)	30.28
メジアンフィルター(3×3)	29.26
メジアンフィルター(5×5)	30.42
ウィーナーフィルター(3×3)	32.22
ウィーナーフィルター(5×5)	33.04

図 7: 標準偏差 30 のノイズを加えた劣化画像に対して, フィルターを使用した時のノイズ軽減量

しいて言えば, ウィーナーフィルター (5 × 5) が最も有効であろう.

5 まとめ

本研究では, 画像の各点に独立正規雑音が加えられた劣化画像に対し, データ共分散行列の固有値分布の性質を利用して, 正規雑音の強度推定を行う手法を提案した. また, 推定された雑音強度を利用して, 元画像のデータが不明な場合でも, 雑音の軽減量を推定し 3 つの雑音除去フィルターの比較を行った.

参考文献

1. 田中和之, 確率モデルによる画像処理技術入門, 森北出版 (2006).
2. 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会 (2005).