

## 最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム

新妻 弘 崇<sup>†1</sup> 金 谷 健 一<sup>†1</sup>

2 画像の対応点から射影変換を計算する新しいアルゴリズムを提案する．従来は筆者らが発表したりくりこみ法が利用されてきたが，本論文では Chojnacki らの FNS 法を多数の拘束条件に拡張した「多拘束 FNS 法」を導出する．これにより，くりこみに比べてアルゴリズムが非常に簡明になる．最後にシミュレーションを行い，提案方法は従来のくりこみ法とほぼ同精度であり，精度の理論限界（KCR 下界）をほぼ達成することを確認する．また実画像によるパノラマ画像の生成を行い，提案方法によって精度のよい合成ができることを示す．

### New Optimal Homography Computation Algorithm

HIROTAKA NIITSUMA<sup>†1</sup> and KENICHI KANATANI<sup>†1</sup>

We present a new algorithm for computing the homography between two images from point correspondences, replacing the renormalization method proposed by our group. Our method, which we call “multi-constraint FNS”, is obtained by extending the FNS of Chojnacki et al. to multiple constraints. The program is far more concise than the renormalization. By simulation, we demonstrate that the accuracy of our method is almost the same as the renormalization, nearly reaching the theoretical accuracy bound (KCR lower bound). Using real images, we show how accurate panoramic images are created using our method.

#### 1. ま え が き

筆者らは約 10 年前に，2 画像の対応点からその射影変換を計算するプログラムを発表し<sup>13),20)</sup>，Web 上に公開した．これは当時知られている精度が最も高い方法として世界中で利用されてきた．本論文では，その後 10 年間の研究を取り入れた改訂版を提供する．

平面あるいは無限遠方のシーンを 2 台のカメラで撮影すると画像間が射影変換で結ばれることから，2 画像の対応点から射影変換行列を計算することはコンピュータビジョンの最も

基本の処理の処理であり，パノラマ画像の生成<sup>1),19)</sup>，平面パターンを用いるカメラ校正<sup>18),25)</sup>，平面部分をもつ物体の 3 次元復元<sup>4),14)</sup>，道路面上の障害物検出<sup>3),15)</sup> など幅広い応用に利用されている．古くから用いられていたのは最小二乗法であり，誤差がなければ 0 となる式の二乗和を最小にするように未知の係数を計算するものである．これに対して 1990 年代に，精度の高い計算のためには誤差の統計的性質を考慮する最尤推定に基づくべきであることが指摘され<sup>6)</sup>，今日の点列への楕円の当てはめや 2 画像の対応点からの基礎行列の計算のような幾何学的な拘束式を当てはめる問題（「幾何学的当てはめ」）の基礎となっている．その数値計算法として筆者ら<sup>13),20)</sup> は「くりこみ法」<sup>5)</sup> を用いた．これは最尤推定解が満たすべき条件に近づくように解を反復修正するものであり，尤度の導関数を用いないという性質がある．後に Chojnacki ら<sup>2)</sup> や Leedan ら<sup>17)</sup> はそれぞれ「FNS 法」，「HEIV 法」と呼ぶ導関数を用いる反復法を提案し，Kanatani ら<sup>11)</sup> も「射影的ガウス・ニュートン法」を提案した．これらはすべて同一の解を計算し，その誤差はくりこみ法と同じオーダーである．しかし，くりこみ法の解よりも高次の偏差項をがより小さいことが示され<sup>10)</sup>，今日の楕円当てはめや基礎行列の計算法として定着している<sup>21)-24)</sup>．

それに対して射影変換の計算が楕円当てはめや基礎行列の計算と大きく異なるのは，射影変換が二つの拘束式（ $x, y$  座標の変換式）で表されることである．一方，楕円当てはめや基礎行列の計算ではそれぞれ楕円の式やエッジ極線方程式という一つの拘束式しかない．もちろん幾何学的当てはめの一般論<sup>6)</sup> は任意の個数の拘束式に適用されるが，複数の拘束式に対しては計算式が複雑になる．このため既成のプログラムをダウンロードするのが簡便であり，これが筆者らのプログラムが 10 年間利用し続けられた理由であると思われる．そこで本論文では Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法を多数の拘束式に拡張する．これはくりこみに比べてアルゴリズムが非常に簡明である．これを HEIV 法や射影的ガウス・ニュートン法に変形するのは容易である．最後にシミュレーションを行い，提案する「多拘束 FNS 法」の精度が従来のくりこみ法とほぼ同精度であり，精度の理論限界（KCR 下界<sup>8)</sup>）をほぼ達成することを確認する．また実画像によるパノラマ画像の生成を行い，提案方法によって精度のよい合成ができることを示す．

#### 2. 射 影 変 換

「射影変換」とは次式で表される画像上の変換である．

$$x' = f_0 \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0}, \quad y' = f_0 \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}f_0}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}f_0} \quad (1)$$

<sup>†1</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科  
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

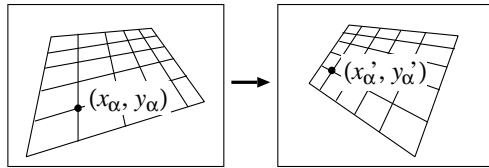


図 1 2 画像間の対応点から射影変換を計算する。

ここに  $f_0$  は係数  $h_{ij}$  のオーダーをそろえるためのほぼ画像サイズの大きさの任意定数であり (実験では  $f_0 = 600$  (画素) とした), これがないと数値計算の精度が低下する. 式 (1) は次のように書き直せる. 点  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  をスケール定数  $f_0$  によって各成分のオーダーをそろえた 3 次元ベクトル  $x, x'$  で表し, 式 (1) の係数  $h_{ij}$  を  $3 \times 3$  行列  $H$  で表す.

$$x = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

これらを用いると式 (1) は次のように書ける.

$$x' = Z[Hx] \quad (3)$$

ただし,  $Z[\cdot]$  は第 3 成分を 1 にする正規化作用素である. 式 (1), (3) から分かるように行列  $H$  には定数倍の不定性がある. そこで以下, 適当な定数を掛けて  $\|H\| = 1$  と正規化する (行列のノルムは  $\|H\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 h_{ij}^2}$  と定義する). 式 (3) はベクトル  $x', Hx$  が平行であることを表すので, 次のように書いても等価である.

$$x' \times Hx = 0 \quad (4)$$

9 次元ベクトル  $h, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  を次のように定義する.

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_0x \\ -f_0y \\ -f_0^2 \\ xy' \\ yy' \\ f_0y' \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0x \\ f_0y \\ f_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -xx' \\ -yy' \\ -f_0x' \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} -xy' \\ -yy' \\ -f_0y' \\ xx' \\ yx' \\ f_0x' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

正規化  $\|H\| = 1$  は式 (5) の  $h$  が単位ベクトルであること ( $\|h\| = 1$ ) と等価である. 式 (4) の 3 成分を取り出して  $f_0^2$  倍すると次の拘束式を得る.

$$(\xi^{(1)}, h) = 0, \quad (\xi^{(2)}, h) = 0, \quad (\xi^{(3)}, h) = 0 \quad (6)$$

ただし, 本論文ではベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く.

### 3. 射影変換の最適計算

$N$  個の点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  と対応する  $(x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  が与えられたとき, それらの間の射影変換を最適に推定したい. データを代入した式 (5) のベクトル  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  をそれぞれ  $\xi_\alpha^{(1)}, \xi_\alpha^{(2)}, \xi_\alpha^{(3)}$  と書く. データに誤差があるとき, 解くべき問題は  $(\xi_\alpha^{(1)}, h) \approx 0, (\xi_\alpha^{(2)}, h) \approx 0, (\xi_\alpha^{(3)}, h) \approx 0, \alpha = 1, \dots, N$  となるような 9 次元単位ベクトル  $h$  を計算することである. そのためには誤差の統計的性質を考慮する必要がある. そこで, 各点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  は真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  に期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  の正規分布に従う誤差  $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha, \Delta x'_\alpha, \Delta y'_\alpha$  が加わると仮定する. このとき,  $\xi_\alpha^{(k)}$  の誤差  $\Delta \xi_\alpha^{(k)}$  は高次の項を除いて次のように書ける.

$$\Delta \xi_\alpha^{(k)} = T_\alpha^{(k)} \begin{pmatrix} \Delta x_\alpha \\ \Delta y_\alpha \\ \Delta x'_\alpha \\ \Delta y'_\alpha \end{pmatrix} \quad (7)$$

行列  $T_\alpha^{(k)}$  は式 (5) の  $\xi_\alpha^{(k)}$  のヤコビ行列 (各成分の  $x, y, x', y'$  に関する微分を並べた行列) に  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  を代入した値であり, 次のように与えられる (理論的には真値  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  を代入すべきであるが, データで代用する).

$$T_\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y'_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha \\ 0 & y'_\alpha & 0 & y_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x'_\alpha & 0 & -x_\alpha & 0 \\ 0 & -x'_\alpha & -y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\alpha^{(3)} = \begin{pmatrix} -y'_\alpha & 0 & 0 & -x_\alpha \\ 0 & -y'_\alpha & 0 & -y_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -f_0 \\ x'_\alpha & 0 & x_\alpha & 0 \\ 0 & x'_\alpha & y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

前述の誤差に関する仮定から  $\xi_\alpha^{(k)}$  の共分散行列は次のようになる ( $E[\cdot]$  は期待値を表す).

$$E[\Delta\xi_\alpha^{(k)}\Delta\xi_\alpha^{(l)}] = T_\alpha^{(k)} E \left[ \begin{pmatrix} \Delta x_\alpha^2 & \Delta x_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta x_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta x_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta y_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta y_\alpha^2 & \Delta y_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta y_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta x'_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta x'_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta x'^2_\alpha & \Delta x'_\alpha \Delta y'_\alpha \\ \Delta y'_\alpha \Delta x_\alpha & \Delta y'_\alpha \Delta y_\alpha & \Delta y'_\alpha \Delta x'_\alpha & \Delta y'^2_\alpha \end{pmatrix} \right] T_\alpha^{(k)\top} \\ = T_\alpha^{(k)} (\sigma^2 I) T_\alpha^{(l)\top} = \sigma^2 T_\alpha^{(k)} T_\alpha^{(l)\top} = \sigma^2 V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \quad (9)$$

ただし  $I$  は単位行列であり,  $V_0^{(kl)} [\xi_\alpha]$  (「正規化共分散行列」と呼ぶ) を次のように定義する.

$$V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \equiv T_\alpha^{(k)} T_\alpha^{(l)\top} \quad (10)$$

データ  $\xi_\alpha^{(k)}$  の誤差を正規分布と仮定すると、「マハラノビス距離」(正の定数倍と付加定数を除いて尤度関数の対数の符号を変えたもの) は次のように書ける.

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} \xi_\alpha^{(1)} - \bar{\xi}_\alpha^{(1)} \\ \xi_\alpha^{(2)} - \bar{\xi}_\alpha^{(2)} \\ \xi_\alpha^{(3)} - \bar{\xi}_\alpha^{(3)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_0^{(11)} [\xi_\alpha] & V_0^{(12)} [\xi_\alpha] & V_0^{(13)} [\xi_\alpha] \\ V_0^{(21)} [\xi_\alpha] & V_0^{(22)} [\xi_\alpha] & V_0^{(23)} [\xi_\alpha] \\ V_0^{(31)} [\xi_\alpha] & V_0^{(32)} [\xi_\alpha] & V_0^{(33)} [\xi_\alpha] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_\alpha^{(1)} - \bar{\xi}_\alpha^{(1)} \\ \xi_\alpha^{(2)} - \bar{\xi}_\alpha^{(2)} \\ \xi_\alpha^{(3)} - \bar{\xi}_\alpha^{(3)} \end{pmatrix} \right) \quad (11)$$

ただし  $(\cdot)_r^-$  はランク  $r$  (大きい  $r$  個以外の固有値は 0) の一般逆行列である. 上式中の  $27 \times 27$  行列のランクが 4 しかないのは,  $\xi_\alpha^{(k)}$  の値が変動する要素が  $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$  の 4 個しかないためである. 最尤推定<sup>\*1</sup>は式 (11) を制拘束式  $(\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, h) = 0, k = 1, 2, 3$  のもとで最小化することである. ラグランジュ乗数を用いて拘束式を消去すると次のようになる.

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(k)}, h) (\xi_\alpha^{(l)}, h) \quad (12)$$

ただし,  $W_\alpha^{(kl)}$  は  $(h, V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] h)$  を  $(kl)$  要素とする  $3 \times 3$  行列のランク 2 (実質的な制約式が式 (1) の 2 個しかないため) の一般逆行列の  $(kl)$  要素である. これを次の記法で略記する<sup>6)</sup>.

$$\left( W_\alpha^{(kl)} \right) = \left( (h, V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] h) \right)_2^{-1} \quad (13)$$

式 (12) の導出が本論文の骨子であるが, 煩雑になるので付録 A に示す.

\*1 この定式化は  $\xi_\alpha^{(k)}$  の誤差を正規分布とみなすものであるが, 厳密には  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  の誤差が正規分布でも  $\xi_\alpha^{(k)}$  の誤差が正規分布とは限らない. これを以下に述べる FNS 法を反復して補正する方法が知られているが<sup>12)</sup>, 結果に実質的な差が出ないことが確認されている.

#### 4. 多拘束 FNS 法

式 (12) が導けたとすると, これを  $h$  で微分すると次のようになる.

$$\nabla_h J = 2(M - L)h \quad (14)$$

ただし,  $9 \times 9$  行列  $M, L$  を次のように置いた.

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top}, \quad L = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 v_\alpha^{(k)} v_\alpha^{(l)} V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \quad (15)$$

上式中の  $v_\alpha^{(k)}$  は次のように定義する.

$$v_\alpha^{(k)} = \sum_{l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(l)}, h) \quad (16)$$

式 (14), (15), (16) の導出も本論文の骨格であるが, 煩雑になるので付録 B に示す. これらが導けたとすれば, 式 (12) を最小にするには式 (13) より  $(M - L)h = 0$  を解けばよく, 固有値問題を反復して解く Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法を用いることができる.

- (1)  $h$  の初期値  $h_0$  を与える.
- (2) 式 (15) の行列  $M, L$  を計算する.
- (3) 固有値問題  $(M - L)h = \lambda h$  の最小固有値  $\lambda$  に対する単位固有ベクトル  $h$  を計算する.
- (4) 符号を除いて  $h \approx h_0$  であれば次の射影変換行列  $h$  を返して終了する. そうでなければ  $h_0 \leftarrow \mathcal{N}[h_0 + h]$  としてステップ 2 に戻る ( $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化).

#### 5. 最小二乗法

前節の反復には初期値が必要であり, 最も簡便なものが最小二乗法である. 式 (12) で  $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$  (クロネッカのデルタ:  $k = l$  で 1, それ以外で 0) と置くと次のようになる.

$$J_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 (\xi_\alpha^{(k)}, h)^2 \quad (17)$$

これは式 (6) の拘束式の二乗和を最小にするので「最小二乗法」と呼ぶ. 式 (17) は当てはめの代数的距離とも呼ばれるので, 「代数的距離最小化法」とも呼ぶ. あるいは線形計算で解が得られるので「線形法」とも呼ばれる. 式 (17) は次のように変形される.

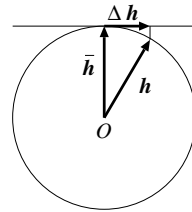


図2 計算値  $h$  の真の値  $\bar{h}$  に垂直な成分  $\Delta h$  .

$$J_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \mathbf{h}^\top \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)} \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)\top} \mathbf{h} = (\mathbf{h}, \mathbf{M}_{LS} \mathbf{h}) \quad (18)$$

ただし次のように置いた .

$$\mathbf{M}_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)} \boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)\top} \quad (19)$$

式 (18) は  $h$  の 2 次形式であるから , これを最小化する単位ベクトル  $h$  は行列  $\mathbf{M}_{LS}$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルである<sup>9)</sup> .

## 6. 精度の評価と理論限界

射影変換行列  $\mathbf{H}$  を表す式 (5) の 9 次元単位ベクトル  $h$  の推定値を  $\hat{h}$  , 誤差がない場合の真値を  $\bar{h}$  とするとき , 誤差  $\Delta h$  を次のように定義する .

$$\Delta h = \mathbf{P}_{\bar{h}} \hat{h}, \quad \mathbf{P}_{\bar{h}} \equiv \mathbf{I} - \bar{h} \bar{h}^\top \quad (20)$$

$\mathbf{P}_{\bar{h}}$  は  $\bar{h}$  に直交する方向に射影した成分を得る射影行列である . これを用いるのは ,  $\hat{h}$  が単位ベクトルであって単位球面上の真値  $\bar{h}$  の周りに分布するので , 誤差を評価するには  $\bar{h}$  に垂直な方向 , すなわち球面上の  $\bar{h}$  における接平面上で評価するという意味である ( 図 2 ) . これから推定値  $\hat{h}$  の共分散行列が次のように定義できる .

$$V[\hat{h}] = E[\Delta h \Delta h^\top] \quad (21)$$

金谷の統計的最適化理論<sup>6)</sup> によれば , どのように  $h$  を推定しても , それが不偏推定量であればその共分散行列  $V[\hat{h}]$  には次の下界があることが示される<sup>6),7)</sup> .

$$V[\hat{h}] \succ \frac{\sigma^2}{N} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \quad (22)$$

ただし  $\succ$  は左辺引く右辺が正値対称行列であることを表す . 右辺の  $\bar{\mathbf{M}}$  は式 (15) の行列  $\mathbf{M}$

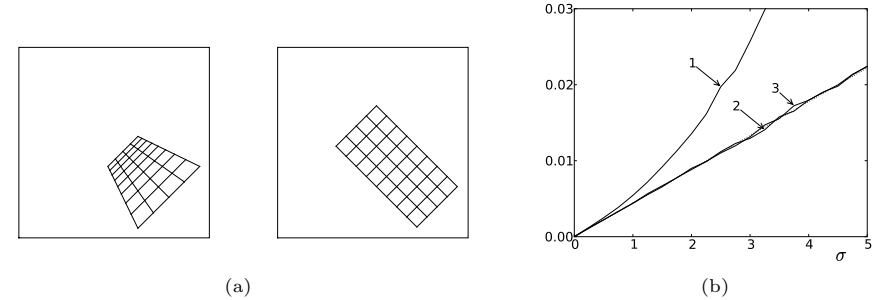


図3 (a) 平面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 . (b) 計算した射影変換の RMS 誤差 . 横軸は加えた誤差の標準偏差  $\sigma$  . 1. 最小二乗法 . 2. 多拘束 FNS 法 . 3. くりこみ法 . 点線は KCR 下界 .

をデータの真値  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$  ,  $(\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  および  $h$  の真値  $\bar{h}$  を用いて計算した値である . 式 (22) の右辺は「KCR 下界」と呼ばれる<sup>8)</sup> . 式 (22) の両辺の平方根を取り , 式 (21) より  $\text{tr} V[\hat{h}] = E[\|\Delta h\|^2]$  であることに注意すると , 次の平方平均二乗 (RMS) 誤差の下界が得られる .

$$\sqrt{E[\|\Delta h\|^2]} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{tr} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \quad (23)$$

## 7. 実験

図 3 は平面格子を 2 方向から撮影したことを想定したシミュレーション画像 ( 800 × 800 画素 ) である . 焦点距離は  $f = 600$  ( 画素 ) とした . 第 1 画像から第 2 画像への射影変換行列  $\bar{\mathbf{H}}$  は次のようになる .

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0.431 & 0.260 & -0.433 \\ 0.260 & 0.431 & -0.433 \\ 0.209 & 0.209 & -0.178 \end{pmatrix} \quad (24)$$

画像中の格子点を特徴点とし ,  $x, y$  座標に独立に期待値 0 , 標準偏差  $\sigma$  ( 画素 ) の正規乱数誤差を加えてデータとした . そして , 計算した射影変換行列  $\mathbf{H} = (h_{ij})$  を式 (5) の単位ベクトル  $h$  の形に表し , その誤差を式 (20) の  $\Delta h$  とする . これを各  $\sigma$  で誤差を変えて 1000 回試行し , その RMS ( 平方二乗平均 ) 誤差を次のように評価した .

$$E = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} \|\Delta h^{(a)}\|^2} \quad (25)$$

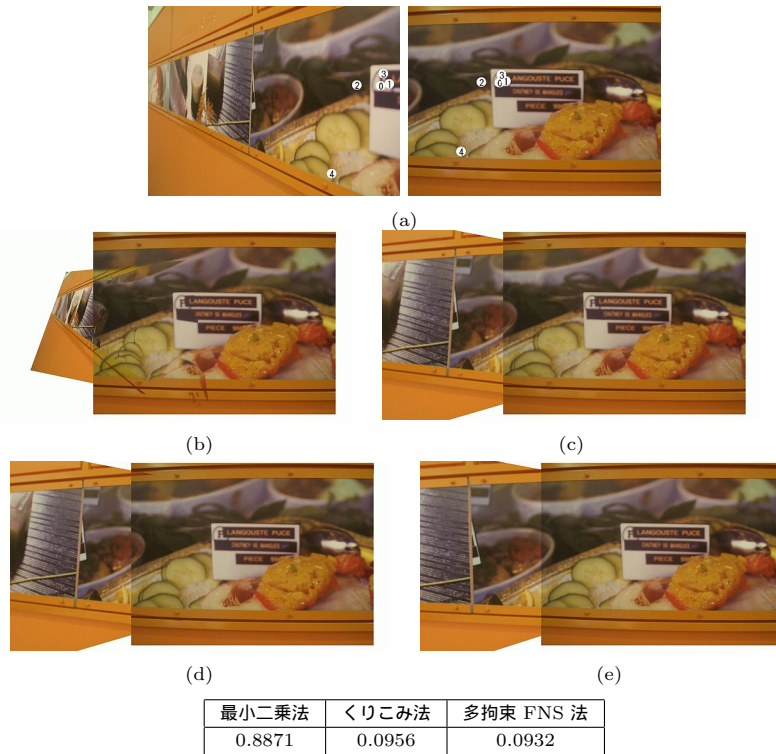


図 4 パノラマ画像生成の例。(a) 平面を撮影した 2 画像と SIFT が抽出した対応点。(b) 最小二乗法による生成。(c) くりこみ法による生成。(d) 多拘束 FNS 法による生成。(e) 正しいパノラマ画像。表は射影変換行列の誤差の比較。

ただし  $\Delta h^{(a)}$  は誤差  $\Delta h$  の  $a$  回目の試行の値である。図 3 は横軸に  $\sigma$  をとって最小二乗法、多拘束 FNS 法、およびくりこみ法の RMS 誤差  $E$  をプロットしたものである。点線は KCR 下界 (式 (23) の右辺) である。これから分かるように最小二乗法は非常に精度が低い。それに対して多拘束 FNS 法の精度はくりこみ法とほぼ同じであり (詳細に比較すると多拘束 FNS 法のほうがわずかに精度が上回るが実質的な差はない)、精度の理論限界にほぼ到達していることが分かる。

図 4(a) は平面シーンを異なる方向から撮影した実画像である。画像中の 5 個のマークは SIFT 演算子<sup>16)</sup> が抽出した対応点である。図 4(b) は図 4(a) 中の 5 点から最小 2 乗法で計

算した射影変換によって生成したパノラマ画像であり、図 4(c), (d) はそれぞれくりこみ法、および多拘束 FNS 法を用いた結果である。図 4(e) は“正解”パノラマ画像であり、両画像から手動で対応点を 21 点を注意深く選び、射影変換を計算して左画像を右画像上に重ねたものである。表は図 4(e) に対する値を真値  $\bar{h}$  とみなして式 (20) の  $\Delta h$  を計算し、 $\|\Delta h\|$  の値を示したものである。この例からも最小二乗法は極めて精度が低いのにに対して、多拘束 FNS 法とくりこみ法は高精度であり、ほぼ同じ精度であることが分かる (数字上は多拘束 FNS 法のほうがわずかに精度が上回るが実質的な pp 差はない)。

## 8. まとめ

本論文では 2 画像の対応点からその射影変換を計算する新しいアルゴリズムを提案した。従来は以前に筆者らがプログラムを公開したくりこみ法に基づく方法<sup>13),20)</sup> が世界中で利用されてきた。一方、楕円当てはめや基礎行列の計算では Chojnacki ら<sup>2)</sup> の FNS 法がよく使われている。これは楕円の式やエピ極線方程式のような一つの拘束式に対するものであるが、射影変換は複数の拘束式から成る。そこで、本論文では幾何学的当てはめの一般論<sup>6)</sup> に基づいて、FNS 法を多数の拘束式に拡張した「多拘束 FNS 法」を定義した。これはくりこみに比べてアルゴリズムがはるかに簡明であり、プログラミングが容易である<sup>\*1)</sup>。

そして、シミュレーションを行い、多拘束 FNS 法がくりこみ法とほぼ同精度であり、精度の理論限界 (KCR 下界) をほぼ達成することを示した。最後に実画像によるパノラマ画像の生成を行い、提案方法によって精度のよい合成ができることを示した。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 21500172) の助成による。

## 参考文献

- 1) 千葉直樹, 蚊野 浩, 美濃導彦, 安田昌司, 画像特徴に基づくイメージモザイクング, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J82-D-II-10** (1999-10), 1581-1589.
- 2) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000), 1294-1303.
- 3) 船本将平, 金澤 靖, 複数の射影変換行列を用いた単眼移動カメラによるシーンの 3 次元復元, 情報処理学会研究報告 2009-CVIM-166-15 (2009-3), 97-104.
- 4) 伊藤吉弘, 金澤 靖, 画像から求めた複数のゆわ度分布による重みを用いた RANSAC による画像間の対応付け, 電子情報通信学会論文誌 D, **J89-D-12** (2006-12), 2710-2720.
- 5) 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-

\*1) プログラムを Web 上に公開している。http://www.suri.cs.okayama-u.ac.jp/program.html

- 2), 201–209.
- 6) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
  - 7) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-88** (1995-8), 1865–1873.
  - 8) 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
  - 9) 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
  - 10) 金谷 健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.
  - 11) K. Kanatani and Y. Sugaya, Performance evaluation of iterative geometric fitting algorithms, *Comp. Stat. Data Anal.*, **52-2** (2007-10), 1208–1222.
  - 12) 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, **2-1** (2009-3), 1–10.
  - 13) 金澤靖, 太田直哉, 金谷健一, 射影変換行列の最適計算によるモザイク生成, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-116-2 (1999-5), 9–16.
  - 14) 川上裕司, 伊藤吉弘, 金澤 靖, 特徴点の位置分布に基づくランダムサンプリングによる平面領域のロバストな検出法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J88-D-II-2** (2005-2), 313–324.
  - 15) 木山 真伸, 太田 直哉, 金谷 健一, 2台のカメラと射影変換を用いた侵入者検出, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-118-8 (1999-9), 53–58.
  - 16) D. G. Lowe, Distinctive image features from scale-invariant keypoints, *Int. J. Comput. Vision*, **60-2** (2004-11), 91–110.
  - 17) Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37-2** (2000), 127–150.
  - 18) 松永力, 金谷健一, 平面パタンを用いる移動カメラのキャリブレーション, 情報処理学会研究報告 99-CVIM-116-1 (1999-5), 1–8.
  - 19) 坂本雅俊, 金谷健一, 自由に撮影した画像からの全周疑似ビデオ表示, 情報処理学会研究報告 2008-CVIM-161-14 (2008-1), 87–94.
  - 20) 清水慶行, 太田直哉, 金谷健一, 信頼性評価を備えた最適な射影変換の計算プログラム, 情報処理学会研究報告 98-CVIM-111-5 (1998-5), 33–40.
  - 21) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [I] - 直線の当てはめ -, 電子情報通信学会誌, **92-3** (2009-3), 229–233.
  - 22) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [II] - だ円の当てはめ -, 電子情報通信学会誌, **92-4** (2009-4), 301–306.
  - 23) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [III] - 基礎行列の計算 -, 電子情報通信学会誌, **92-6** (2009-6), 463–468.
  - 24) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [IV・完] - 発展と動向 -, 電子情報通信学会誌, **92-7** (2009-7), to appear.
  - 25) 5 植芝俊夫, 富田文明, 平面パターンを用いた複数カメラシステムのキャリブレーション, 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, **44-SIG17** (2003-12),

89–99.

## 付 録

### A. 式 (12) の導出

27 次元ベクトル  $\xi_\alpha$  と  $9 \times 27$  行列  $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$  を次のように定義する .

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} \xi_\alpha^{(1)} \\ \xi_\alpha^{(2)} \\ \xi_\alpha^{(3)} \end{pmatrix}, \quad I^{(1)} = \begin{pmatrix} I \\ O \\ O \end{pmatrix}, \quad I^{(2)} = \begin{pmatrix} O \\ I \\ O \end{pmatrix}, \quad I^{(3)} = \begin{pmatrix} O \\ O \\ I \end{pmatrix} \quad (26)$$

すると拘束式  $(\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, h) = 0, k = 1, 2, 3$  は次のように書き直せる .

$$(\bar{\xi}_\alpha, I^{(1)}h) = 0, \quad (\bar{\xi}_\alpha, I^{(2)}h) = 0, \quad (\bar{\xi}_\alpha, I^{(3)}h) = 0 \quad (27)$$

ただし,  $\bar{\xi}_\alpha$  は  $\xi_\alpha$  の真値である . 一方, 式 (11) は次のように書ける .

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]_4^-(\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (28)$$

ここに  $V_0[\xi_\alpha]_4^-$  は式 (11) に現れる  $27 \times 27$  行列である . そこで, 式 (28) を式 (27) のもとで最小化する . ラグランジュ乗数を導入して  $NJ/2 - \sum_{k=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} (\bar{\xi}_\alpha, I^{(k)}h)$  を  $\bar{\xi}_\alpha$  で微分して 0 と置くと次のようになる .

$$-V_0[\xi_\alpha]_4^-(\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha) - \sum_{k=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} I^{(k)}h = 0 \quad (29)$$

両辺に  $V_0[\xi_\alpha]$  を掛けると, 誤差による変動  $\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha$  は共分散行列の定義域 ( 零空間の直交補空間 ) にあり, したがってそこへの射影行列  $V_0[\xi_\alpha]V_0[\xi_\alpha]_4^-$  に不変であることから,  $\bar{\xi}_\alpha$  が次のように得られる .

$$-(\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha) - \sum_{k=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} V_0[\xi_\alpha] I^{(k)}h = 0 \quad (30)$$

式 (29) から得られる  $V_0[\xi_\alpha]_4^-(\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)$  と式 (30) から得られる  $\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha$  を式 (28) に代入すると  $J$  が次のように書ける .

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \sum_{k=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} V_0[\xi_\alpha] I^{(k)}h, \sum_{l=1}^3 \lambda_\alpha^{(l)} I^{(l)}h \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} \lambda_\alpha^{(l)} (h, I^{(kl)\top} V_0[\xi_\alpha] I^{(k)}h) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{\alpha}^{(k)} \lambda_{\alpha}^{(l)} (\mathbf{h}, V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \mathbf{h}) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{\alpha}^{(k)} \lambda_{\alpha}^{(l)} V_{\alpha}^{(kl)} \quad (31)$$

ただし,  $V_{\alpha}^{(kl)} = (\mathbf{h}, V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \mathbf{h})$  と置いた. 式 (30) から得られる  $\bar{\xi}_{\alpha}$  を式 (27) の第  $k$  式に代入すると次のようになる.

$$\sum_{l=1}^3 V_{\alpha}^{(kl)} \lambda_{\alpha}^{(l)} = -(\xi_{\alpha}, \mathbf{I}^{(k)} \mathbf{h}) = -(\xi_{\alpha}^{(k)}, \mathbf{h}) \quad (32)$$

これは  $\lambda_{\alpha}^{(k)}$  に関する連立 1 次方程式であるが, 係数行列  $V_{\alpha} = (V_{\alpha}^{(kl)})$  はデータに誤差がないときはランク 2 の特異行列となる (後述). そこで最小二乗法の意味で, すなわちランク 2 の一般逆行列  $W_{\alpha} = (V_{\alpha})_2^{-}$  を用いて解く. その結果次のようになる.

$$\lambda_{\alpha}^{(k)} = - \sum_{l=1}^3 W_{\alpha}^{(kl)} (\xi_{\alpha}^{(l)}, \mathbf{h}) \quad (33)$$

これを式 (31) に代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \left( \sum_{m=1}^3 W_{\alpha}^{(km)} (\xi_{\alpha}^{(m)}, \mathbf{h}) \right) \left( \sum_{n=1}^3 W_{\alpha}^{(ln)} (\xi_{\alpha}^{(n)}, \mathbf{h}) \right) V_{\alpha}^{(kl)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m,n=1}^3 \left( \sum_{k,l=1}^3 W_{\alpha}^{(km)} V_{\alpha}^{(kl)} W_{\alpha}^{(ln)} \right) (\xi_{\alpha}^{(m)}, \mathbf{h}) (\xi_{\alpha}^{(n)}, \mathbf{h}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m,n=1}^3 W_{\alpha}^{(mn)} (\xi_{\alpha}^{(m)}, \mathbf{h}) (\xi_{\alpha}^{(n)}, \mathbf{h}) \end{aligned} \quad (34)$$

ゆえに式 (12) が得られる. ただし, 一般逆行列に関する恒等式  $W_{\alpha} V_{\alpha} W_{\alpha} = W_{\alpha} (W_{\alpha})_2^{-} W_{\alpha} = W_{\alpha}$  を用いた.

B. 式 (14), (15), (16) の導出

ベクトル  $\xi_{\alpha}^{(k)}$  の定義から

$$x'_{\alpha} \xi_{\alpha}^{(1)} + y'_{\alpha} \xi_{\alpha}^{(2)} + f_0 \xi_{\alpha}^{(3)} = 0 \quad (35)$$

が恒等的に成立することがわかる. 式 (35) と  $\mathbf{h}$  との内積をとると,

$$(x'_{\alpha} \xi_{\alpha}^{(1)} + y'_{\alpha} \xi_{\alpha}^{(2)} + f_0 \xi_{\alpha}^{(3)}, \mathbf{h}) = 0 \quad (36)$$

となる. これは  $x_{\alpha}, y_{\alpha}, x'_{\alpha}, y'_{\alpha}$  に関する恒等式であるから, それぞれに関する導関数も 0

となる. その結果, データに誤差がないとき次のようになる.

$$(x'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(1)}]_1 + y'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(2)}]_1 + f_0 [\mathbf{T}_{\alpha}^{(3)}]_1, \mathbf{h}) = 0, \quad (x'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(1)}]_2 + y'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(2)}]_2 + f_0 [\mathbf{T}_{\alpha}^{(3)}]_2, \mathbf{h}) = 0,$$

$$(x'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(1)}]_3 + y'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(2)}]_3 + f_0 [\mathbf{T}_{\alpha}^{(3)}]_3, \mathbf{h}) = 0, \quad (x'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(1)}]_3 + y'_{\alpha} [\mathbf{T}_{\alpha}^{(2)}]_3 + f_0 [\mathbf{T}_{\alpha}^{(3)}]_3, \mathbf{h}) = 0 \quad (37)$$

ただし,  $[\mathbf{T}_{\alpha}^{(k)}]_i$  は行列  $\mathbf{T}_{\alpha}^{(k)}$  ( $= \xi_{\alpha}^{(k)}$  のヤコビ行列) の第  $i$  列であり, データに誤差がないときは  $(\xi_{\alpha}^{(k)}, \mathbf{h}) = 0$  が成立することを用いた. これら 4 式から次式を得る.

$$(x'_{\alpha} \mathbf{T}_{\alpha}^{(1)} + y'_{\alpha} \mathbf{T}_{\alpha}^{(2)} + f_0 \mathbf{T}_{\alpha}^{(3)})^{\top} \mathbf{h} = 0 \quad (38)$$

これに左から  $\mathbf{T}_{\alpha}^{(k)}$  を掛けて式 (10) を用いると, 次式を得る.

$$(x'_{\alpha} V_0^{(k1)} [\xi_{\alpha}] + y'_{\alpha} V_0^{(k2)} [\xi_{\alpha}] + f_0 V_0^{(k3)} [\xi_{\alpha}]) \mathbf{h} = 0 \quad (39)$$

$(\mathbf{h}, V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}] \mathbf{h})$  を  $(kl)$  要素とする行列を  $V_{\alpha}$  と書くと, 上式と  $\mathbf{h}$  の内積をとれば次式が成り立つ.

$$V_{\alpha} \begin{pmatrix} x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \\ f_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (40)$$

となる. ゆえに  $x'_{\alpha}$  (式 (2) 参照) は  $V_{\alpha}$  の零ベクトルである. したがって, 一般逆行列の性質より  $W_{\alpha} = (V_{\alpha})_2^{-}$  の零ベクトルでもあり,  $W_{\alpha} V_{\alpha}$  および  $V_{\alpha} W_{\alpha}$  はともにそれに直交する空間への射影行列である. ゆえに次のように書ける.

$$W_{\alpha} V_{\alpha} = V_{\alpha} W_{\alpha} = \mathbf{I} - \mathcal{N}[x'_{\alpha}] \mathcal{N}[x'_{\alpha}]^{\top} \quad (41)$$

ただし,  $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す. 式 (41) の中の辺と右辺を  $u_i$  で微分すると次のようになる.

$$\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial u_i} W_{\alpha} + V_{\alpha} \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial u_i} = \mathbf{O} \quad (42)$$

左から  $W_{\alpha}$  を掛け,  $\partial W_{\alpha} / \partial u_i$  も  $x'_{\alpha}$  を零ベクトルにもつこと, したがって射影行列  $W_{\alpha} V_{\alpha}$  に不変であることに注意すると次式を得る.

$$\frac{\partial W_{\alpha}}{\partial u_i} = -W_{\alpha} \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial u_i} W_{\alpha} \quad (43)$$

$9 \times 3$  行列  $\Xi_{\alpha}$  を

$$\Xi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha}^{(1)} & \xi_{\alpha}^{(2)} & \xi_{\alpha}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (44)$$

と置くと, 式 (12) は次のように書ける.

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{h}, \Xi_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{h}) \quad (45)$$

これを  $u_i$  で微分すると次のようになる ( $(\cdot)_i$  は第  $i$  成分) .

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\Xi_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{h})_i - \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{h}, \Xi_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial u_i} \mathbf{W}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{h}) \quad (46)$$

行列  $M$  を式 (15) のように定義すると、右辺第 1 項は  $2M\mathbf{h}$  の第  $i$  成分になっている . 式 (16) で定義した  $v_{\alpha}^{(k)}$  を第  $k$  成分とするベクトルを  $v_{\alpha}$  とすれば次のように書ける .

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{W}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{h} \quad (47)$$

行列  $V_{\alpha}$  の定義より、右辺第 2 項中の  $\partial V_{\alpha} / \partial u_i$  は  $(kl)$  要素が  $2 \sum_{j=1}^9 V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}]_{ij} u_j$  の行列である . ゆえに式 (46) の右辺第 2 項は次のようになる .

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{h}, \Xi_{\alpha} \mathbf{W}_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial u_i} \mathbf{W}_{\alpha} \Xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{h}) &= \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{v}_{\alpha}, \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial u_i} \mathbf{v}_{\alpha}) \\ &= \sum_{j=1}^9 \left( \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 V_0^{(kl)} [\xi_{\alpha}]_{ij} v_{\alpha}^{(k)} v_{\alpha}^{(l)} \right) u_j = 2 \sum_{j=1}^9 L_{ij} u_j \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、 $L_{ij}$  は式 (15) の行列  $L$  の  $(ij)$  要素である . 以上より式 (14) が得られる . 以上ではデータに誤差がないと仮定したが、データに誤差があるときは式 (40) は厳密には成立せず、 $V_{\alpha}$  の最小固有値は厳密には 0 でないが、その場合は一般逆行列  $(\cdot)_2^{-}$  の計算で最小固有値が 0 に置き換わる .