

進化手法による最適同期ネットワークの設計

山本 聡彦^{†1} 生天目 章^{†1}

自然界における集団行動、多数のエージェントや要素間の相互作用について、協調制御に関する重要な問題特性としてコンセンサス問題がある。そしてコンセンサス問題は複雑ネットワークとも深い関連がある。近年、様々な分野における複雑ネットワーク構造を考慮した研究が進められているが、目的特性に合った最適なネットワークとは何かという命題の研究は、未だ解明されていない点が多くある分野である。従来研究されてきたネットワークモデルは規則的なルールを下に作成し、その特性をみていくものが多いが、本研究においては進化的アルゴリズムにより目的特性に合うよう進化させることで最適なネットワークを生成させる。最適化のための適応関数として、コンセンサス、同期問題の指標とリンク密度の2つの組合せを考え、進化的アルゴリズムにより適応関数に合う特性をもつ最適なネットワークを進化生成させる。それにより、コンセンサス、同期問題に最適なネットワークを進化生成させる。

Evolutionary Optimized Synchronization Networks

TOSHIHIKO YAMAMOTO^{†1} and AKIRA NAMATAME^{†1}

Collective behavior in nature, the interaction between agents and factors, there is consensus problem as an important characteristic for coordinated control problem. Consensus problem is closely related to the complex networks. Recently, many studies are being considered in the complex network structure, the question what network is most suitable to the property of the purpose has not been answered yet in many areas. In the previous study, network model has been created under the regular rules, and investigate their characteristics. But in this study, network is evolved to suit the characteristics of the objection by evolutionary algorithm and create optimized network. As a function of the adaptive optimization, we consider the objection that combine consensus, synchronization index and the density of the link, and create the optimized network which is suitable to the property of the objective function by evolutionary algorithms. As a result, we generate optimal consensus and synchronous network.

^{†1}防衛大学校電気情報学群情報工学科, 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20
Dept. of Computer Science, National Defense Academy of Japan,

1. はじめに

動物における自然界の群れ行動や鳴き声等の集団行動や同期現象、社会における意見の合意、多数のエージェントの協調制御問題は、要素間の相互作用によって起こる創発現象の問題として扱うべき重要な対象の一つとなりうるものである。そしてその問題はコンセンサス問題として捉えることができ、特性を見ていく上で複雑ネットワークと深い関連がある。近年の複雑系科学において、様々な分野における複雑ネットワーク構造を考慮した研究が進められているが、目的特性に合った最適なネットワークとは何かといった従来ネットワークに捉われない命題の研究は、未だ解明されていない点が多くある分野である。ランダムネットワーク⁶⁾、スモールワールド¹⁸⁾、スケールフリー¹⁾等の従来ネットワークの作成方法として、次数を中心とした優先的選択、規則的な付加やランダムリワイヤリング等、ある規則的なルールを下にネットワークを作成し、その特性をみていくものが多い。本研究においては進化的アルゴリズムにより目的特性に合うよう進化させることで最適なネットワークを生成させる。

本研究の目的は、コンセンサス、同期問題において最適な特性をもつネットワークを生成することであり、進化的手法を用いて、最適なネットワークを設計する方法を提案する。ラプラシアン行列の固有値が同期ネットワークにおいて、重要な役割をもつという特性があり、それに基づいてリンクコストの最小化の制約を加えながら、最も同期問題に対して優れたネットワークを進化生成させ、その構造を明らかにする。最適化のための適応関数としては、コンセンサス、同期問題に関する指標であるネットワークのラプラシアン行列の第2最小固有値、最大固有値を考え、固有値比率の最小化とネットワーク生成コストの最小化を目指して最適なネットワークを進化生成させる。それにより、最も同期問題に対して優れたネットワークを進化生成させる。

2. コンセンサス問題

コンセンサス問題における合意とは、状態量をもつエージェントの状態がある同一の値に収束することを表す。全てのエージェントの状態量が同一になったとき、合意が達成されたという。コンセンサス問題は自然界におけるホタルの発光⁴⁾同期現象、人間の議論における意見の合意や集団行動¹⁰⁾における同期現象だけでなく、分子間の相互作用におけるメカニ

Yokosuka, Hashirimizu 1-10-20, Japan

ズムを捉えるための物理学的視点¹⁶⁾ や多数のエージェントを制御するための問題として監視, 探索, 移動複数ロボットを制御するための協調制御¹²⁾⁻¹⁴⁾ 効率的なセンサネットワークの構築設計等, 多様な問題と関連したものである. そしてコンセンサ問題はネットワークと深い関連があり, グラフ理論を用いてラプラシアン行列における固有値により収束性について捉えることができる.

2.1 ラプラシアン行列

ラプラシアン行列は次式のように定義される.

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} \quad (1)$$

ここで $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ は対角行列であり, $n \times n$ の隣接行列 \mathbf{A} について, $d_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ である⁹⁾.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \quad d_i = \begin{cases} \sum_i a_{ij} & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & d_2 & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & d_3 & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & d_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ラプラシアン行列の固有値を最小値から最大値まで順に並べると

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (5)$$

となる. ここでラプラシアン行列の第2 最小固有値 λ_2 は代数的連結性と呼ばれ, 収束の速さと関係する. 最大固有値 λ_n は情報通信の遅れに対するロバスト性と関係がある.

2.2 コンセンサ問題における収束性

n 体からなる複数のエージェント (ノード) の系に対して, それぞれのエージェントの状態量 x_i , ($1 \leq i < n$) がある一定の値に収束するとき, 合意が達成される. このとき, 次式が成り立つ.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n. \quad (6)$$

これは全てのエージェントが同じ状態量をもつことであり,

$$x_i = \alpha \mathbf{1}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (7)$$

と表すことができる. ここで $\mathbf{1} \triangleq [1, \dots, 1]$, であり α は全てのエージェントの collective decision(合意の収束値) と呼ばれる.

ここで, 複数のエージェントがいると仮定し, それぞれが次式のような状態量に関するダイナミクスをもつとする.

$$\dot{x}_i = u_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (8)$$

ここで, $x_i \in R$ は状態 (state), $u_i \in R$ は入力 (input) であり, グラフ $G = (V, E)$ において, エージェント (ノード) 間で相互作用し, コンセンサに達することを考える. グラフ G における隣接行列は $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ であり, エージェントの近傍 (neighbors) は次式のように定義する.

$$N_i \triangleq \{j \in V : a_{ij} \neq 0\}. \quad (9)$$

エージェント (ノード) j がエージェント i の近傍であるならば, エージェント i, j 間において通信 (相互作用) する. ここで全てのエージェントとその近傍について, 頂点集合 $V = \{1, \dots, n\}$ と辺集合 $E = \{(i, j) \in V \times V\}$ によりネットワークとして捉えていくことができる. このネットワークとしてのグラフ $G = (V, E)$ が隣接行列 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ に基づき, それぞれのエージェント (ノード) が通信 (相互作用) してコンセンサに達し, 収束していくダイナミクスは次式のように定義できる.

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t) - x_i(t)), \quad 1 \leq i \leq n \quad (10)$$

このエージェントの相互作用によるダイナミクスを通して収束していき, コンセンサが

達成されたならば、 $x_i = \alpha \mathbf{1}$ となるので、全てのエージェントの状態量の総和は不変量となるか又は $\sum_i \dot{x}_i = 0$ となることを踏まえ、コンセンサスの収束値について以下のことがいえる。

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_i x_i(0). \quad (11)$$

つまり、collective decision(合意の収束値)は、全てのエージェントの初期状態の平均値である。このコンセンサスのアルゴリズムについて不変的特性に着目して、average consensus algorithm として用いられる。そして(10)式はラプラシアン行列を用いて以下のように表すことができる。

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{L}\mathbf{x}(t) \quad (12)$$

そして、どのようなネットワークがコンセンサス、同期に適しているかを考える上で、次のようなダイナミクス過程を考える。

$$\dot{x}_i = F(x_i) - \sigma \sum_j L_{ij} H(X_j) \quad (13)$$

ネットワーク上において、それぞれのエージェント(ノード)の状態量がコンセンサスに達する過程はこのようなダイナミクスにより捉えることができる²⁾。

ここで $x_i (i \in 1, 2, \dots, n)$ はそれぞれの状態量を表す変数であり、 F, H はそれぞれ進化、結合関数である。ここで σ は定数である。ここで一般的な線型安定な解析は、 $\dot{x}^s = F(x^s)$ の解である x^s を考え、完全に同期となっている状態を展開する。

固有値において、異なった効果的接合 $\alpha = \sigma \lambda_i$ が存在し、リアプノフ指数により有界な区間 $[\alpha_A, \alpha_B]$ において負定である^{2),5)} と一般化できる。

そして全ての効果的接合において次式が成立する。

$$\alpha_A < \sigma \lambda_2 \leq \dots \leq \sigma \lambda_n < \alpha_B, \quad (14)$$

すなわち同期状態が線形的に安定となる条件は $\frac{\lambda_n}{\lambda_2} < \frac{\alpha_B}{\alpha_A}$ であり、ネットワーク構造が重要な影響を及ぼすことが分かる。

つまり、同期条件が安定となるためにはラプラシアン行列による第2最小固有値と最大固有値による比率 $\frac{\lambda_n}{\lambda_2}$ が小さいほど良いということになり、固有値による比率を

$$Q = \frac{\lambda_n}{\lambda_2} \quad (15)$$

として定めると、 Q (condition number) がより小さい特性をもつネットワーク構造がコンセンサス、同期問題において優れたものとなる。そして Q がより小さいものを求めるということは、 λ_n がより小さいものを求めると共に、 λ_2 がより大きいすなわち代数的連結性の高いネットワークを求めるということになる。

本研究においては、このようなラプラシアン行列の固有値特性に基づいた最適化を行うことによって、最もコンセンサス、同期問題に対して適したネットワークを進化生成させる。

3. 目的関数の定義

ネットワーク G は、一定のノード数 (n) を持つ無向グラフとして表す、ここで、ネットワークの隣接行列 $A = [a_{ij}]$ により、進化的アルゴリズムを用いて最適ネットワークを生成する。この隣接行列 A は全てのノードに与えるので、 $n \times n$ 行列である。このコード化により、隣接行列を直線状に並べることで、進化アルゴリズムが使えるという利点を持つ。本研究における進化アルゴリズムの適用、ラプラシアン行列の固有値を考慮する上で重要な役割を果たす隣接行列は、図1に示すようにそれぞれのノードがエッジにより接続される。

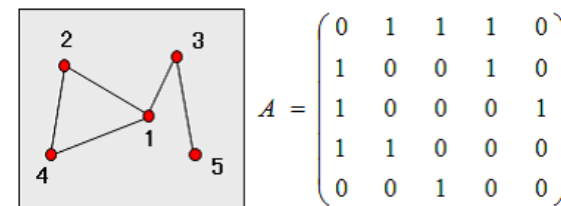


図1 隣接行列の接続

3.1 リンク密度

安定性などのネットワークの重要な性質は、その根底にあるネットワークの隣接行列と深い関係がある^{8),17)}。ここでネットワークの密度をノード数を n として、次に定義する。隣接行列を用いて、ネットワーク G の平均次数を定義する。

全てのノードが他のノードと連結されている値を最大値として、ネットワーク G が持つ

リンク数の相対比により、リンク密度 $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ を定義する。

$$\alpha = \frac{1}{nC_2} \sum_{k=1}^n a_{ij} \quad (16)$$

本研究では、次式で定義するネットワークの平均次数を用いる。

$$\langle k \rangle = (n-1)\alpha = (n-1) \frac{1}{nC_2} \sum_{k=1}^n a_{ij} \quad (17)$$

この値を用いることで、ネットワークが持つリンク数を制約することができる。

3.2 重み付き評価関数の設定

進化アルゴリズムで最適化する評価関数は (17) 式とノード間の隣接行列 A から求まるラプラシアン行列 L の第 2 最小固有値、最大固有値である λ_2, λ_n との間に重み付けで表す。 $\omega (0 \leq \omega \leq 1)$ は、目的関数を線形結合するパラメータである。(18) 式において、 $\omega = 0$ とした場合は、リンク密度の最小化、一方で、 $\omega = 1$ とした場合は、ネットワークのラプラシアン行列の固有値に関する関数のみを最小化する問題になる。そしてコンセンサス問題についての最適化を行うための評価関数として、コンセンサスの収束性に関する第 2 固有値と情報の遅延に対するロバスト性に関する最大固有値を考慮した最適化する適応関数は、 λ_2, λ_n の固有値比率 Q と (17) 式の 2 つを重み付けした次式で与える。

$$E(\omega) = \omega Q + (1 - \omega) \langle k \rangle (0 \leq \omega \leq 1) \quad (18)$$

と定められる。

4. 進化的アルゴリズムの適用

ネットワークの特徴量からその構造を生成するシステムは多くのモデルがある。これにはネットワークの生成を遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm : GA) による最適化として実現するモデルもある。本研究において扱うシステムは、ネットワークを接続行列にコード化して、交叉と突然変異を行わせる。このあと、親個体と子個体の中で最適な個体を選択、残りは淘汰する。これを繰り返して目的関数に最適化したネットワークが得られる。

世代交代法として MGG¹⁵⁾ モデルを用いる。生存選択においては、最良の 2 個体を選択するものとする。リンクを張り替えて、新しいネットワークを生成する。初期世代のネットワークとして、ある存在確率でリンクを生成したものをを用いる。本研究では、ネットワークの次数分布が初期密度 p_0 を持つポアソン分布になるように生成する。ここで、 p_0 は $7/nC_2$ 、

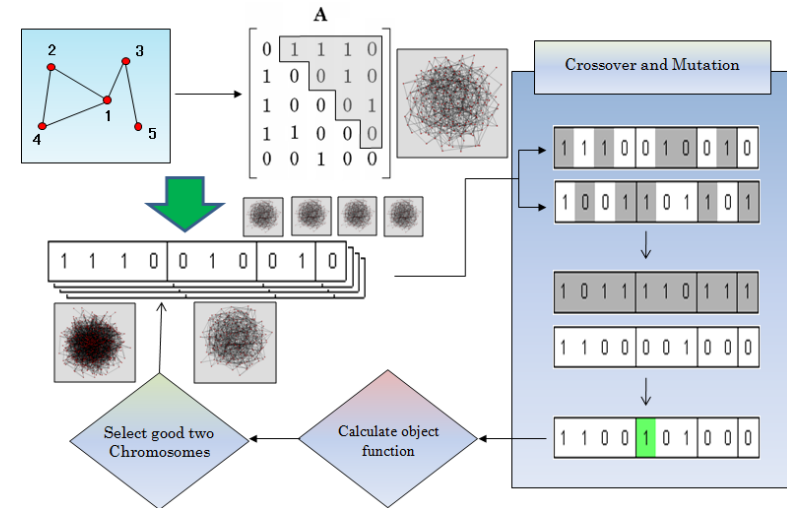


図 2 進化アルゴリズムによるネットワーク形成の概念図

個体数は 50、交叉率は 0.7、突然変異率は $2/nC_2$ である。ネットワーク G の隣接行列を遺伝子表現として用いるが、隣接行列の上の三角成分を直線状に並べたものを染色体とする。このため、行列は対称であり、要素は 0 または 1 の値のみを取る。また、対角成分は 0 となる。上記の交叉や突然変異では、独立したネットワークが生じてしまう可能性がある。そのため、それを修正する操作として、新たに生成されたネットワークが分離しているネットワーク、つまりノード間の距離が量れなくなった場合、評価値を高め、そのネットワークが選ぶことができないようにする。

以上の手順を繰り返しながら、(18) 式で定式した適応関数により、どの程度の特徴量を達成したかを適応度とし、最適化を行うことで所望のネットワークを進化生成する。このアルゴリズムの概念は、図 2 に示す。

5. 生成された最適ネットワーク

5.1 初期ネットワーク

初期に生成するネットワークを図 3 示す。各ノード当たり、平均次数は 7 で、ポアソン分布に従って生成させるため、初期ネットワークはランダムネットワークであることが分か

る．このようなランダムネットワークを生成し，遺伝的アルゴリズムに適用する．

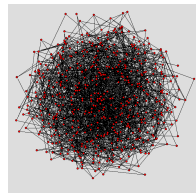


図3 初期ネットワーク

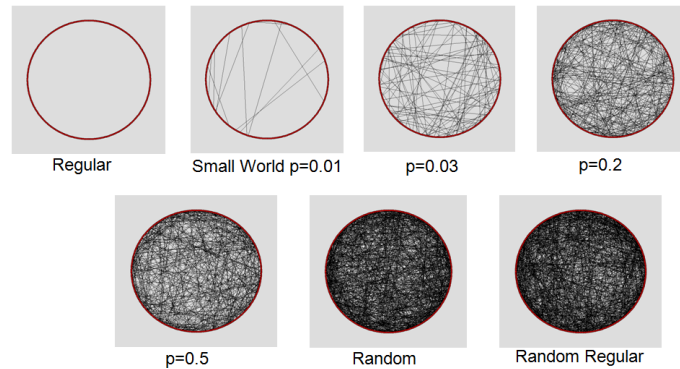


図4 比較する従来ネットワーク

5.2 従来ネットワークモデル

ネットワークの同期問題で，ラプラシアン行列の第2最小固有値 λ_2 が高いことはそのネットワークの代数的連結性が高いということであり，同期問題の解への収束性が速い特性をもつネットワークとなる．それに対して有効な従来モデルとしてスモールワールドネットワークがあげられる．従来研究においては，スモールワールドネットワークはレギュラーネットワークよりも収束の速い有効モデルとされている^{7),11),12)}．

ノード n 個を輪になるようにつなぎ， k を偶数として右隣，左隣 $k/2$ までのノードをつないだ近傍のノードとリンクが張られた同じ次数をもつネットワークとしてレギュラーネットワークがある．レギュラーネットワークのようなモデルは λ_2 が低く，収束に時間がかかる

ネットワークであるが，スモールワールドネットワークはランダムに選んだノードとのリンク張り替えにより λ_2 の値が高くなっていく．確率 p でリンクの張り替えを行うとして， $p=0$ のときはリンクの張り替えを全く行わず，もとのレギュラーネットワークのままである． $0 \leq p \leq 1$ において，近傍を繋ぐリンクによりクラスタリング係数 C の値がおおきいまま，張り替えられたリンクがショートカットの役割をすることにより，平均経路長 L の値が急激に小さいスモールワールドとなる．スモールワールドネットワークは p が大きくなるにつれてより代数的連結性が高いネットワーク特性をもつようになる．そのためレギュラーネットワークよりも収束の速いネットワーク特性をもつようになる．そして $p=1$ のときはすべてのリンクを張り替えることになり，ネットワークはランダムネットワークとなる．ランダムネットワークや p が1に近いスモールワールドネットワークは代数的連結性が p の値に中において高い特性を示し，収束の速さはレギュラーネットワークと大きな違いがでることになり，速い収束特性を示すネットワークとなる．

そしてさらなる高い代数的連結性をもつネットワークモデルとしてランダムレギュラーネットワークがあげられる³⁾．ランダムレギュラーネットワークは，レギュラーネットワークのように全てのノードの次数が同じであるだけでなく，ランダムネットワークのようにそれぞれのノードからのリンクがランダムに張られている．そのためレギュラーネットワークは近傍のノードとのみリンクが張られているため，代数的連結性は低いが，全次数が同じ且つランダムにリンクが張られることによりランダムレギュラーネットワークの均質性は高く，代数的連結性もより大きくなる．そのためランダムネットワークや p が1に近いスモールワールドネットワークの代数的連結性も高いが，ランダムレギュラーネットワークはそれらよりも優れた代数的連結性をもつネットワーク構造となる．

これらの従来モデルである比較ネットワーク (図4) とネットワークのラプアシアン行列の全固有値推移 (図5)，そして代数的連結性をみるため，ラプラシアン行列の第2最小固有値を比較したものを示す (図6)．図5において，RG はレギュラーネットワーク，SW はスモールワールドネットワーク，ER はランダムネットワーク，RR はランダムレギュラーネットワークを表す．ノード数は500であり，全固有値の数は500となる．

図6より，レギュラーネットワークは代数的連結性が低く，スモールワールドネットワークは p が大きくなるにつれてより代数的連結性が高いネットワーク特性をもつようになることが分かる．そしてランダムネットワークや p が1に近いスモールワールドネットワークは代数的連結性が p の値に中において高い特性を示し，ランダムレギュラーネットワークはそれらよりも優れた代数的連結性をもつネットワークであることが分かる．

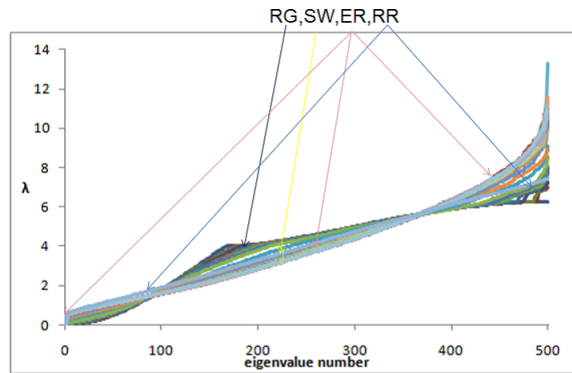


図5 従来モデルのラプラシアン行列の固有値推移

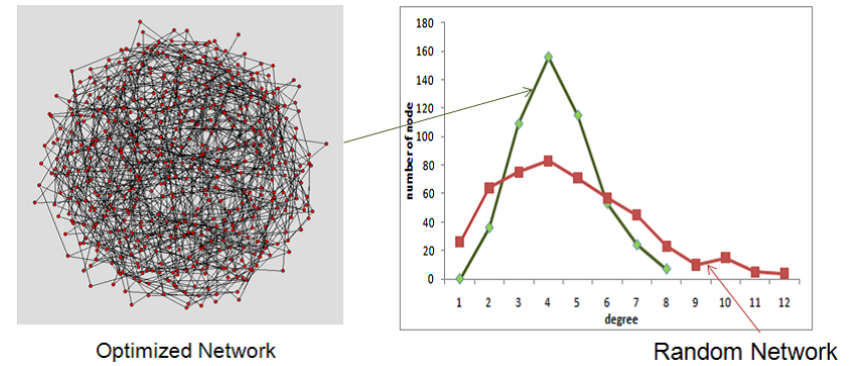


図7 最適ネットワークと度数分布

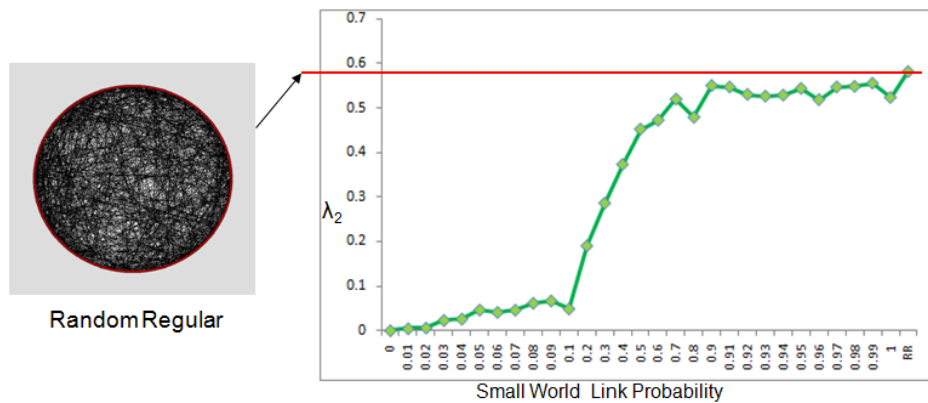


図6 従来モデルの第2最小固有値の比較

5.3 最適ネットワークと従来ネットワークとの比較

進化生成した最適なネットワークの構造を、図7に度数分布と併せて示す。本研究で生成した最適ネットワークが同期、コンセンサス問題に対してどの程度優れているかをみるために従来モデルとして有効とされるネットワークモデルとの比較を行う。比較する上でネットワークの平均次数は同等なもので行い、平均次数は4としている。

図6より従来モデルの中で、ランダムレギュラーネットワークが最も代数的連結性が高い

ネットワークであることが分かる。そして進化生成された最適ネットワーク (Optimized) の第2最小固有値との比較したものを図9に示す。進化生成された最適ネットワークが従来有効モデルのネットワークよりも大きく優れた代数的連結性をもっていることが分かる。

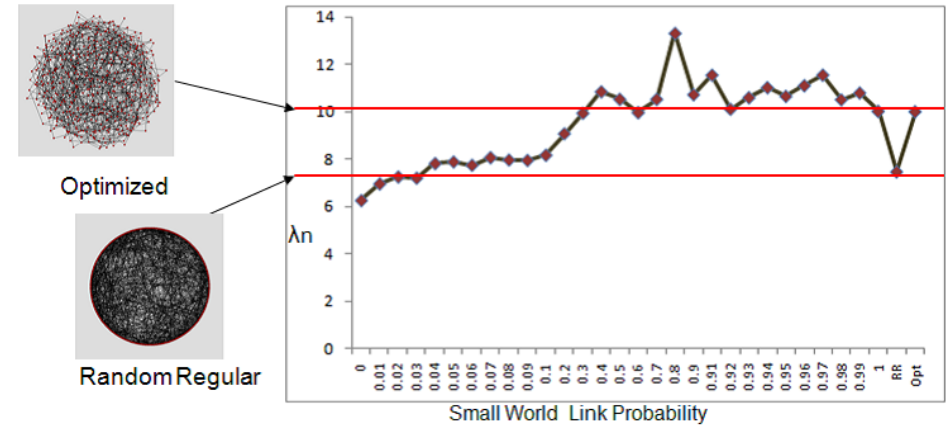


図8 ネットワークの最大固有値の比較

本研究による提案ネットワークが従来モデルのネットワークよりも優れた代数的連結性を

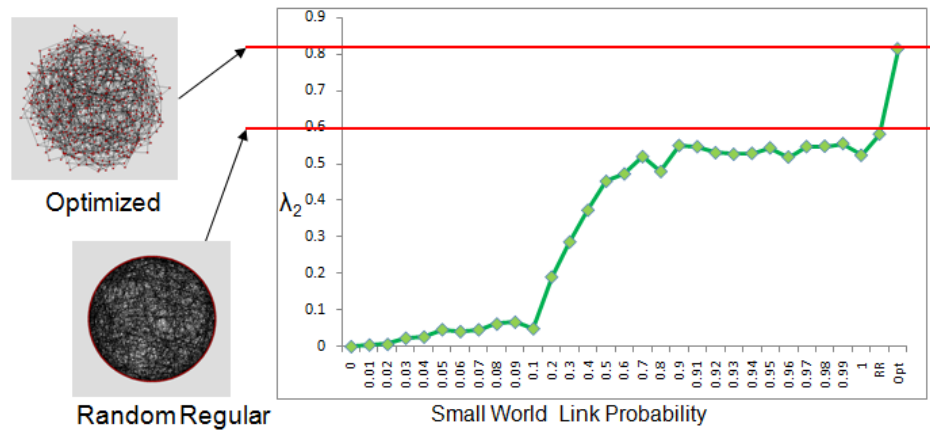


図9 最適ネットワークと第2最小固有値の比較

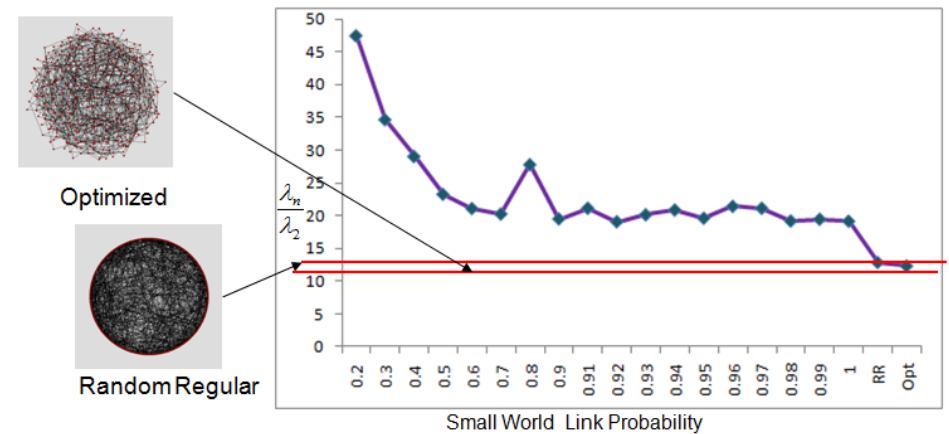


図10 ネットワークのQの比較

もつことは示したが、コンセンサスにおける合意の達成の情報通信遅れに対するロバスト性についても考慮したネットワークについてはラプラシアン行列の最大固有値と関連がある。そのため情報通信遅れに対するロバスト性についても考慮した同期条件が安定となるためにはラプラシアン行列による第2最小固有値と最大固有値による比率 Q (condition number) が小さいほど良いということになり、 Q がより小さい特性をもつネットワーク構造が同期、コンセンサス問題においてバランスのとれた優れたものとなる。

ここで各種ネットワークのラプラシアン行列の最大固有値の比較を行ったものを図8に、 Q (condition number) の比較を行ったものを図10に示す。

図8からスモールワールドのリンク確率が上がるにつれて、最大固有値も上がっていくが、ランダムレギュラーネットワークは最大固有値が低い特性を示している。これはランダムレギュラーの全次数が同じであるためにレギュラーネットワークに近い特性を帯びてくるからである。そのため図6において示したように従来モデルのネットワークの中ではランダムレギュラーネットワークが第2最小固有値も高い特性をもつため、図10における Q の値も従来モデルの中で最も低く、同期、コンセンサス問題において優れたネットワーク構造をもっている。しかし、本研究における進化生成最適ネットワークは、図9で示したようにランダムレギュラーネットワークより非常に高い代数的連結性もち、図8における最大固有値も代数的連結性が高い特性をもつスモールワールドネットワークより比較的小さい値とな

るよう進化している。その結果、図10における Q の値も従来モデルの中で最も低い値をもつランダムレギュラーネットワークよりさらに低い値をもち、最も同期、コンセンサス問題において優れたネットワークが進化生成されたことが分かる。これにより本研究による提案ネットワークが従来モデルより最も優れた最適なネットワーク構造であることがいえる。

これらの固有値特性が全固有値推移からネットワーク特性としてみる事ができる。ランダムネットワーク、ランダムレギュラーネットワーク、最適ネットワークの3種類の固有値推移を代表的な特徴推移として図11に示す。

第2最小固有値については、最適ネットワークが最も高く、次いでランダムレギュラーネットワーク、ランダムネットワークとなっている。ランダムネットワークや最適ネットワークは曲線的に、ランダムレギュラーネットワークは直線的に固有値が推移していき、最大固有値はランダムレギュラーネットワークが最も低い、ランダムネットワークが最も高い値となっている。進化ネットワークについては比較的小さい値に進化しており、非常に高い代数的連結性をもつという特性から、進化生成最適ネットワークが同期、コンセンサス問題においてバランスのとれた優れたネットワーク構造特性を示す Q の値が最も低くなっている。そのため進化生成最適ネットワークが従来モデルより最も同期、コンセンサス問題において適したネットワーク特性をもつことがいえる。

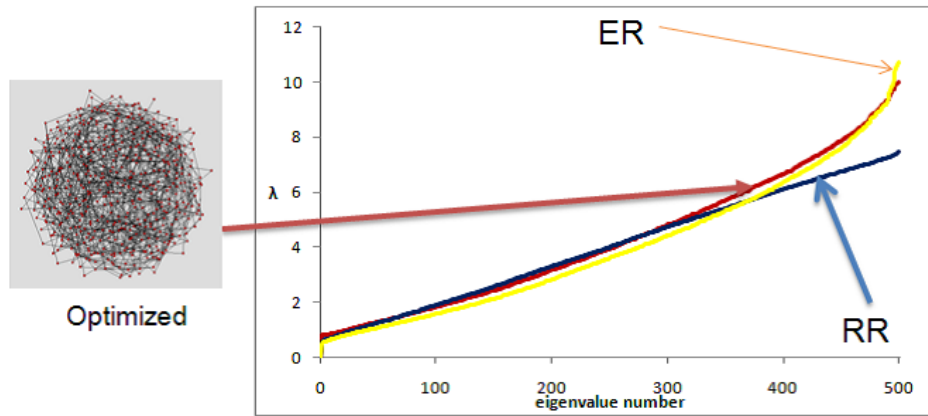


図 11 3種のネットワークの固有値推移

5.4 コンセンサスの収束性比較

これまで示してきた従来ネットワークモデルと進化手法により進化生成した最適ネットワークの比較により、本研究で提案した進化手法最適ネットワークが従来有効とされてきたネットワークモデルよりも代数的連結性、 Q (condition number) がより適した値をもち、コンセンサス、同期問題に対して優れた特性をもつことが分かった。

そしてこれらの特性をもつそれぞれのネットワークが実際にどの程度の収束性を示すかをみるために、それぞれのネットワークが収束していく過程と合意が達成し、収束が完了する時間の比較を行う。各種ネットワークにおいてそれぞれのノードに初期値を次式のようにもたせる。

$$x_i(0) = i (i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

そして各ノードの n 体からなる複数のエージェント (ノード) の系に対して、それぞれのエージェントの状態量 x_i ($1 \leq i < n$) が 2.2 で示したように一定の値に収束し、合意が達成されるまでに要する収束時間の比較を行う。すなわち、次式が成り立つ状態となるまでである。

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \quad (20)$$

これは全てのエージェントが同じ状態量をもつことであり、それに達するそれぞれのネッ

トワークの収束過程結果を図 12 示す。

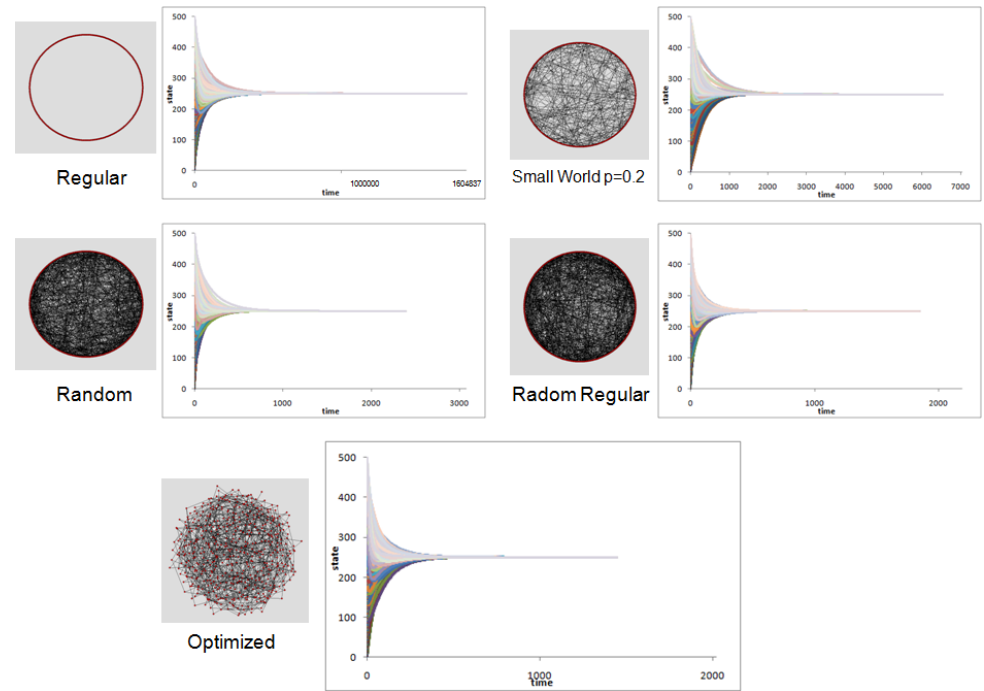


図 12 ネットワークの収束過程

レギュラーネットワークについては、代数的連結性が極めて低いため、収束には多大な時間を要している。スモールワールドネットワークは確率によるリンク張り換えによって図 6 で示したように代数的連結性が高まってくる。そのためここでは $p = 0.2$ のリンク確率によって第 2 最小固有値の高まりの傾斜が急になってきているものをスモールワールドネットワークの代表的な一つとして示す。スモールワールドネットワークはレギュラーネットワークと比較して収束時間が大幅に速くなり、 $p = 0.2$ のリンク確率においては、6532 ステップの収束時間となっている。

そして $p = 1$ のランダムネットワークについては、収束時間が 2393 ステップであり、リンク確率 p によるネットワークモデルの中では、収束が速いネットワークとなっている。全

でのネットワークの平均次数が同等であるにも関わらず、収束性に大きな差がでることは、様々な分野と関連する同期、コンセンサス問題において、ネットワーク構造がいかに重要であるかを示している。

ランダムレギュラーネットワークはレギュラーネットワークのように全てのノードの次数が同じ且つランダムにリンクが張られており、ランダムネットワークよりもさらに高い代数的連結性をもつため、収束はさらに速くなり、1848 ステップとなる。従来ネットワークモデルとして最も収束が速いランダムレギュラーネットワークと本研究で進化生成した最適ネットワークの収束時間を比較すると、1443 ステップとランダムレギュラーネットワークよりもさらに高速となっている。これまで検証してきたようにラプラシアン行列の固有値に基づいて、各種ネットワークの代数的連結性をみてきた結果、レギュラー、スモールワールド、ランダム、ランダムレギュラーネットワークの順で代数的連結性が高くなっており、進化手法最適ネットワークはそれらよりもさらに高い代数的連結性をもつことを示した。そして実際の収束時間もそれに対応して、進化手法最適ネットワークが最も優れた収束性をもっている。

本研究で進化手法により得られた最適ネットワークは、コンセンサス、同期問題において、スモールワールドネットワークらの従来有効モデルよりも優れた、最適という特性に相応しい優れた収束性をもっている。コンセンサス問題は自然界における集団行動や同期現象、多数のエージェントを制御するための問題としてロボット等の協調制御、効率的なセンサネットワークの構築設計等、多様な問題と関連したものである。様々な諸問題と関連するコンセンサス、同期問題に対する最適なネットワーク設計の構造の一つとして、本研究における最適ネットワークは最適な特性をもつネットワークとしてその有効性を示している。

6. まとめと今後の課題

本研究では、進化的アルゴリズムにより、リンク密度とネットワークのラプラシアン行列の固有値に基づいて、最適なネットワークを提案した。進化手法によるネットワークの最適化が従来コンセンサス、同期問題に対して優れたネットワークモデルとされるスモールワールドネットワークやランダムレギュラーネットワークよりも優れたものを生成し、より代数的連結性が高く、収束性に優れたネットワークが生成されることを示した。

今後の課題としては、本研究における最適ネットワーク特性やそれぞれのネットワークにおける固有値特性の解析をより深めていき、これらのネットワーク構造の意味をより探求していくことである。

参考文献

- 1) ALBERT, R. and BARÁBASI, A. L. Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of Modern Physics*, **74**, 1 (2002).
- 2) BARAHONA, M. Synchronization in Small-World Systems, *Physical Review Letters*, **89**, 5 (2002), 054101.
- 3) BOLLOBAS, B. *Random graphs*, Cambridge Univ Pr (2001).
- 4) BUCK, J. and BUCK, E. Synchronous fireflies, *Scientific American*, **234** (1976), 74–85.
- 5) DONETTI, L., HURTADO, P. I. and MUNOZ, M. A. Entangled networks, synchronization and optimal network topology (Oct 2005).
- 6) ERDŐS, P. and RÉNYI, A. On random graphs. I, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297.
- 7) HOVARESHTI, P. and BARAS, J. Consensus Problems on Small World Graphs: A structural Study, Technical report, Institute for Systems Research (Oct 2006).
- 8) KAUFFMAN, S. A. *The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution*, Oxford University Press (May 1993).
- 9) MERRIS, R. Laplacian graph eigenvectors, *Linear Algebra and its Applications*, **278**, 1-3 (July 1998), 221–236.
- 10) NEDA, Z., RAVASZ, E., BRECHET, Y., VICSEK, T. and BARABASI, A. L. The sound of many hands clapping, *Nature*, **403** (2000), 849–850.
- 11) OLFATI-SABER, R. Ultrafast consensus in small-world networks, Proceedings Proc. of American Control Conference (2005).
- 12) OLFATI-SABER, R., FAX, J. A. and MURRAY, R. M. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems, Proceedings of the IEEE, Vol.95 (2007).
- 13) OLFATI-SABER, R. and MURRAY, R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49** (2004), 1520–1533.
- 14) REN, W. and BEARD, R. W. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag (2008).
- 15) SATO, H., ISAO, O. and SHIGENOBU, K. A New Generation Alternation Model of Genetic Algorithms and Its Assessment., *Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence*, **12**, 5 (1997), 734–744.
- 16) STROGATZ, S. H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Phys. D*, **143**, 1-4 (2000), 1–20.
- 17) STROGATZ, S. H. Exploring complex networks., *Nature*, **410**, 6825 (March 2001), 268–276.
- 18) WATTS, D. J. and STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks., *Nature*, **393**, 6684 (1998), 440–442.