

## Richard E. Bellman : Dynamic Programming

Dover Publications, Incorporated (1957)

本書は「いつどこで何をすべきか？」を数学で説いている。数学という科学の言葉が人間行動の規範にまで踏み込んでいけるというのは画期的なことであろう。人間・社会・企業・機械など動くものすべてを多段決定過程と捉えて、その最適行動を1つの方程式の解によって与えている。微分方程式から研究を始めた Bellman (1920 ~ 84) は関数方程式と記述しているが、今では最適方程式、Bellman 方程式、Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式などと呼ばれている。その成立の根本概念は最適性の原理 (Principle of Optimality) である。最適政策の性質を規定する表現をはじめ、記述が一気に核心を突いている。内容は「多段決定過程の数学的方法」であるが、書名を「動的計画法 (DP)」にしたのはいかにも彼らしい。ダイナミック・システムの最適構造を解明した書物である。

DP は従来の数学の概念を大きく変えてきた。特に、Bellman は応用の数学ということを強く意図している。公理・定義・定理の連鎖の環から脱却して、それはいくつもの分野にわたる豊富な例に裏打ちされている。この本の特徴の1つは章末の、全373題の Exercise and Research Problems である。Research Problems は半世紀を経ようとしている今でも大多数が新鮮な研究テーマである。最後は「スキーム A と概念 B との関連は？」である。この最後まで解けた人が世界中にいるだろうか？ Research Problems のどれを解いても、論文が1つ書けることになる。1957年に書かれた書物が21世紀にかけてもいまだ研究テーマを内包していればこそ、20世紀の名著であろう。動的計画法研究の最大の参考文献は今もってこの Research Problems である。たとえば、オートマトンに非決定性はすでにあるが、この本には「非決定性」という用語はない。しかし、Research Problems には非決定性動的計画法の関数方程式が数カ所見られる。また、「制御」微分方程式、「ミニマックス型」微分方程式もある。これらの研究はその後いまだに手がつけられていない。この著作は Bellman の沸き出るアイデアの塊である。

DP は関連分野の研究者には格好の研究テーマであり続けている。世界で多くの教授職 (professorship) をつくることに貢献してきている。コンピュータ・サイエンス (人工知能、認識など)、工学 (制御、電気)、経済学 (数理ファイナンス、マクロ経済学)、数学 (オペレーションズ・リサーチ、統計科学) など理工学系はもちろん、生物系 (数理生物、生命科学)、社会科学系にまで及んでいる。2度のノーベル経済学賞—1995年の R. Lucas の合理的期待形成仮説 および 2004年の E. Prescott and F. Kydland の時間不整合性—の中の数学はほかでもない確率的動的計画法である。現在ではこれは再帰的方法 (recursive method) としてマクロ経済分析の基本ツールになっている。

DP はいわば汎用ソフトであり、簡単に適用できる。たいてい「最適性の原理より、… が成り立つ」と、すればよいからである。「最適性の原理」を「魔法の杖」のように使っている。この原理は厳密には証明を必要とする。Bellman は直感と表現にきわめて優れている。証明に手間ひまはかけない。一気に「… が成立する」といえるのである。通常は適用しようとする問題に対する前提 (環境、条件、状態、決定、システム、評価等々) の詳細なスペックとチェックが必要である。政策「クラス」などを明示した上で政策を織り込んだ目的関数を表現すべきであるが、大多数の適用例ではそこまでは明示されていない。この本ではほとんどが線形 (加法型) 評価であり、非線形と言っても確定的システム上の最適化問題が大多数である。このような場合、現在の状態にだけ依存したマルコフ政策クラス上で最適化を行えばよい。しかし、確率的システム上で非線形 (非加法型) 評価を最適化しようすると、マルコフ政策クラスでは最適政策の存在は保証されない。ましてや、非決定性システム上ではどのようになるだろうか、という問題が起こる。この解決の第1歩は政策クラスの適正な選択と叙述である。次に現時点までの累積値による「拡大」埋め込みである。

(平成 17年 5月 23日 受付)

岩本誠一 / 九州大学大学院経済学研究院  
iwamoto@en.kyushu-u.ac.jp