

## Robert Balzer : An 8-State Minimal Time Solution to the Firing Squad Synchronization Problem

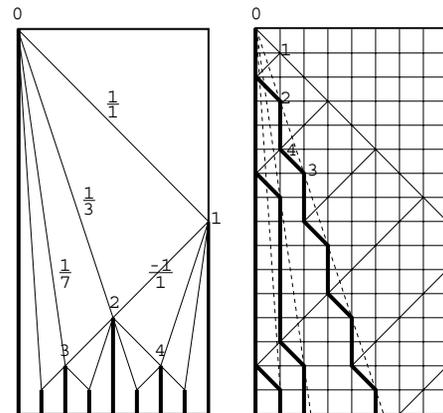
Information and Control, Vol.10, pp.22-42 (1967)

名著というより楽しいを紹介する。一斉射撃問題(英語では Firing Squad Problem)である。やや異なる両端以外は同じ有限セルオートマトンが  $n$  個, 同じ初期状態で1列に並んでいる。片端にいるのを将軍, 残りを兵士という。オートマトンは同期して遷移し, 時刻  $t+1$  の状態は時刻  $t$  の自分と両隣の状態が決まるから状態は波状に伝わる。将軍が「準備できたら撃て」の命令を出すと, あとは兵士達の状態変化だけで一斉射撃の状態にする方法; それまでの時間を答える問題だ。自己増殖で子のセルの一斉起動に必要である。1957年に Myhill が考えたといわれる。

1961年頃, 東大高橋研に滞在していた D. E. Muller 先生がお茶の時間にこの話を披露すると, いわゆる  $3n$  時間解はすぐできた。ところが後藤英一さんが MIT から帰国するなり,  $2n$  の解があるといい, 輪講で話した。これは複雑な仕掛けで, 状態数も何状態  $\times$  何状態  $\times \dots$  という感じで, 何千か何万かも定かでない。この書き物は残っていない。

やがて Waksman が 16 状態の解を発表し, 続いて Balzer が 8 状態のこの解を出す。私がこれを読み, 高橋秀俊先生に 8 状態でできるそうだと告げると, 「あの問題は本質的であり, 本質的なものは簡単になる」とこともなげにいわれた。

図の左は縦が時, 横が兵士である。時刻 0 に左端の将軍が命令を発し (0), 自分は太線で表す中央兵状態になる。同時に  $1/1, 1/3, \dots$  の波を右へ送る ( $1/3$  は 3 時間単位に 1 進むの意)。  $1/1$  の波は時刻  $n$  に右端に達し (1), 右端を中央兵状態にし,  $-1/1, -1/3, \dots$  の波を左へ送る。  $-1/1$  は  $1/3$  の波と時刻  $3n/2$  に (2) で出会い, 中央 ( $n/2$ ) が分かる。中央は中央兵状態になり,  $\pm 1/1, \pm 1/3, \dots$  の波を左右に送る。左へ進む  $-1/1$  の波は  $n/4$  の地点 (3) で (0) から来た  $1/7$  の波と時刻  $7n/4$  に出会い, 四分点が分かる。同様にもう 1 つの四分点 (4) も分かる。このように半分ずつの地点が分かり, 自分も両隣も中央兵になったら撃つのである。正確な所要時間は  $2n-2$  である。



図の右は  $1/3, 1/7, 1/15, \dots, 1/(2^k-1)$  の波の作り方を示す。左上 (0) から  $1/1$  の波が  $0, 1, 0, 1$  のリズムで右へ進む。1 の時 (1) 左へ  $-1/1$  の波を送る。この波は中央兵に当たるとマーカを生じ, それを 1 だけ右へ寄せる (2)。また  $-1/1$  の波はマーカに出会うとマーカを 1 だけ右へ寄せる (3)。マーカも  $0, 1, 0, 1$  のリズムで右へ進むが, 1 の時, 左へ  $-1/1$  の波を送る (4)。このようなマーカは  $1/3, 1/7, 1/15, \dots, 1/(2^k-1)$  の波になっているのが分かる。左へ遅い波を送るにはこの方式を反転する。

これだけであればあとはこの動きを生じるように状態を設定すればよい。状態は次の通り:

- |                   |              |
|-------------------|--------------|
| M: 中央兵            | F: 射撃状態      |
| L: 波を左に伝える媒体      | R: 波を右に伝える媒体 |
| C: 左に進む波とマーカ      | Q: 右に進む波とマーカ |
| B: マーカを左へ動かす右に進む波 |              |
| A: マーカを右へ動かす左に進む波 |              |

この他両端を示す X があるが, X は入力にだけ現れ, その結果 8 状態で十分であることが分かった。なかなか巧妙にできていて, 感心する。

Balzer 君とは 2 度会って話した。巻き毛, 早口, 聡明な若者であった。

(平成 16 年 3 月 10 日受付)

和田英一 / III 技術研究所  
wada@u-tokyo.ac.jp