

幾何学的当てはめのための最尤推定

菅 谷 保 之^{†1}

画像から抽出したデータからシーンの幾何学的モデルを推定する「幾何学的当てはめ」は、コンピュータビジョンの分野でよく現れる問題であり、その計算にはバンドル調整や最尤推定法がよく用いられている。本稿では、データとモデルパラメータが線形拘束条件で表される場合の最尤推定法について解説する。最尤推定の幾何学的意味や推定値の信頼性評価について述べるとともに、具体例を挙げて最尤推定の計算方法をわかりやすく説明する。

Maximum Likelihood Estimation for Geometric Fitting

YASUYUKI SUGAYA^{†1}

Geometric fitting, the problem which estimates a geometric model of a scene from extracted image data, is one of the most fundamental problems of computer vision. Bundle adjustment and maximum likelihood estimation are well used for geometric fitting. In this paper, we present a maximum likelihood estimation to the data which are constrained linear in the model parameters. We describe the geometric meanings of maximum likelihood and its reliability evaluation. We also show geometric fitting examples.

1. はじめに

我々はコンピュータビジョンの分野で特に、幾何学的当てはめと呼ばれる問題の解を最尤推定によって高精度に計算する方法について研究してきた。本稿では、データとモデルパラメータが線形拘束条件で表される場合の幾何学的当てはめの問題を取り上げ、実際の問題ですぐに活用できることを目的として、最尤推定法の具体的な計算方法や推定値の信頼性評価につ

いて述べる。従って本稿では、最尤推定の歴史的背景や理論的な背景については触れていない。これらについては、最尤推定とともに幾何学的当てはめによく用いられるバンドル調整についての岡谷⁸⁾の解説を読まれることをお勧めする。

2. 幾何学的当てはめ

幾何学的当てはめとは誤差のあるデータ x_α , $\alpha = 1, \dots, N$ にパラメータ u を含む陰関数の拘束条件

$$F(x; u) = 0 \quad (1)$$

を当てはめる問題である。具体的には

$$F(x_\alpha; u) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2)$$

となる u を求めることである。コンピュータビジョンでよく現れる幾何学的当てはめの問題には、直線当てはめや2次曲線当てはめ、基礎行列や射影変換行列の計算などが挙げられる。

式(1)中の $F(x; u)$ は一般に x の複雑な非線形関数であるが、未知パラメータ u に関しては線形であったり、パラメータをつけ直して線形に表せることが多い。そのような場合は式(1)が次のように表せる。

$$(\xi(x), u) = 0 \quad (3)$$

ただし、本稿ではベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。ベクトル $\xi(x)$ の各要素 $\xi_i(x)$ は式(1)で u_i のかかっている x の項をまとめたものである。式(1)でパラメータのかかっていない x の項がある場合は、形式的に値1がかかっているとみなして、その1を u の最終成分とみなす。その結果、式(3)はパラメータ u を定数倍しても同じ意味を持つ。このため、 u は任意に正規化してもよい。本稿では、 $\|u\| = 1$ と正規化することにする。ここで、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムを表す。式(3)の形を用いると式(2)の問題は、次式を満たす u を求める問題となる。

$$(\xi(x_\alpha), u) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (4)$$

3. 最小二乗法

式(4)を満たす u を求める最も単純な方法は、次式を最小にする最小二乗法である。

$$\sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, u)^2 = \sum_{\alpha=1}^N (u, \xi_\alpha \xi_\alpha^\top u) = \sum_{\alpha=1}^N (u, M_{LS} u) \quad (5)$$

^{†1} 豊橋技術科学大学情報工学系

Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

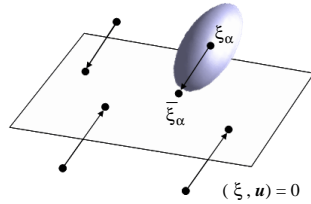


図1 マハラノビス距離の二乗和を最小にするように超平面を当てはめる。

ただし、次のように置いた。

$$M_{LS} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top} \quad (6)$$

これは u の二次形式であるから、よく知られているように、これを最小にする単位ベクトル u は行列 M_{LS} の最小固有値に対する単位固有ベクトルである³⁾。本稿の後の節で紹介する最尤推定の計算方法は反復解法であり、その初期値として最小二乗法の解を与えることが多い。

4. ξ 空間の最尤推定

x を変数変換した $\xi = \xi(x)$ 空間での誤差が正規分布に従うと仮定すると、最尤推定はデータの共分散 (の逆数) で重み付けした、次のマハラノビス距離 (の二乗和) の最小化となる^{*1}。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_{\alpha} - \bar{\xi}_{\alpha}, V[\xi_{\alpha}]^{-1} (\xi_{\alpha} - \bar{\xi}_{\alpha})) \quad (7)$$

これを拘束条件

$$(\bar{\xi}_{\alpha}, u) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (8)$$

のもとで最小にする $\bar{\xi}_{\alpha}, u$ を求める。ここで、 $\bar{\xi}_{\alpha}$ は ξ_{α} の真値である。元のデータ x_{α} が真値 \bar{x}_{α} に期待値 0 、共分散行列 $V[x_{\alpha}]$ のノイズを独立に加えたものであるとき、変換した $\xi_{\alpha} = \xi(x_{\alpha})$ の共分散行列 $V[\xi_{\alpha}]$ を次のように評価する。

$$V[\xi_{\alpha}] = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha} V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \quad (9)$$

*1 変数変換した ξ が定数の成分を含むと、式 (9) で評価される共分散行列 $V[\xi_{\alpha}]$ は特異行列となる。このときは式 (7) 中の $V[\xi_{\alpha}]^{-1}$ を一般逆行列に置き換えればよい。

ただし、 $(\partial \xi / \partial x)$ は写像 $\xi(x)$ のヤコビ行列であり、 $(\partial \xi / \partial x)_{\alpha}$ は $x = x_{\alpha}$ を代入することを意味する。式 (9) で評価する ξ_{α} の共分散行列は、データ x_{α} がその真値 \bar{x}_{α} にノイズ Δx_{α} が加わったものとして、 Δx_{α} の 2 次以上の項を省略して計算した ξ_{α} の共分散行列と一致する。

最尤推定の幾何学的解釈はこうである。変数変換したベクトル ξ_{α} の次元を M とすると、 ξ_{α} は M 次元空間の N 個の点であり、 $(u, \xi) = 0$ はこの空間中の超平面を表す。最尤推定は超平面との距離をユークリッド距離で測るのではなく、誤差の出やすさを考慮した各点の共分散行列で重み付けしたマハラノビス距離で測って、もっとも誤差が小さくなる超平面を当てはめる問題と解釈できる (図 1)。

式 (8) は $\bar{\xi}_{\alpha}$ に関して線形であるから、ラグランジュ乗数を導入して、これを削除することができる。真の位置 $\bar{\xi}_{\alpha}$ を直接に推定する代わりに

$$\bar{\xi}_{\alpha} = \xi_{\alpha} - \Delta \xi_{\alpha} \quad (10)$$

と書き、補正量 $\Delta \xi_{\alpha}$ を推定してもよい。このとき、式 (7) は次のように書ける。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta \xi_{\alpha}, V[\xi_{\alpha}]^{-1} \Delta \xi_{\alpha}) \quad (11)$$

式 (8) は次のように書ける。

$$(\xi_{\alpha} - \Delta \xi_{\alpha}, u) = 0 \quad (12)$$

制約条件 (8) を消去するために、ラグランジュ乗数 λ_{α} を導入して、

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Delta \xi_{\alpha}, V[\xi_{\alpha}]^{-1} \Delta \xi_{\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} ((\xi_{\alpha} - \Delta \xi_{\alpha}, u)) \quad (13)$$

と置き、 $\Delta \xi_{\alpha}$ で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$2V[\xi_{\alpha}]^{-1} \Delta \xi_{\alpha} - \lambda_{\alpha} u = 0 \quad (14)$$

式 (14) より、次式を得る。

$$\Delta \xi_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{2} V[\xi_{\alpha}] u \quad (15)$$

これを式 (12) に代入すると、 λ_{α} が次のように定まる。

$$\lambda_{\alpha} = \frac{2(u, \xi_{\alpha})}{(u, V[\xi_{\alpha}] u)} \quad (16)$$

式 (15) を式 (11) に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (V[\xi_{\alpha}]u, V[\xi_{\alpha}]^{-1}V[\xi_{\alpha}]u) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (u, V[\xi_{\alpha}]u) \end{aligned} \quad (17)$$

これに式 (16) を代入すると次式が得られ、これを最小にする u を求めればよい。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_{\alpha})^2}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)} \quad (18)$$

5. 最尤推定解の計算

式 (18) の形の式を最小化する計算法として、代表的なものは Chojnacki ら²⁾ の FNS 法、Leedan ら⁷⁾ の HEIV 法、および射影的ガウス・ニュートン法⁹⁾ がある。ここでは比較の実装が簡単な Chojnacki らの FNS 法について紹介する。式 (18) を u で微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla_u J &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{2(u, \xi_{\alpha})\xi_{\alpha}}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{2(u, \xi_{\alpha})V[\xi_{\alpha}]u}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)^2} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{2\xi_{\alpha}(\xi_{\alpha}^T u)}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{2(u, \xi_{\alpha})V[\xi_{\alpha}]u}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)^2} \\ &= 2(M - L)u \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、次のように置いた。

$$M \equiv \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_{\alpha}\xi_{\alpha}^T}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)}, \quad L \equiv \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_{\alpha})V[\xi_{\alpha}]u}{(u, V[\xi_{\alpha}]u)^2} \quad (20)$$

式 (18) を最小化するには式 (19) を 0 とする u を求めればよい。ただし、解 u の定数倍の不定性を考慮して、 $\|u\| = 1$ と正規化する。Chojnacki らの FNS 法の手順は次の通りである。

- (1) u に適当な初期値を与える (例えば最小二乗法の解を与える)。
- (2) 次の固有値問題を解き、最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル u' を求める。

$$Xu' = \lambda u', \quad X \equiv M - L \quad (21)$$

- (3) 符号を除いて $u \approx u'$ なら u' を返して終了する。そうでなければ、 $u \leftarrow u'$ としてステップ 2 に戻る。

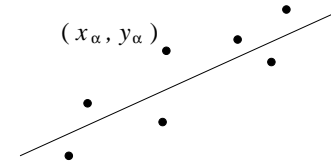


図 2 点列への直線当てはめ

6. 最尤推定による幾何学的当てはめ

本節ではコンピュータビジョンによく現れる幾何学的当てはめの問題として、直線当てはめ、楕円当てはめ、基礎行列の計算を例に具体的に最尤推定の計算方法を示す。

【例 1】直線当てはめ: 与えられた点 (x_{α}, y_{α}) , $\alpha = 1, \dots, N$ に直線

$$Ax + By + Cf_0 = 0 \quad (22)$$

を当てはめる問題を考える (図 2)。 $\xi(x, y)$, u を

$$\xi(x, y) = (x \ y \ f_0)^T, \quad u = (A \ B \ C)^T \quad (23)$$

と定義すると^{*1}, 式 (22) は、式 (3) の形になる。

x_{α}, y_{α} , $\alpha = 1, \dots, N$ に平均 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うノイズが独立に加わっているとすると、 $x_{\alpha} = (x_{\alpha} \ y_{\alpha} \ f_0)^T$ の共分散行列 $V[x_{\alpha}]$ および、 $(\partial \xi / \partial x)_{\alpha}$ は次のようになるから、

$$V[x_{\alpha}] = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

ξ_{α} の共分散行列は、次のように評価できる。

$$V[\xi_{\alpha}] = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma^2 V_0[\xi_{\alpha}] \quad (25)$$

ここで、 $V_0[\xi_{\alpha}]$ を正規化共分散行列と呼ぶことにする。式 (18) の最小化は σ^2 には依存しな

*1 f_0 は画像サイズ程度の定数である。これにより、データベクトルの成分のオーダーがそろい、けた落ちによる計算精度の低下を防ぐ目的がある。

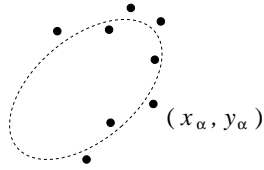


図3 点列への楕円当てはめ

いので、最尤推定の計算は、式(20)の $V[\xi_\alpha]$ を $V_0[\xi_\alpha]$ に置き換えて行ってもよい。

【例2】楕円当てはめ: 与えられた点 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ に楕円

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey)f_0 + Ff_0^2 = 0 \quad (26)$$

を当てはめる問題を考える(図3)。 $\xi(x, y)$, \mathbf{u} を

$$\xi(x, y) = (x^2 \ 2xy \ y^2 \ 2xf_0 \ 2yf_0 \ f_0^2)^\top, \quad \mathbf{u} = (A \ B \ C \ D \ E \ F)^\top \quad (27)$$

と定義すると、式(26)は、式(3)の形になる。

x_α, y_α , $\alpha = 1, \dots, N$ に平均0、標準偏差 σ の正規分布に従うノイズが独立に加わっているとすると、 $(\partial\xi/\partial\mathbf{x})_\alpha$ は次のようになるから、

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{x}}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 & 2f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 2y & 0 & 2f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (28)$$

ξ_α の共分散行列は、次のように評価できる。

$$V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha & x_\alpha & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 0 & y_\alpha & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv 4\sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (29)$$

【例3】基礎行列の計算: 同一シーンを異なる位置から撮影した2画像において、第1画像の点 (x, y) が第2画像の点 (x', y') に対応しているとき、対応点間には次のエピ極線方程式

が成立する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix}, \mathbf{F} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

ここで \mathbf{F} はそれぞれの画像を撮影したカメラの相対位置や内部パラメータによって定まるランク2の行列であり、基礎行列と呼ばれる。2画像間で与えられた N 組の対応点 (x_α, y_α) , (x'_α, y'_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ から基礎行列を計算する問題を考える(図4)。 $\xi(x, y)$, \mathbf{u} を

$$\xi(x, y, x', y') = (xx' \ xy' \ xf_0 \ yx' \ yy' \ yf_0 \ f_0x' \ f_0y' \ f_0^2)^\top, \quad \mathbf{u} = (F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33})^\top \quad (31)$$

と定義すると、式(30)は、式(3)の形になる。

(x_α, y_α) , (x'_α, y'_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ の x 座標と y 座標に独立に平均0、標準偏差 σ の正規分布に従うノイズが独立に加わっているとすると、 $(\partial\xi/\partial\mathbf{x})_\alpha$ は次のようになるから、

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\mathbf{x}}\right)_\alpha = \begin{pmatrix} x' & y' & f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x' & y' & f_0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & f_0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (32)$$

ξ_α の共分散行列は、次のように評価できる。

$$V[\xi_\alpha] = \sigma^2 \times \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 \\ x'_\alpha y'_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & f_0 y'_\alpha & 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 \\ f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x'_\alpha y'_\alpha & y_\alpha^2 + y_\alpha'^2 & f_0 y'_\alpha & 0 & f_0 y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (33)$$

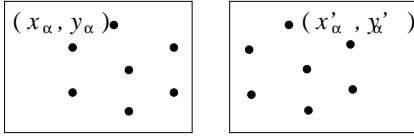


図4 基礎行列の計算

7. x 空間の最尤推定

前節までの ξ 空間での最尤推定は、ノイズモデルが必ずしも適切ではない。例に挙げたように、各点 (x_α, y_α) の各座標に独立な正規分布に従うノイズが加わっていると考えの方が自然である。しかし、非線形変換した ξ_α のノイズは厳密には正規分布ではない。

そこで、元のデータ x_α はその真値 \bar{x}_α に期待値 0 、共分散行列 $V[x_\alpha]$ の正規分布に従う独立なノイズが加わったものとみなし、 x 空間での最尤推定を考える。これは、拘束条件

$$(\xi(\bar{x}_\alpha), \mathbf{u}) = 0 \quad (34)$$

のもとで、次のマハラノビス距離（の二乗和）

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x}_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} (x_\alpha - \bar{x}_\alpha)) \quad (35)$$

を最小にする $\bar{x}_\alpha, \mathbf{u}$ を求めるものである。真の位置 \bar{x}_α を直接に推定する代わりに

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha - \Delta x_\alpha \quad (36)$$

と書き、補正量 Δx_α を推定してもよい。このとき、式 (35) は次のように書ける。

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) \quad (37)$$

式 (34) は次のように書ける。

$$(\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha), \mathbf{u}) = 0 \quad (38)$$

$\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$ と置き、テーラー展開 $\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha) = \xi_\alpha - (\partial \xi / \partial x)_\alpha \Delta x_\alpha + \dots$ を代入して、第 1 近似として補正項 Δx_α の 2 次の項を無視すると、次式を得る。

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, \mathbf{u} \right) = (\xi_\alpha, \mathbf{u}) \quad (39)$$

式 (9) と同様に、 $(\partial \xi / \partial x)_\alpha$ は写像 $\xi(x)$ のヤコビ行列に $x = x_\alpha$ を代入したものである。制約条件 (38) を消去するために、ラグランジュ乗数 λ_α を導入して、

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, \mathbf{u} \right) - (\xi_\alpha, \mathbf{u}) \\ & = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left((\Delta x_\alpha, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top, \mathbf{u}) - (\xi_\alpha, \mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

と置き、 Δx_α で微分して 0 と置くと、次のようになる。

$$2V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha - \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u} = 0 \quad (41)$$

式 (41) より、次式を得る。

$$\Delta x_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u} \quad (42)$$

これを式 (39) に代入すると次のようになる。

$$\frac{\lambda_\alpha}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}, \mathbf{u} \right) = (\xi_\alpha, \mathbf{u}) \quad (43)$$

式 (9) の関係を用いると、 λ_α が次のように定まる。

$$\lambda_\alpha = \frac{2(\mathbf{u}, \xi_\alpha)}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (44)$$

式 (42) を式 (37) に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} E & = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}) \\ & = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (\mathbf{u}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}) \\ & = \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (45)$$

これに式 (44) を代入すると次式が得られ、これを最小にする \mathbf{u} を求めればよい。

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha)^2}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (46)$$

これは式 (18) と一致している。これは、 x 空間の最尤推定の第 1 近似が ξ 空間の最尤推定と一致することを意味している。従って、先の節で紹介した FNS 法などによってこれを最

小にする u が計算できる. その解を \hat{u} とすると, 式 (36), (42), (44) から真値 \bar{x}_α の第 1 近似 \hat{x}_α が次のように推定できる.

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha - \frac{(u, \xi_\alpha)V[x_\alpha]}{(u, V[\xi_\alpha]u)} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u \quad (47)$$

式 (47) は真値の第 1 近似であるから, これから更に高次の補正項を推定することにより, 真値の近似値を更に補正してより真値に近づけながら最尤推定解を推定する方法が金谷ら⁴⁾ によって提案されている.

8. 推定精度の評価

最尤推定に限らず, 推定した解の精度を評価することは非常に重要な問題である. シミュレーションデータを用いた実験のように解の真値が既知であれば, 真の解と推定値との差を評価できる. 本稿で定義した幾何学的当てはめの解 u は単位ベクトルとしているから, その微小変化は真の解 \bar{u} に直交する方向に生じる. そこで, 推定値 u の誤差 Δu を \bar{u} に直交する方向の大きさで測る (図 5). 幾何学的には Δu は u を \bar{u} に垂直な平面に射影したものであり, 次のように表せる.

$$\Delta u = u - (u, \bar{u})\bar{u} = P_u u, \quad P_u \equiv I - \bar{u}\bar{u}^\top \quad (48)$$

行列 P_u は単位ベクトルに垂直な平面上への射影行列である. そこで, 計算の信頼性を次の共分散行列で評価する.

$$V[u] = E[\Delta u \Delta u^\top] = E[(P_u u)(P_u u)^\top] \quad (49)$$

ここで, $E[\cdot]$ は誤差 Δu に関する期待値を表す. 式 (34) のトレースの平方根

$$D = \sqrt{\text{tr}V[u]} = \sqrt{E[\|\Delta u\|^2]} = \sqrt{E[\|P_u u\|^2]} \quad (50)$$

を RMS 誤差, もしくは平方平均二乗誤差と呼ぶ.

このとき, どのような推定方法で u を計算しても, データに誤差がある限り, $V[u]$ がある値よりも小さくならない, すなわち精度には超えることができない理論限界が存在する. ノイズ $\Delta \xi_\alpha$ の分布を期待値 0, 共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ の独立な正規分布とみなせば, u の任意の

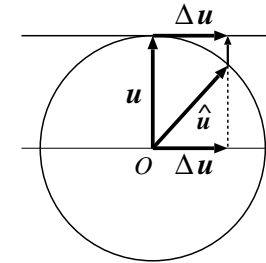


図 5 推定値の精度評価

不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ^{*15),6)}.

$$V[u] \succ \bar{M}^{-1}, \quad \bar{M} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(\bar{u}, V[\bar{\xi}_\alpha] \bar{u})} \quad (51)$$

ただし, \succ は左辺から右辺を引いたものが半正値対象行列であることを意味する. Chernov ら¹⁾ は式 (51) の第 1 式の右辺を KCR(Kantani-Cramer-Rao) 下界と呼んだ. そして u が不偏推定量でなくても $\sigma \rightarrow 0$ で $u \rightarrow \bar{u}$ であれば, $O(\sigma^4)$ を除いて式 (51) が成立することを示した.

式 (50) を実際に評価する際には, 期待値の計算部分を次のように異なるノイズを加えた K 回の試行結果の二乗平均の平方根に置き換えればよい.

$$D = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \|P_u u^{(a)}\|^2} \quad (52)$$

ここで, $u^{(a)}$ は a 回目の試行で得られた解を表す. また, KCR 下界とこの RMS 誤差を比較する際には, RMS 誤差の計算と同様に行列 \bar{M}^{-1} のトレースを計算すればよい.

9. 幾何学的当てはめの精度評価

本節では, 再び直線当てはめ, 楕円当てはめ, 基礎行列の計算を例にして, 最尤推定によって計算した解の精度評価について説明する.

*1 変数変換した ξ が定数の成分を含むと, 式 (37) の \bar{M} は特異行列となる. このときは逆行列を一般逆行列に置き換えればよい.

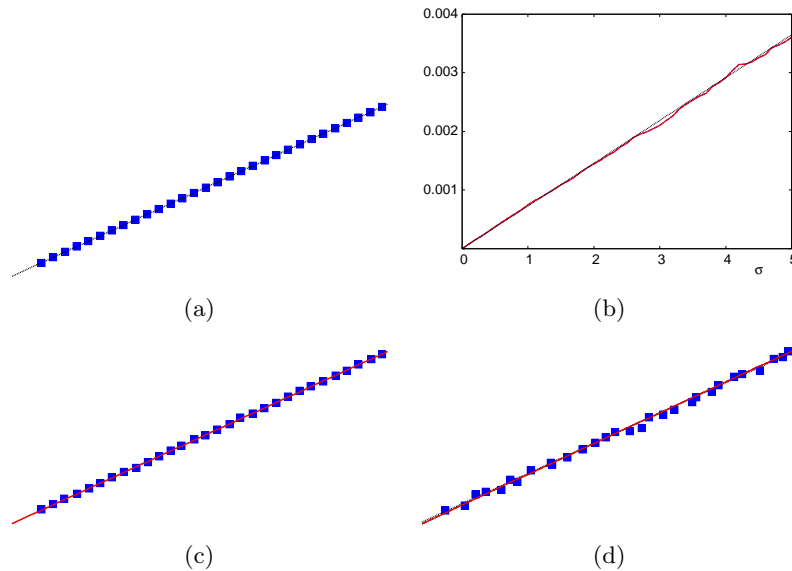


図 6 直線当てはめの精度評価, (a) シミュレーションデータ, (b) RMS 誤差, 実線:FNS 法, 破線:最小二乗法, 点線:KCR 下界, (c) $\sigma = 1$ のときの直線当てはめの結果, (d) $\sigma = 5$ のときの直線当てはめの結果.

【例 4】直線当てはめの精度評価: 直線 $3x + 6y - 4f_0 = 0$, $f_0 = 600.0$ 上の N 点, $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$ に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うノイズを付加したデータ (x_α, y_α) から最尤推定によって直線を当てはめ, その RMS 誤差と KCR 下界を比較する.

直線上に $N = 30$ 点のシミュレーションデータを作成したものが, 図 6(a) である. これに期待値 0, 標準偏差 $\sigma = 0, \dots, 5$, 刻み幅 0.1 の正規分布に従うノイズを付加したデータに対して, FNS 法を用いて直線を当てはめる. 各 σ に対して異なるノイズを付加して 1000 回の試行を行い, RMS 誤差を経産した結果が図 6(b) である. 実線が FNS 法の RMS 誤差, 破線が最小二乗法の RMS 誤差, 点線が KCR 下界である. 図 6(c), (d) はそれぞれ $\sigma = 1, 5$ のときの最小二乗法と FNS 法で当てはめた直線の例である. これらの結果からわかるように直線当てはめでは, 最小二乗法と FNS 法の解に差はない. このことは, $\|u\| = 1$ のもとでは, 最尤推定の最小化すべき式 (46) と最小二乗法の式 (18) が同じになることから明らかである¹⁰⁾.

【例 5】楕円当てはめの精度評価: 中心 $(0, 0)$, 長軸 200, 短軸 100 (単位は画素) の楕円上の

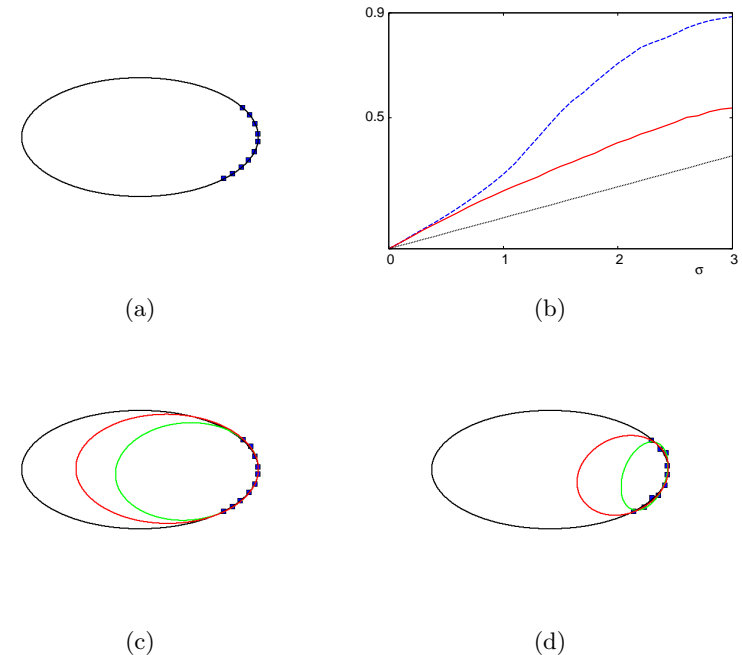


図 7 直線当てはめの精度評価, (a) シミュレーションデータ, (b) RMS 誤差, 実線:FNS 法, 破線:最小二乗法, 点線:KCR 下界, (c) $\sigma = 1$ のときの楕円当てはめの結果, (d) $\sigma = 3$ のときの楕円当てはめの結果.

N 点, $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$ に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うノイズを付加したデータ (x_α, y_α) から最尤推定によって楕円を当てはめ, その RMS 誤差と KCR 下界を比較する.

楕円上に $N = 10$ 点のシミュレーションデータを作成したものが, 図 7(a) である. これに期待値 0, 標準偏差 $\sigma = 0, \dots, 3$, 刻み幅 0.1 の正規分布に従うノイズを付加したデータに対して, FNS 法を用いて楕円を当てはめる. 各 σ に対して異なるノイズを付加して 1000 回の試行を行い, RMS 誤差を計算した結果が図 7(b) である. 実線が FNS 法の RMS 誤差, 破線が最小二乗法の RMS 誤差, 点線が KCR 下界である. 図 7(c), (d) はそれぞれ $\sigma = 1, 3$ のときの最小二乗法と FNS 法で当てはめた楕円の例である. RMS 誤差を比較すると, 最小二乗法がノイズが増えると急激に精度が低下し, FNS 法は最小二乗法に比べて精度が高いこ

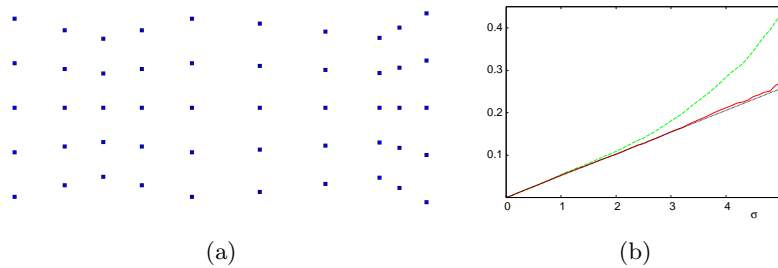


図 8 直線当てはめの精度評価, (a) シミュレーションデータ, (b) RMS 誤差, 実線:FNS 法, 破線:最小二乗法, 点線:KCR 下界

とがわかる。また、得られた解による楕円の描画結果を見ると、FNS 法の方が真の楕円に近い楕円が得られていることがわかる。

【例 6】基礎行列の精度評価: 異なる 2 画像間の N 組の対応点 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $(\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$ に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従うノイズを付加したデータ (x_α, y_α) , (x'_α, y'_α) から最尤推定によって基礎行列を計算し, その RMS 誤差と KCR 下界を比較する。

図 8(a) のシミュレーションデータに対して, 期待値 0, 標準偏差 $\sigma = 0, \dots, 5$, 刻み幅 0.1 の正規分布に従うノイズを付加し, FNS 法を用いて基礎行列を計算する。各 σ に対して異なるノイズを付加して 1000 回の試行を行い, RMS 誤差を計算した結果が図 8(b) である。実線が FNS 法の RMS 誤差, 破線が最小二乗法の RMS 誤差, 点線が KCR 下界である。最小二乗法では, ノイズの増加に従って精度が低下するが, FNS 法では KCR 下界にほぼ一致するような高精度な解が得られている。

図 9 は実画像から手動で 100 点の特徴点を抽出して, FNS 法により基礎行列をして, 山田ら¹¹⁾の方法で 3 次元復元を行った結果である。

10. おわりに

本稿では幾何学的当てはめの最尤推定法について解説した。コンピュータビジョンの分野でよく現れる幾何学的当てはめの問題は, データとモデルパラメータが線形拘束条件で表される場合が多く, 本稿ではこの場合についてのみ取り扱った。本稿の内容は歴史的背景などには触れず, 実際の問題ですぐに活用できることを目的として, 最尤推定法の具体的な計算方法や推定値の信頼性評価について述べた。また, これらについて直線当てはめや楕円当てはめなどの具体例を示した。



図 9 直線当てはめの精度評価, (a) シミュレーションデータ, (b) RMS 誤差, 実線:FNS 法, 破線:最小二乗法, 点線:KCR 下界

参考文献

- 1) Chernov, N. and Lesort, C.: Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-4, pp.713-728 (2004).
- 2) Chojnacki, M., Brooks, M. J., van den Hengel, A. and Gawley, D.: On the fitting on surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol.22, No.11, pp.1294-1303 (2000).
- 3) 金谷健一: これならわかる最適化数学-基礎原理から計算方法まで-, 共立出版 (2005).
- 4) 金谷健一, 菅谷保之: 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, 情報処理学会論文誌, コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol.2, No.1, pp.53-62 (2009).
- 5) Kanatani, K.: *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands (1996); Dover, New York (2005).
- 6) 金谷健一: 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18, pp.59-64 (2005).
- 7) Leedan, Y. and Meer, P.: Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision*, Vol.37, No.2, pp.127-150 (2000).
- 8) 岡谷貴之: パンドルアジャストメント, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-167-37, pp.1-16 (2009).
- 9) 菅谷保之, 金谷健一: 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-22, pp.207-214 (2006).
- 10) 菅谷保之, 金谷健一: 画像の三次元理解のための最適化計算 [I] -直線当てはめ-, 情報処理学会誌, Vol.92, No.3, pp.229-233(2009).
- 11) 山田健人, 金澤 靖, 金谷健一, 菅谷保之: 2 画像からの 3 次元復元の最新アルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-168-15, (2009).