

## 推論エンジンをベースとした経済数学教授法

白田 由香利<sup>†</sup>

筆者の経営数学の講義では、学生に推論エンジンをシミュレーションさせる教授法「推論エンジンシミュレーション法(Inference Engine Simulating Method)」を行っている。本方法においては、学生にまず2種類のルール・データベースを頭の中に構築してもらう。ひとつは数学公式をルールとする、数学ルール・データベースである。もうひとつは、経済・経営に関するルール・データベースであり、経済・経営に関するセオリーがルールとして蓄積されている。経営に関する文章題が与えられた場合、推論エンジンシミュレーション法では、第一に、文中の重要キーワードを探し、そのキーワードを使って、2種類のルール・データベースを検索し、関連するルールを収集する。そして、そのルールの集合に対して、演繹推論を行い、文章題で与えられたデータと、未知数との間の関係を求めていく。本稿では、推論エンジンシミュレーション法のベースとなった、経営数学用推論システムの仕様を説明し、同じ解法プロセスを学生に適応した際の有効性についての考察を試みる。

### Inference Engine Based Instruction Method for Economics Mathematics

Yukari Shiota<sup>†</sup>

In my business mathematics class, I conduct my original heuristics titled “Inference Engine Simulating Method” so that students can solve mathematics problems by simulating the inference engine system. In the method, the students in advance have to construct two kinds of rule databases in their heads; one is a mathematics rule database where mathematics formulas are stored and another is an economics rule database where economics theories are stored. Given a mathematics word problem, the students will firstly find the most important keyword among the words. Then with the keyword, they will retrieve the rule databases to collect the related rules. Secondly, the students conduct the

deductive reasoning on the rules to find the relationship between the given data in the problem words and the unknown. In the paper, I shall describe the specifications of my developed inference system for business mathematics that have become the basement of the “inference engine simulating method”, and the effectiveness of the same process application to the students will be examined.

#### 1. はじめに

本稿では、筆者が創案した推論エンジンシミュレーション法という経済数学問題教授法について説明する。筆者の経営数学の講義では、演繹推論のトレーニングを重視し、演繹推論による問題解決法を実践している。推論エンジンシミュレーション法とは、演繹推論による問題解決アプローチを学生に強く意識させて、演繹推論の習慣づけをさせるために筆者が創案した。

推論エンジンに経済数学の文章題を解かせる場合を考えよう。文章題の例を以下にあげる。

ある企業の需要関数が以下の式で与えられている。

$$Q + P = 5000$$

費用関数が以下の式であるとき、利潤を最大化する生産量を求めよ。

$$C = Q^2 + 1000Q + 500$$

推論を行わせるためには、まず、経済ルール・データベース、と、数学知識データベースの両方を構築する。そして、そのデータベースの中に、知識をルールとして、蓄積する。ここまですべて準備である。経済数学問題が与えられたとき、文章題の中のキーワードを検索キーワードとして、その2種類のデータベースに検索をかける。たと

<sup>†</sup> 学習院大学 経済学部経営学科  
Gakushuin University, Department of Management  
Faculty of Economics

えば、「最大値を求める」というキーワードで検索をかける。検索して求めたルールに対して、演繹推論を行うことで、現在の文章題で与えられているデータと未知数の関係を求める。

この方法は、推論システムだけでなく、人間にも適応可能であり、経済数学を苦手とする初学者に問題解決をさせる際に有効な方策であると考えた。本論文では、筆者の実践する推論エンジンシミュレーション法を説明し、この方法の経済数学の学習法としての有効性について考察する。

次節では、経営数学の講義における演繹推論について論じる。第3節では、推論エンジンシミュレーション法を考案する元になった知識ベースおよび推論システムを説明する。第4節では、筆者の提案する推論エンジンシミュレーション法を説明し、学生への教授法としての有効性を論じる。第5節はまとめである。

## 2. 演繹推論を重視した経済数学教授法

本節では、筆者の経営数学の講義の特長である、演繹推論を重要視した教授法について簡単に説明する。講義の科目名は経営数学であるが、内容的には国民所得決定問題、需要と供給の分析、最適化問題などを講義するので、経済数学の教授法とみなせる。

初めに一般的な推論について少し述べる。人間は賢く行動するが、人間の行っている「賢い」行動は、知っている多くの事実(知識)を組み合わせて、あるいは加工する(推論)ことに基づいて行われている[1]。

人間が数学を解く場面を考えてみると、「数学問題を解くという行動は、既にデータベースに蓄えられている知識(ルール)を組み合わせて、あるいは推論することに基づいて行われる」と解釈できる。ここでいうデータベースとは、知識データベースあるいはルール・データベースと呼ばれる種類のものである。ルール・データベースには、知識がルールとして記述され、蓄積されている。

数学問題を解くために、どのような種類のルール・データベースが必要か考えてみる。数学問題が対象であるので、数学ルール・データベースは必須である。そして問題分野ごとに異なる専門分野の知識が必要であるので、経済数学であれば、経済ルール・データベースが必要となり、物理数学では、物理ルール・データベースが必要になる。このように数学公式と経済のルール・データベースを明確に分離することにより、学生の頭の中の知識の整理が容易になると筆者は考える。

筆者の経営数学で使う推論とは、演繹的推論である。演繹的推論(deductive inferenceあるいは deductive reasoning)とは、一般的に成り立っている事柄から、個別的な情報を導き出す推論で、この結果は必然的に、すなわち、常に成立する[2]。この他、帰納的推論(inductive reasoning)がよく知られているが、帰納的推論では、個別的に成り立

っている関連する多くの情報から、これらを包含する一般的な情報を導く。この結果は多くの場合成立するが、必ず成立するという保証はない[2]。筆者の経営数学の範囲は、国民所得決定問題のような連立方程式を解く問題から、制約付き2変数関数の最適化問題までを扱う。証明問題は全く解を求めるタイプの問題である。よって問題解決に必要な推論は演繹推論のみである。

筆者の経営数学の講義では、論理的に考えるスキルを習得させることを授業の目的としている。論理的に考えるスキルは万人に必要なものである。たとえ学生が、自分の人生には微分などは必要ではないと考えたとしても、経営数学を履修する意義はあると、信じて経営数学を教授することができる。

その論理的思考の中心は、上述したように演繹推論である。もちろん数学は演繹推論だけではなく、各種の推論能力を養う科目である。数学における推論能力の重要性については多くの数学者が研究している[3]。学生によっては、数個の問題から一般的な解法を発見するかもしれない。しかし多くの学生は、経済数学の文章題が苦手である。その理由として、以下が考えられる。

- (1) 文章を読解する力不足のため、与えられたデータおよび未知数を理解できていない。
- (2) 基礎的な数学的公式を理解していない。
- (3) 数学的解法プロセスを理解していない。
- (4) 経済知識の不足により、変数の間の関連が付けられない。
- (5) 問題解決に必要な知識が数学知識なのか、経済知識なのか判別できていない。

演繹推論帰納をもったデータベースを演繹データベースと呼ぶ[4]。筆者は授業で、経済数学の文章題が解けずに悩んでいる学生を見て、演繹推論システムが行うように、機械的に解く方法を学生に習得させれば、効率よく問題が解けるようになるのではないか、と考えた。

演繹推論システムは、述語論理形式で記述されたルールだけを用いて、未知数にむかって演繹推論を繰り返すだけである。ルール・データベースに記述されている以上に、深くそのセオリーや概念を理解しているわけではない。そうであれば、学生がたとえセオリーや概念を理解していなくても、傍らに公式集とルール集さえあれば、機械的な演繹推論を行うだけで、問題解決に至ることが可能になるであろう、と考えた。

機械的な問題解決の経験を増やしていくことにより、次第に問題の理解も進む。

これが推論エンジンシミュレーション法を創案した発端である。また、本シミュレーション法を考えるにあたって、経済数学問題解決のための推論システムを構築した経験が参考となっている。よって次節では、経済数学問題解決のための推論システムを構築した経験について述べる。

### 3. 経済数学のための知識ベースシステム

本節では、筆者が構築した経済数学のための知識データベースおよび推論エンジンについて説明する。このシステム構築経験が、人間の行う経済数学問題解決のための演繹推論と、推論エンジンが行う演繹推論の比較に関する研究の発端となった。本推論システムの詳細は別の論文に記してあるので、参照して頂きたい[5, 6]。

この知識データベースおよび推論システムの適応範囲は、学部レベルの経済数学の範囲である。国民所得決定問題、1変数および2変数関数の最適化問題が対象範囲となる。これらは証明問題を除く、解を発見するタイプの決定問題である。つまり与えられた経済数学問題の中心的部分は、解くべき連立方程式を作ることであり、推論エンジンは解くべき連立方程式を作るまでを行う。出力は、微分(偏微分)式などを含む連立方程式である。この連立方程式を解く作業は、数式処理システムによって行う。筆者は Maple を使っている。

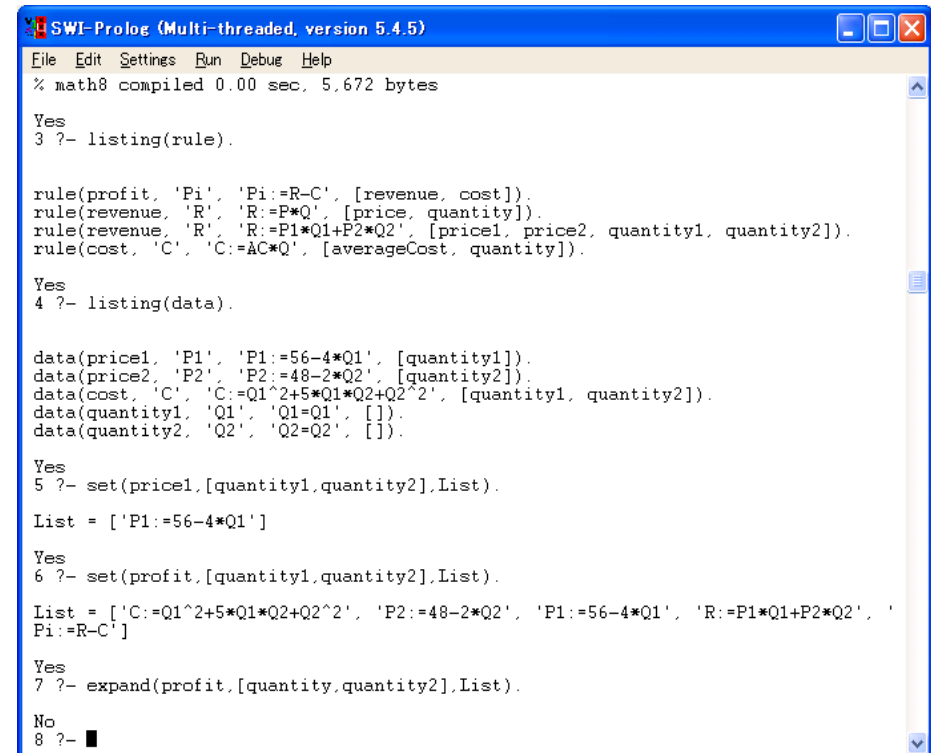
知識データベース中には、問題の解法に必要とされる用語および概念の数式表現を格納する。本システムでは、Prolog のルールとして表現してある。演繹推論も Prolog で行っている。

一般に、文章題として与えられたデータだけを使って演繹推論するのでは、連立方程式はセットアップできない。それは、一部のデータや条件は経済のセオリー、常識であるため、それらは文章題中で記述が省略されているからである。学習者がそうした知識を知らない場合、連立方程式をセットアップできず、問題は解けないことになる。それらのセオリーが知識データベースに蓄積されていれば、それを利用して演繹推論を行い、推論エンジンは正しい連立方程式をセットアップすることが可能となる。

本推論システム構築の元来の目的は、学習者の問題解決を支援するための ITS(Intelligent Tutoring System)を構築することにある。人間の学習者が知識不足の場合、それをガイドできるように ITS は知識データベースを使って演繹推論する。推論エンジンが正しく演繹推論する様子を提示することで、人間の学習者の支援を行いたい。

次に、こうした経済数学問題解決のための知識ベースには、どのような種類の知識を蓄積すべきかを考える。一般に数学問題を解くためには、文章題で与えられたデータのほか、数学公式、そして、その特定分野に特化した知識(セオリー)が必要となる。経済数学の場合、経済に特化するセオリーが必須となる。

一方数学公式であるが、具体例としては、各種の微分のルール、対数の性質に関するルール、極値を求める公式、などがある。基本的な数学ルールについては数式処理システムがもっているため、本システムでは実装しない。本システムの範囲は、国民所得問題、および最適化問題であるため、数学公式として利用するのは、極値を求め



```
SWI-Prolog (Multi-threaded, version 5.4.5)
File Edit Settings Run Debug Help
% math8 compiled 0.00 sec, 5,672 bytes

Yes
3 ?- listing(rule).

rule(profit, 'Pi', 'Pi:=R-C', [revenue, cost]).
rule(revenue, 'R', 'R:=P*Q', [price, quantity]).
rule(revenue, 'R', 'R:=P1*Q1+P2*Q2', [price1, price2, quantity1, quantity2]).
rule(cost, 'C', 'C:=AC*Q', [averageCost, quantity]).

Yes
4 ?- listing(data).

data(price1, 'P1', 'P1:=56-4*Q1', [quantity1]).
data(price2, 'P2', 'P2:=48-2*Q2', [quantity2]).
data(cost, 'C', 'C:=Q1^2+5*Q1*Q2+Q2^2', [quantity1, quantity2]).
data(quantity1, 'Q1', 'Q1=Q1', []).
data(quantity2, 'Q2', 'Q2=Q2', []).

Yes
5 ?- set(price1,[quantity1,quantity2],List).

List = ['P1:=56-4*Q1']

Yes
6 ?- set(profit,[quantity1,quantity2],List).

List = ['C:=Q1^2+5*Q1*Q2+Q2^2', 'P2:=48-2*Q2', 'P1:=56-4*Q1', 'R:=P1*Q1+P2*Q2', 'Pi:=R-C']

Yes
7 ?- expand(profit,[quantity,quantity2],List).

No
8 ?-
```

図1 最適化問題のための式を演繹推論で求める

る公式のみである。

極値を求めるためには、微分あるいは偏微分して、その式をゼロとおき、停留点を求める。次に、さらに微分あるいは偏微分を行い、極値の判定を行う。この数学的プロセスは、本推論システムでは実装していない。本システムの範囲では、数学公式に関する演繹推論は全く行われてはいない。経済セオリーに関する演繹推論のみを行うものとしている。

経済知識ルールに関する演繹推論のようすを図1に示す。ここでは経済知識として、利潤 profit, 収入 revenue, 生産コスト cost の3つの概念の数式がルールとして定義されている。またこの文章題として与えられたデータとして、平均コスト average cost,

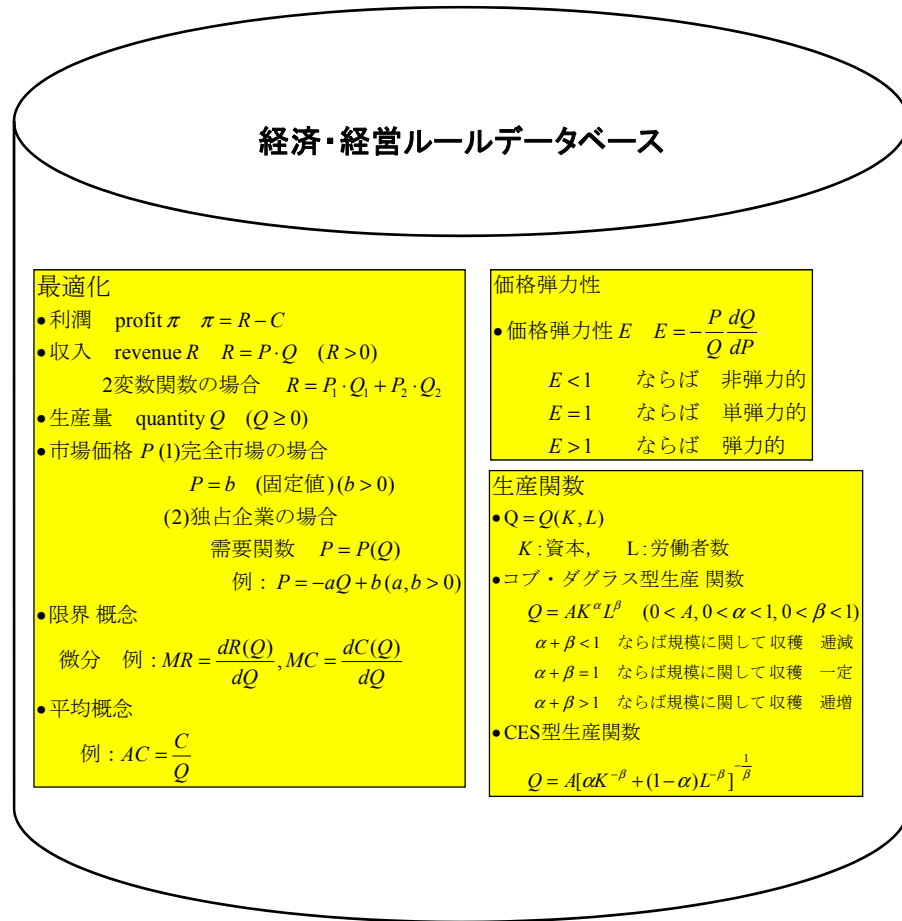


図2 経済・経営ルール・データベースの例

価格 price の2式のデータが与えられている。

知識は rule, 与えられたデータは data で定義されている。両者とも、第1引数である変数を定義するための引数セット及び、その変数間の関係式を定義している。例え

ば revenue は引数 price 及び quantity で定義されていることがルールとして表現されている。

必要な数の方程式を知識ベースから発見し、未知数を指定の変数で表現可能とする必要がある。そのための関数として set()を以下の仕様とした。

- set(unknown, paramList, resultList)

この問題の未知数を profit とした場合、set()を起動することで、Prolog がユニフィケーションを行い、結果の連立方程式  $\pi(R, C)$ ,  $R(P, Q)$ ,  $C(AC, Q)$ ,  $P(Q)$ ,  $AC(Q)$  を求めて List に入れるようになっている。

data (quantity) はそれ自体他の変数で定義されていないので、つまりそれを定義する引数が空リストなので、ここで検索が止まる。この検索エンジンでは、このように独立変数として残したい変数を data として追加しておく仕様とした。

関数 set は、指定の未知数 (unknown) を、指定の引数リスト (paramList) のみで表現可能な連立方程式に展開する。結果の連立方程式は resultList に入る。但し、未知数は引数リストの全ての変数を含む必要がある。ひとつでも含まれない変数がある場合、関心のある知識表現にマッチしない可能性があるからである。

例えば、収入 revenue の定義は、商品が1種類の場合と、商品が2種類ある場合が存在する。図2の経済ルール・データベースの「最適化」関連のルールを参照して頂きたい。商品が2種類の場合、収入は、 $R = P1 \cdot Q1 + P2 \cdot Q2$  と表現される。経済ルール・データベースを構築する場合、これら複数の revenue を定義して格納しておく必要がある。

図1の後半では、本推論エンジンに2種類の商品の収入に関する演繹推論を行わせたようすを示した。図1のルールでは revenue に対して2つのルールが定義されている。Profit を quantity1 および quantity2 で展開しようとした場合、図3のようにデータを与えると、問合せは

set(profit, [quantity1, quantity2], List)

となり、結果として、以下のように5本の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \Pi &= R - C \\ R &= P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 \\ P_1 &= 56 - 4 \times Q_1, \quad P_2 = 48 - 2 \times Q_2 \\ C &= Q_1^2 + 5 \times Q_1 Q_2 + Q_2^2 \end{aligned}$$

結果として  $\pi(Q1, Q2)$  の式が求められる。図1の最後に示された set による問合せは、profit を [quantity, quantity2] という間違った引数セットで展開しようとする

敗する，ことを示している。

経済ルール・データベース構築にあたり注意すべき点は，必要な使用頻度の高い数式表現を変数名が衝突しないように，複数の引数セットで表現することである。

#### 4. 推論エンジンシミュレーション法

本節では，推論エンジンシミュレーション法を説明する。

まず，推論エンジンシミュレーション法を学生に指導する場合，どのように指導するかについて説明する。言葉がけとして表現すると以下ようになる。

1. 頭の中に2種類のルール・データベースを構築しましょう。基本的なルールは記憶しましょう。
2. 文章題を見たら，「与えられたデータ」および「未知数」をノートに書き出しましょう。
3. 未知数を求めるために，重要なキーワードを探しましょう。そのキーワードで2種類のルール・データベースに検索をかけましょう。
4. ルールは文章で与えられている場合もあります。
5. 必要なルールが集められたら，そのルールに対して演繹推論を行い，与えられたデータと未知数の間の関係を求めましょう。
6. その関係を表している方程式，あるいは連立方程式を解くことで解が求まります。

図3に最適化問題における演繹推論の例を示した。図3の問題では，演繹推論を行い，利潤 $\pi$ を生産量 $Q$ の関数として表した後，その $\pi(Q)$ に対して数学ルール「1変数関数の極大値を求める」を適用する。そして未知数である $Q$ を求める。

推論による問題解決アプローチを効果的に学生に実践させるために考案した方法が本稿で述べる「推論エンジンシミュレーション法 (Inference Engine Simulating Method)」である。推論エンジンシミュレーション法の概要は以下の通りである：

- ◇ 学生にまず2種類のルール・データベースを頭の中に構築してもらおう。ひとつは数学ルール・データベースであり，数学の公式がルールである。第2番目は経済・経営に関するルール・データベースであり，経済・経営に関するセオリーがルールとして格納される。
- ◇ 経営に関する文章題が与えられた場合，文中の重要キーワードを探し，そのキーワードを使って，2種類のルール・データベースを検索し，関連するルールを収集する。そして，そのルールの集合に対して，演繹推論を行い，文章題で与えられたデータと，未知数との間の関係を求めていく。

このように，推論エンジンシミュレーション法は，知識データベース(ルール・データベース)と推論エンジンを強く意識しながら数学問題を解くことを特長としている。学生は，2種類のデータベース中のルール(知識)を機械的に組み合わせて，あるいは加工する(推論)ことにより，数学問題を解く。現在発見したルールがどちらのルール・データベースから出てきたものであるかを質問し，学生に意識させることにより，学生の頭の中の知識が整理される。

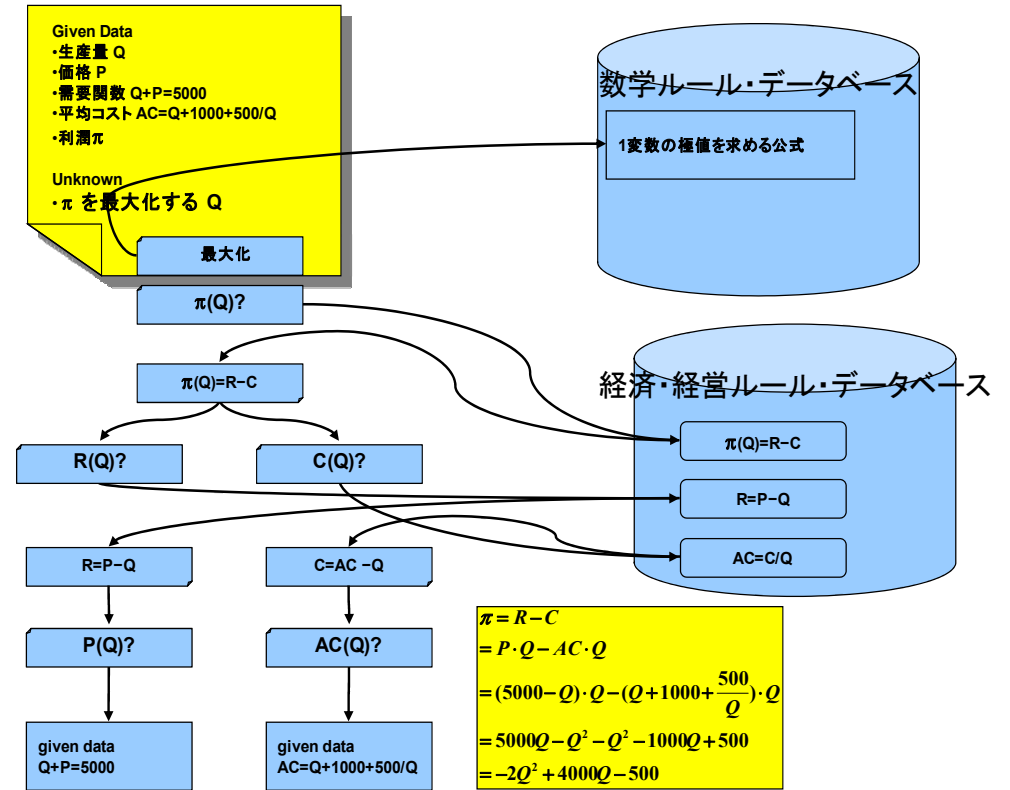


図3 利潤を最大化する最適化問題での演繹推論の過程

以下では，各種の面から，演繹推論を学生に行わせる場合と機械に行わせる場合の比較を行う。

機械のため、常識といえるような知識を記述するためには、多大な述語論理の記述が必要となる。他方、人間に演繹推論を行ってもらう場合、この述語論理の記述が非常に簡単化できるという特長がある。

また、演繹データベース・システムで推論を行うと、ひとつの解を得るまでに、ルールの組合せにおいて、非常に多くの試行錯誤が起こってしまうことが問題となる。しかし人間が行う場合、関連するルールを検索する際、キーワードを用いることが可能となる。ルール1個に対し、複数の検索キーワードを付けて記憶することにより、検索を効率よく行うことが可能となる。その検索キーワードの記述に関しても、人間は、機械上で表現しにくいような抽象的な表現で覚えておくことが可能であるという利点がある。

さらに、人間は、ルールを組み合わせる際も、記号の置き換え、式の変形といった処理が、必要に応じて適宜行えるという利点がある。違う変数を使っている、そのコンテキストを理解し、対応関係を発見することができる。また、類似性のあるルールを見つけて、直面する問題にカスタマイズして適用することもできる。こうした点が、人間が推論を行う際の優位性といえる。

筆者は学生に経営数学を教えている、演繹推論システムに問題を解かせる場合に比較して、人間の学生に演繹推論を行ってもらうことは非常に容易なことと感じた。学生に問題を解かせる場合に、もっと機械的な作業を行うように指導することで、容易に問題が解けるようになると筆者は考える。ここでいう機械的な作業とは、ノートにデータを書き出す、検索して検索結果をノートに書き出す、演繹過程をノートに書き出すなどの作業である。手を動かすことを面倒と思わないで、こうした作業を実行することが問題解決を容易にする

本提案方法の利点をまとめる。

- ◇ 文章題で与えられたデータと未知数を書き出すことで、明確に意識させる。
- ◇ 検索している知識はどちらのデータベース中にあるのかを明確に意識でき、知識の整理が進む。
- ◇ 頭の中のデータベース中に該当する知識がまだ記憶されていない場合でも、紙媒体の公式集をルール・データベースとして検索を行い、不足知識を補うことができる。
- ◇ 知識を頭の中で発見することに比較して、データベース検索を実施するのは、ハードルが低く実行しやすい。
- ◇ 演繹過程をノートに書き出すことで、思考プロセスの間違いを特定化できる。

次にルールの記憶、特に数学公式の記憶方法について筆者の考えるところを述べる。人工知能の研究の分野に機械学習がある。これは、機械(コンピュータ)に学習をさせ

るためのプログラムに関する研究である。この機械学習の分野の中に、効率的学習というテーマがある。効率的学習を論理的に見ると、以下のようになる[7]：

$A \rightarrow B$  と  $B \rightarrow C$  という論理式が事前知識に含まれるときに、「 $A \rightarrow B$  かつ  $B \rightarrow C$  ゆえに  $A \rightarrow C$  である」という推論が証明過程において頻繁に出現するのであれば、「 $A \rightarrow C$ 」も事前知識に含めよう。

この機械学習における効率的学習を、推論エンジンシミュレーション法の場面に置き換えてみると、「頻繁に出現する解法パターンはルールとして暗記しておこう」となる。すなわち、ある特定の条件下で推論された結果は、次回からは直接ルールとして使えるように、それも予めデータベースに格納しておいた方が効率的であるからである。機械学習において、これは効率性向上のために非常に有効である。しかし、人間の学生の場合、機械に比べて記憶は正確でないことが多い。ルールを多数作って、多数暗記したがために、似たようなルールが増えてしまい、間違えて覚えたのでは問題が解けない。間違えて覚えて解けないよりは、ベースとなる重要なルールだけを正確に暗記しておき、正確に推論を行ったほうがはるかによい。

学生は経済数学の学習において、効率化のために、派生ルールをどこまで暗記すべきか、という問題は、その学生の状況に依存して大きく異なってくる。基本ルールを正しく理解し使いこなせないうちは、派生ルールを暗記しても混乱するだけであろう。基本ルールをまず十分理解し、広く活用できるようにすることが重要と考える。

## 5. おわりに

本稿では筆者が提案し経営数学の講義で実践している推論エンジンシミュレーション法について説明した。本方法は推論による経済数学問題を解く方法として効果的な指導法であると考えられる。本方法においては、学生にまず2種類のルール・データベースを頭の中に構築してもらい、ひとつは数学ルール・データベースであり、数学の公式がルールである。第2番目は経済・経営に関するルール・データベースであり、経済・経営に関するセオリーがルールとして格納される。文章題が与えられた場合、文中の重要キーワードを探し、そのキーワードを使って、2種類のルール・データベースを検索し、関連するルールを収集する。そして、そのルールの集合に対して、演繹推論を行い、文章題で与えられたデータと、未知数との間の関係を求めていく。

本提案方法の利点は、経済数学の文章題を解くという複雑な作業を、機械的な単純作業に分解して簡単化している点である。これにより、文章題を苦手とする学生にとって文章題解法のハードルが下げられると考えている。

## 参考文献

- [1] 小川均, "3.知識表現と推論," *人工知能*, 新世代工学シリーズ 溝口理一郎, 石田亨, 編集, 東京: オーム社, 2000.
- [2] 前田隆, 青木文夫, *新しい人工知能 発展編*, 東京: オーム社, 2000.
- [3] N. C. Betsur, *Reasoning Strategies in Mathematics*: Anmol Publications PVT. LTD., 2006.
- [4] 横田一正, 宮崎収兄, "2.3 演繹データベース," *新データベース論 関係から演繹・オブジェクト指向へ*, 計算機科学・ソフトウェア技術講座 4, 東京: 共立出版, 1994.
- [5] 白田由香利, "経済数学における概念の数式表現のための知識データベース構築," *学習院大学経済論集*, vol. 43 no. 1, pp. 27-38, 2006.
- [6] Y. Shirota, "Knowledge Base Construction for Economic Mathematics," *Discussion Paper Series, Gakushuin University Research Institute of Economics and Management*, vol. 5, no. 3, pp. 14, 2006.
- [7] 淡誠一郎, "4.機械学習," *人工知能*, 新世代工学シリーズ 溝口理一郎, 石田亨, 編集., 東京: オーム社, 2000.